Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 nº 28 - pág. 25-46
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

DA INTUIÇÃO À AXIOMATIZAÇÃO DA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DIACRÔNICA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS CARDINAIS E ORDINAIS

Renata Cristina Geromel Meneghetti
Universidade de São Paulo – USP – Brasil

(aceito para publicação em abril de 2014)

Resumo

Na versão acadêmica difundida da Teoria dos Conjuntos, os números cardinais e ordinais são distintos apenas para conjuntos infinitos. Isto significa que os cardinais e os ordinais, no caso finito são os mesmos, ou seja, não se distinguem enquanto objetos matemáticos formais. Entretanto, no sistema de ensino da Educação Básica, tradicionalmente números cardinais e ordinais são concebidos como distintos. Do ponto de vista da Teoria da Transposição Didática, isso caracteriza um problema de legitimidade epistemológica. Uma análise sincrônica da Transposição Didática dos cardinais e ordinais, foco de uma pesquisa anterior, levou a um questionamento sobre a constituição do conhecimento matemático. Neste trabalho proponho investigar esta questão efetuando uma análise diacