Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 15 n^o. 30 - pág. 33-48
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LA NOCIÓN DE CÓNICA EN APOLONIO Y DESCARTES: UN ANÁLISIS COMPARATIVO

Alberto Forero Poveda
Jhon Helver Bello Chávez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas – UD–Colombia

(aceito para publicação em julho de 2015)

Resumen

La construcción de las cónicas para Apolonio se fundamenta en suponer que un cono es cortado de diferentes maneras por un plano, lo que hace que cada una de las secciones que se forma tenga diferentes características en cuanto a diámetros, ejes, y focos; estas características se establecen como relaciones geométricas a partir de la interpretación de razones y proporcionesque se presentan en cada construcción. Posteriormente, Descartes manifiesta otras representaciones para las secciones cónicas, que permiten interpretarlas, además de cónicas, como curvas determinadas por una relación entre variables, a partir de uno o varios movimientos de líneas. El propósito de este artículo es realizar interpretaciones de la noción de cónica en Apolonio y Descartes, de tal forma que se reconozcan vínculos, relaciones y diferencias en los análisis que hacen los autores para estos lugares geométricos y en general para la noción de curva.

Palabras-clave: História, Sección Cónica, Geometría, Curva.

[A NOÇÃO DE CÔNICA EM APOLÔNIO E DESCARTES: UMA ANÁLISE COMPARATIVA]

Resumo

A construção de cônica para Apolônio é baseada na suposição de que um cone é cortado de maneiras diferentes por um plano, o que faz com que cada uma das seções que as formas têm características diferentes em termos de diâmetros, machados, e holofotes; esses recursos são definidas como as relações geométricas da interpretação de razões e proporções apresentadas em cada constructo. Posteriormente, outras representações para os estados Descartes seções cônicas que permitem interpretar, também cônica, como curvas determinado por uma relação entre as variáveis com base em um ou mais movimentos de linhas. O objetivo deste artigo é fazer interpretações da noção de cônica Apolonio e Descartes, de modo que as ligações, relações e diferenças nas análises feitas pelos autores para estes *loci* e, geralmente, com a noção de reconhecimento curva.

Palavras-chave: História, Seção Cônica, Geometria, Curva.

Analisis construccion de curvas y propriedades de las conicas en Apolonio

En diferentes problemas de la antigüedad (trisección del ángulo, problema de Pappus, entre otros) y en la axiomatización de la geometría, la noción de curva ha sido fundamental para la interpretación y modelación de diferentes situaciones problema. En la geometría griega, se tenía una noción de curva basada en las diferentes relaciones geométricas que la constituyen, sea por su definición genética o por sus propiedades. Para Descartes y en general, para la geometría griega antigua, la forma de la curva fue fundamental en su caracterización y utilización, pero existen aspectos de su tratamiento que los separan, uno por el uso de instrumentos mecánicos y otro en la inclusión de una simbología para la descripción y definición de líneas curvas.

El presente documento inicia con un análisis sobre las definiciones y proposiciones que propone Apolonio en su texto “Conics”, como un medio para interpretar la noción de curva en Apolonio y además como una herramienta para entender propiedades actuales en las secciones cónicas desde los fundamentos geométricos en Apolonio. Este tratamiento continúa con la comprensión de la noción de curva en Descartes a partir del estudio y análisis de representaciones y problemas asociados a diferentes curvas que se describen en el texto La Geometrie, analizando los diferentes aspectos geométricos y analíticos que fundamentaron el trabajo sobre curvas en la obra. Finalmente se realiza un análisis comparativo entre los elementos que constituyen el desarrollo de Apolonio y Descartes frente a la noción de curva, identificando relaciones que contribuyeron y establecieron una base para el trabajo sobre el uso y la comprensión de la noción de curva.

Parael primer apartado, se describen algunas de las proposiciones del libro de Apolonio, que permiten describir características fundamentales de la obra y del tratamiento que el autor hace de las cónicas como objeto geométrico. Estos aspectos permiten identificar elementos generales de la obra respecto al estudio y análisis sobre las curvas que se construyen a partir de secciones en un cono.

Aproximación a la Noción de Curva en Apolonio

Apolonio en su texto “Cónics” comienza a identificar cuando una línea recta está dentro de la superficie cónica y cuando está afuera, tomando esto para caracterizar los lugares resultantes en el proceso de cortar el cono por medio de un plano, comenzamos por presentar las ideas iniciales en el texto que para Apolonio son trascendentales en su tratamiento de lás cónicas.

En la proposición 3; Apolonio demuestra que la sección resultante de pasar un plano a través del vértice es un triángulo:

> *"Si un cono es cortado por un plano a través del vértice, la sección es un triángulo".*

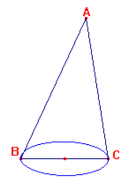

Figura 1. Sección triángulo en Apolonio

Entonces dado un cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo BC; sea éste cortado por algún plano a través del punto A; conformará como secciones, las líneas AB y AC sobre la superficie, y la línea recta BC en la base, que forman un triángulo.

Al pasar el plano a través del eje del cono obtiene la sección llamada triángulo axial, que por pasar exactamente por un diámetro de la base permite establecer relaciones de razón entre segmentos y áreas; consiguiendo con ello demostrar la existencia de secciones como la del círculo; la cual se presenta en la proposición 4:

> *"Si cualquiera de las dos superficies verticalmente opuestas es cortada por algún plano paralelo al círculo a lo largo del cual la línea recta que genera la superficie se mueve, el plano que corta la superficie generará un círculo que tiene su centro en el eje, y la figura contenida por el círculo y la superficie cónica interceptada en el plano cortante en el lado del vértice será un cono."*

Ya construidos el triángulo y el círculo, Apolonio caracteriza las líneas que pasando a través del cono son cortadas por el triángulo axial; llegando a concluir que cualquier línea que no esté en el plano del triángulo axial y seá paralela a un diámetro de la base del cono será bisecada por el plano del triángulo axial y está bisección le brinda herramientas para caracterizar todas las curvas que se conformarán en la intersección de planos con la superficie cónica.

A partir de lo anterior, en la proposición 11aparecen las condiciones de ciertas curvas para que sean nombradas como parábolas:

> *"Si se corta un cono por un plano a través de su eje, y si se corta también con otro plano que corta la base del cono según una línea recta*

perpendicular a la base del triángulo axial, y si además el diámetro de la sección se hace paralelo a un lado del triángulo axial, cualquier línea recta trazada desde la sección del cono hasta el diámetro de la sección paralela a la sección común del plano que corta y la base del cono; tendrá su cuadrado igual al rectángulo limitado por la porción de diámetro que comprende en la dirección del vértice de la sección y por otra línea recta; ésta línea recta tendrá la misma razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección como el cuadrado de la base del triángulo axial al rectángulo limitado por los dos lados restantes del triángulo. Sea ésta sección llamada parábola."

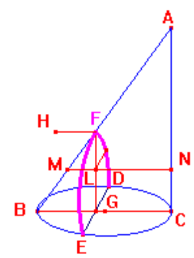

Figura 2. Sección Parábola en Apolonio

Esta proposición comienza construyendo el triángulo axial, después se corta al cono con un plano de tal forma que cumpla:

1. La intersección entre el plano de la sección y la base del cono debe ser perpendicular a un diámetro de la base del cono, pero no a cualquiera, sino específicamente al diámetro que al mismo tiempo es un lado del triángulo axial.
2. El diámetro de la sección resultante sea paralelo a uno de los lados del triángulo axial, diferente al que está sobre la base.

Además, cualquier línea recta trazada desde la sección hasta el diámetro de la misma debe cumplir:

1. Paralelismo con la intersección entre el plano de la sección y la base del cono.
2. Su cuadrado será igual al rectángulo cuyos lados son la línea recta comprendida entre el vértice de la sección y la intersección de está con el diámetro de la sección; y una línea recta dada:

cuadrado de KL = rectángulo HF, FL.

Pero FH que es la línea recta dada, debe estar en la misma razón con la línea recta que va desde el vértice de la sección hasta el vértice del cono, que como el cuadrado del lado del triángulo axial que está en la base del cono está en razón con el rectángulo formado por los otros dos lados:

FH : FA : : cuadrado de BC : rectángulo BA, AC.

De igual manera, así como se realiza el tratamiento sobre la parábola, Apolonio analiza y estudia las características de la Elipse en la proposición 13 de su primer libro.

> *"Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y éste también es cortado por otro plano encontrando ambos lados del triángulo axial, y extendido no es paralelo a la base ni tampoco está ubicado de manera subcontraria, y si el plano de la base del cono está; y el plano que corta, encuentra una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial o a su prolongación, entonces cualquier línea recta trazada desde la sección del cono al diámetro de la sección paralela a la sección común de los planos, tendrá su cuadrado igual al área aplicada a una línea recta que al diámetro de la sección tendrá la razón que el cuadrado sobre la línea recta trazada desde el vértice del cono a la base del triángulo paralela al diámetro de la sección tiene al rectángulo contenido por las intersecciones de éstas líneas rectas (sobre la base) de los lados del triángulo, en área teniendo como ancho la línea recta que corta más allá sobre el diámetro desde el vértice de la sección por la línea recta desde la sección al diámetro, y deficiente por una figura semejante y similarmente situada al rectángulo contenido por el diámetro y el parámetro. Sea ésta sección llamada elipse."*

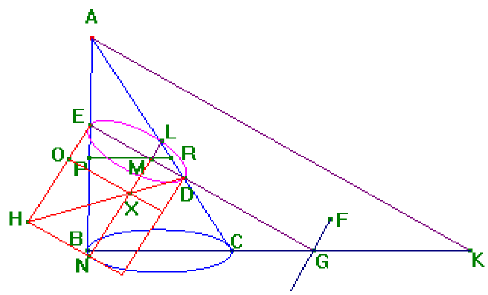

Figura 3. Sección elipse en Apolonio

Teniendo en cuenta esta definición de elipse, Apolonio, en su proposición 45 del libro III, establece nuevas relaciones geométricas sobre las secciones cónicas, que no están presentes en las definiciones:

> *"Si en una hipérbola o elipse o circunferencia de un círculo o secciones opuestas, líneas rectas son trazadas desde los vértices de los ejes en ángulos rectos, y un rectángulo igual a la cuarta parte de la figura es*

aplicado al eje sobre cada lado y excediendo por una figura cuadrada en el caso de la hipérbola y secciones opuestas, pero deficiente en el caso de la elipse, y alguna línea recta es trazada tangente a la sección, encontrando las líneas rectas perpendiculares, entonces las líneas rectas trazadas desde los puntos de encuentro hasta los puntos de aplicación formaran ángulos rectos sobre estos puntos"

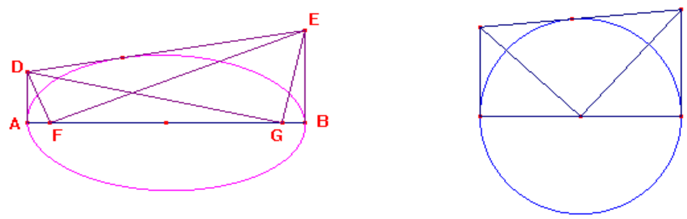

Figura 4. Focos o puntos de aplicación en Apolonio

Como plantea el autor traductor del texto Cónicas, "Los puntos de aplicación son en terminología moderna los focos de las cónicas", que según Apolonio se construyen por relaciones puramente geométricas que tienen que ver directamente con las secciones cónicas, reconociendo que se deducen a partir del uso y composición de las propiedades generales de las cónicas, sin importar su posición, como los segmentos que van desde las intersecciones entre la tangente a la sección y las perpendiculares sobre los vértices del eje a cada punto de aplicación forman ángulo recto sobre el punto de afore.Teniendo en cuenta la proposición 31-III de Los Elementos, si formamos un círculo cuyo diámetro es el segmento tangente a la sección que esta entre las perpendiculares, éste cortará al eje en dos puntos, que son los puntos de aplicación, puesto que ellos forman ángulos rectos en la unión de los vértices del diámetro del círculo con los puntos de afore, pues el "ángulo en el semicírculo es recto"; por tanto los puntos de aplicación o focos se constituyen como los puntos de intersección de la circunferencia del círculo que tiene como diámetro el segmento tangente y el eje de la sección cónica.

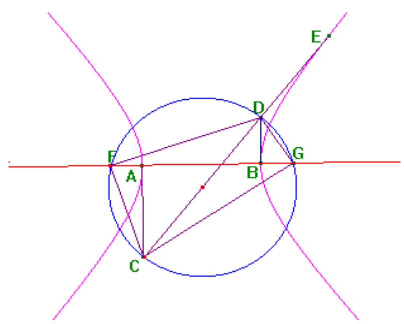

Figura 5. Focos en la Hipérbola para Apolonio

Apolonio se refiere a los puntos de aplicación del círculo (donde los dos focos coinciden con el centro del círculo por sus propiedades geométricas), elipse, hipérbola y secciones opuestas; pero no concluye la misma relación para la parábola, pues en ésta únicamente se puede obtener un vértice y de esta manera no se puede realizar la construcción geométrica que se propone en el libro tercero; esto nos lleva a pensar sobre el procedimiento que se debe seguir en esta sección para encontrar su punto de aplicación, y para ello, utilizamos la relación que se utiliza en la Elipse, con el fin de concluir el uso que se le puede hacer en la parábola[1].

De esta manera, a partir de la proposición 45 del libro III se puede establecer por la construcción anterior de la elipse que:

Rectángulo AF, FB = ¼ AB x R. (R:= lado recto).

Y como FB = AB – AF.

Se tiene que:

$$\frac{AF}{\frac{1}{4}R} = \frac{AB}{AB - AF}$$

y la razón $\frac{AB}{AB - AF}$ se puede analizar desde el punto de vista euclideano; así, para el caso de la parábola:

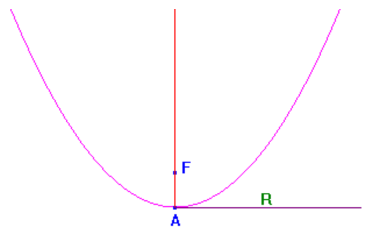

Figura 6. Ejes, diámetros y lado recto en la Parábola

Se tiene que el eje de la sección es la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ y AB – AF es también una semirrecta, que se puede notar como $\overrightarrow{FB}$. De este modo, la razón $\frac{AB}{AB - AF}$ representa la comparación

[1] El presente tratamiento de las secciones cónicas en Apolonio, fue realizado por Forero A. y Morales J. (2012) en la presentación: Desarrollo epistemológico de las Cónicas en el marco del Cuarto Congreso sobre la enseñanza y aplicación de las matemáticas: Bachillerato, Superior y Posgrado.

entre los tamaños de dos semirrectas, que desde un punto de vista euclideanocorresponden a la razón 1 a 1,

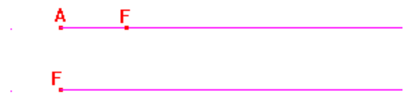

Figura 7. Ejes, diámetros y lado recto en la Parábola

De este modo, la razón $\frac{AF}{\frac{1}{4}R}$ es también 1 a 1. Por lo tanto:

$$AF = \frac{1}{4}R$$

Así el foco o punto de aplicación de la parábola, se ubica sobre el eje, de tal modo que desde el vértice su medida sea igual a la cuarta parte del lado recto de la sección.

En la antigüedad,los problemas geométricos se pueden categorizar en problemas planos, sólidos y lineales, diferenciados por que en unos se requiere solo de regla y compás para su construcción, en los sólidos aparte de líneas y circunferencias se requiere de alguna cónica y en los lineales, se requiere de otras líneas compuestas,así la caracterización de las curvas en Apolonio se fundamenta enlas condiciones necesarias que definenlas diferentes secciones que se obtienen al cortar un cono por un plano de diferentes formas, admitiendo la construcción en acto.

Pero el trabajo de Apolonio no se limita a la definición de la sección, sino que además le impone rigor demostrativo a las propiedades que se obtienen en los cortes de los planos al cono a través de la razón y la proporción; así, establece una doble visión de cada sección cónica, una por su caracterización del corte al cono y otra por sus condiciones, desde la razón y la proporción entre diámetros y parámetros. En este sentido, se puede decir que Apolonio logró obtener muy buenos avances en la determinación de propiedades frente a las secciones cónicas; para Molland (1976), Apolonio presenta las secciones cónicas a través de sus propiedades planimétricas, que muestra una forma de leer la geometría de coordenadas en los trabajos de la antigüedad, en esta parte el autor declara que el método cartesiano tiene firmes raíces en la antigüedad.

Aproximación a la Noción de Curva en Descartes

La visión cartesiana de línea curva permite distinguir una estrecha relación entre el tipo de curva y la instrumentalización mecánica que permite obtenerla, pues para él, las curvas construibles con regla y compás también son mecánicas. La discusión entre cuáles construcciones, geométricas o instrumentales, son formalmente aceptadas, por su precisión y exactitud, estableció un objetivo primordial para la geometría, determinar la medida de los cuerpos.

Una interpretación epistemológica de las líneas curvas, permite caracterizarlas por génesis o por propiedades, la primera se refiere a los métodos de construcción (sean geométricos o no) que se requieren para obtenerla, la segunda se refiere a las condiciones que la definen, los parámetros o relaciones que permiten deducirla. En este sentido, Descartes distingue a las líneas curvas por medio de relaciones entre líneas rectas (segmentos, en el caso) dadas, a través de expresiones simbólicas.

Un avance fundamental de Descartes se dió en cuanto a la obtención de operaciones fundamentales entre segmentos, le permitió por ejemplo tener un segmento de línea como producto de otros dos, a través de la comprensión de la razón y la proporción. Descartes(traducido al inglés por Eugene Smith, 1954), define el producto y la división de la siguiente forma: "la multiplicación: Sea, por ejemplo, AB la unidad y que sea preciso multiplicar BC por BD: solamente debo unir los puntos A y C, trazando DE paralela a CA, siendo BE el resultado de esta multiplicación. " y "La división: Si se requiere dividir BE por BD, Se puede unir E con D y trazar AC paralela a DE, entonces BC es el resultado de la división" que se pueden describir a partir de las siguientes proporciones: para la multiplicación: AB : BC = BD : BE y para la división: BE : BD = BC : AB.

Este suceso, entre otros, fue fundamental para el trabajo sobre la interpretación de las representaciones simbólicas de curvas, cono afirma (A.G. Molland, 1976), se establece una analogía entre las operaciones con lineas rectas (o, en terminología, segmentos de línea) y las operaciones con números.

El espacio propicio donde Descartes puede tratar su método de resolución de situaciones geométricas es en el problema de Pappus (ver figura 8), el proceso se basa en representar todas la líneas presentes en el problema (que expresan las longitudes desde el punto C dado) a partir de las líneas AB y CD dadas, que él denota por x, y. Entonces las expresiones para las longitudes desde el punto C serán de primer grado en x, y, pues, como las lineas dadas cortan a AB en los puntos A, E y G, y cortan a BC en los puntos R, S y T y la razón AB:BR=z:b es dada, entonces, por ejemplo, se tiene que RB= bx/c y CR=y+bx/z.

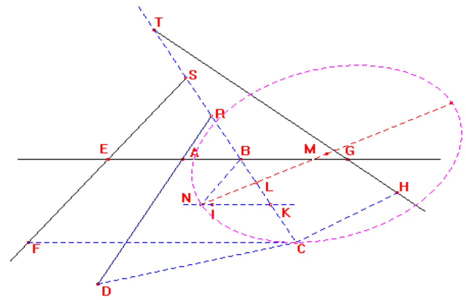

Figura 8. El problema de Pappus en Descartes. La Elipse

Descartes realiza una clasificación de las líneas curvas a partir del grado de la ecuación obtenida, por ejemplo, el lugar geométrico para cuatro líneas en el problema de Pappus es una ecuación de segundo grado.

Para distinguir el problema de las cuatro líneas, Descartes logra hacer una caracterización de las secciones cónicas a partir de líneas dadas, como es el caso del lado recto. De esta forma su caracterización tiene en cuenta varios de los resultados que obtiene Apolonio en su determinación de la sección a partir de los conceptos de razón y proporción. Entonces, analizando el caso de la elipse, a partir de la proposición 13 del primer libro de Apolonio, que se define por medio de la proporcionalidad geométrica, Descartes comienza el proceso geométrico-algebraico de interpretar la elipse por medio de una expresión algebraica y establece las características necesarias de las secciones cónicas (lado recto, diámetro y ordenada), para así tratar el segundo problema del primer libro de Apolonio[2].

> *Proposición 56 – I: Dadas dos líneas rectas perpendiculares una a la otra, encontrando una de estas como diámetro y en el mismo plano con las dos líneas la sección de un cono llamada Elipse, cuyo vértice será el punto en el ángulo recto, de modo que la línea recta que incide de manera ordenada desde la sección al diámetro a un ángulo dado, sea igual en cuadrado al rectángulo aplicado a la otra línea recta, teniendo como ancho la parte del diámetro entre el vértice y el punto de incidencia y en defecto por una figura semejante al rectángulo contenido por las líneas rectas dadas.*

[2] El desarrollo algebraico que se establece en este escrito para poder llegar a las expresiones generales para la Elipse y la Hipérbola no se hace en el texto de La Geometría, por eso todo el proceso que se hace, teniendo en cuenta los valores establecidos por Descartes es realizado por los autores del presente trabajo.

De esta manera siendo LC la recta ubicada de manera ordenada al diámetro, M el punto medio de la elipse, el diámetro igual a:

$$\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2}+\frac{4a^2m^3}{pz^2}}=\frac{am}{pz}\sqrt{o^2+4mp}$$

y el lado recto igual a:

$$\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}+\frac{4mpz^2}{a^2}}=\frac{z}{a}\sqrt{o^2+4mp}$$

debe establecerse la siguiente igualdad (teniendo en cuenta el problema 56):

$$LC^2 = LN \,.\, R - E.$$

De tal manera que E se puede encontrar a partir de la siguiente proporción:

$$\frac{E}{LN^2}=\frac{R}{D} \qquad (1)$$

Así LN = MN – MI + LI, con $MI=\frac{aom}{2pz}$, determina que LN es igual a:

$$\frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4pm}+\frac{a}{z}x-\frac{aom}{2pz}$$

a partir de esto podemos obtener que LN . R es equivalente a:

$$\frac{o^2m}{2p}+2m^2+x\sqrt{o^2+4pm}-\frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4pm}$$

y teniendo en cuenta la igualdad descrita en (1), se puede determinar la expresión que representa el defecto que establece Apolonio en el segundo problema de su primer libro. Esto significa algebraicamente

$$E=\frac{LN^2}{a^2m}pz^2$$

Así se puede determinar que el área E es igual a:

$$\frac{o^2m}{2p} + m^2 - \frac{om}{2p}\sqrt{o^2 + 4pm} + x\sqrt{o^2 + 4pm} - ox + \frac{p}{m}x^2$$

Por consiguiente, de la proposición 56-I de Apolonio se tiene que:

$$LC^2 = LN * R - E$$

se puede determinar finalmente que:

$$LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Que finalmente es la expresión que Descartes describe para la sección cónica Elipse, cuya ordenada es la línea recta LC, con el eje ubicado sobre la línea LN y con el punto medio de la elipse M.

Descartes no culmina su presentación en este lugar, el desarrollo que realiza sobre el problema de Pappus para cuatro rectas le permite darse cuenta del problema en general, es decir, ¿qué tipo de curvas sirven como solución para el problema de Pappus cuando intervienen n rectas? para responder a esta cuestión, Descartes realiza una clasificación de las soluciones, que Boss(1989) resume de la siguiente manera:

- 3, 4, 5 lineas, pero no 5 líneas paralelas: la ecuación es de grado $\leq$ 2 y por lo tanto los puntos sobre los lugares pueden ser construídos con regla y compás.

- 5 líneas paralelas, 6, 7, 8 o 9 líneas, pero no 9 líneas paralelas: La ecuación em x (o para 5 líneas paralelas en y) es de grado $\leq$ 4 y así los puntos sobre los lugares pueden ser construídos por médio de intersecciones entre cónicas; en algunos casos, construcción por regla y compás solo puede ser posible (a saber si las ecuaciones pasan a ser de grado $\leq$ 2 o si ellas son reducibles a tales ecuaciones).

- 9 líneas paralelas, 10, 11, 12, 13, líneas pero no 13 líneas paralelas: La ecuación em x (o em y em el caso de 9 líneas paralelas) es de grado $\leq$ 6; la construcción por médio de intersección entre secciones cónicas en general no será posible y curvas más complicadas tendrán que ser usadas.etc

El tratamiento cartesiano del problema de Pappus le permite tener un desarrollo que reestructura las construcciones sobre ecuaciones algebraicas que se tenian hasta este momento, además contribuye en la fundamentación de un método geométrico-algebraico para la comprensión, interpretación y solución de problemas geométricos.

Reflexiones Finales

En principio, Según BL Van Der Waerden (A History of Algebra) el método de coordenadas había sido ya utilizado por Apolonio en su "Cónica", en este trabajo un punto variable de una sección cónica es determinado por dos líneas segmentos, comúnmente llamadas "abcisa" y "ordenada". En Apolonio se pueden también distinguir definiciones por propiedades para cada una de sus secciones cónicas, para el caso de la parábola, dado su diámetro (PM) y el correspondiente lado recto (PL); entonces para cualquier ordenada QV al diámetro PM, el cuadrado sobre QV es igual al rectángulo formado por PV y PL. Cualquier sección con esta propiedad es una parábola para Apolonio. Se puede entender entonces, desde esta propiedad planimétrica (que también se mostró para la elipse y se establece para la hipérbola) como la lectura de coordenadas geométricas se presentaba en la geometría antigua, declarando que el método cartesiano tiene claramente sustento en raíces antiguas.

Así mismo tomando las Secciones cónicas como curvas geométricas, se puede vislumbrar su trascendencia desde la antigüedad hasta los comienzos de la geometría analítica. En la antigüedad, la geometría se podía enmarcar dentro de tres problemas; planos, sólidos y lineales, en cuanto a su construcción se podían clasificar en mecánicas y geométricas, donde las primeras se distinguían por ser dibujadas mediante algún instrumento mecánico, en donde las secciones cónicas se encontraban dentro de las geométricas; debido a esta clasificación fueron bastante discutidas, porque para Descartes las geométricas también podrían ser mecánicas al ser construibles con compás, que puede ser visto como un instrumento mecánico. Finalmente con las investigaciones y trabajos de Fermat y Descartes se pudo llegar a una clasificación para las curvas que se sustentara a partir de expresiones simbólicas asociadas; ambos autores, por diferentes medios llegaron a que cada ecuación cuadrática en X y Y representa una línea recta o una sección cónica y Descartes afirmó que estas pertenecían a las de primer tipo y así sucesivamente según el grado de la ecuación.

El gran avance de Descartes frente a la caracterización de curvas se presentó en el desarrollo de situaciones mecánicas que determinaban curvas, para las cuáles él requería categorizarlas, como de primer orden, si representaban una ecuación cuyo grado no era mayor al de un rectángulo formado por dos líneas o el cuadrado de una línea (curva de primer orden o clase) o de una mayor grado. Por ejemplo, en un caso pretendía estudiar la siguiente curva:

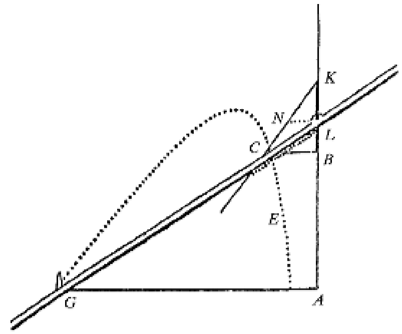

Figura 9. Construcción mecánica de la hipérbola en Descartes.

Descartes denota los segmentos fijos de la construcción, GA, KL y NL a partir de las letras a, b y c; haciendo uso de las relaciones de semejanza que se encuentran invariantes en la construcción, Descartes caracteriza la curva a partir de la siguiente ecuación:

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$$

De esta ecuación, Descartes afirma que la curva EC es de primera clase, siendo, en efecto, una hipérbola.

Apolonio establece perspectivas genéticas y por propiedades para la definición de las secciones cónicas, su trabajo permite distinguir las propiedades que van a tener las secciones que se forman al cortar un cono por un plano de diferentes formas. Aunque Descartes no desconoce estas perspectivas y reconoce las propiedades geométricas determinadas en cada sección, si hace uso de una instrumentalización mecánica para su caracterización. En términos cartesianos las curvas pueden ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos de varias líneas, cada uno siendo determinado por el anterior, lo que determina que en Descartes una curva puede ser constituida por una variación, mientras que en Apolonio la curva se construye por un corte en un cono.

Después de haber observado y analizado el desarrollo de las secciones cónicas, se puede notar la base geométrica fundamental para que autores como Nemecmo, Euclides y Apolonio construyeran las relaciones de proporcionalidad que se producen en cada una de las secciones del cono. Así mismo, para llegar al estudio de los lugares geométricos en la Geometría Analítica, también es clara la necesidad de involucrar la geometría de Apolonio para poder llegar a tratar las secciones en el plano y como una ecuación que relaciona las variables X y Y, puesto que para Fermat y Descartes habría sido más complicada la abstracción de las ecuaciones de segundo grado como secciones cónicas, si no hubieran tenido el apoyo de las proposiciones 12, 13 y 14 del libro I de Apolonio y tres de los problemas del mismo libro, aspectos claves que mediante la razón y la proporción permitieron la realización de una visión más profunda de la hipérbola, la parábola y la elipse, como ecuaciones representables en un plano de “abcisa” y “ordenada” (Forero, A. y Morales, J. 2012).

Teniendo en cuenta los diferentes análisis y tratamientos que hace Descartes sobre las lineas curvas y su interés por posicionar a este concepto como su punto principal de estudio en el texto de La Geometrie, es posible interpretar un métodopara la interpretación de problemas geométricos y específicamente para la determinación de soluciones para ecuaciones polinómicas de grado n. La propuesta de un tratamiento a partir de ecuaciones para los problemas geométricos se refuerza con la construcción de curvas algebraicas asociadas a tales ecuaciones que van más allá de las soluciones construidas con regla y compás y posibilita la construcción de diversos instrumentos que permiten establecer la relación entre el tipo de soluciones y las curvas necesarias para su determinación, lo que culmina en la relación directa existente entre la resolución del problema geométrico y la construcción de la curva asociada.

Bibliografía

APOLONIO DE PERGA. (1970) *Las Cónicas* (en *Científicos griegos*, Introducción y notas de F.Vera, Aguilar, Madrid).

B.L. VAN DER WAERDEN. (1985). A History of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag.

BOS, H. J. M. (1981) On the representation of curves in Descartes Geometrie. Vol 24. pp 295- 338. Archive forHistory of ExactSciences.

CAMPOS, A. Acerca de la Epistemología de la Matemática. 2000. Universidad Nacional de Colombia.

DENNIS, DAVID. (1997). Rene Descartes, Curve-DrawingDevices: Experiments in therelationsbetweenmechanicalmotion and symboliclanguage.EUCLIDES: (1996). *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. 3 vols. Gredos, Madrid.

FORERO, A., MORALES, J. (2012). Desarrollo epistemológico de las Cónicas. Cuarto Congreso sobre la enseñanza y aplicación de las matemáticas: Bachillerato, Superior y Posgrado.

MOLLAND, A.G. (1976). Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry. Historia Matemática 3. University of Aberdeen.

Ilustrações – Figuras

Figura 1:author's collection
Figura 2: author's collection
Figura 3:author's collection
Figura 4: author's collection

Figura 5: author's collection
Figura 6:author's collection
Figura 7: author's collection
Figura 8: author's collection
Figura 9: Tomada de Rene Descartes' Curve-Drawing Devices

Alberto Forero Poveda
E-mail: alforerop@udistrital.edu.co

Jhon Helver Bello Chávez
E-mail:albertoforero84@hotmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas –
UD – Bogotá - Colombia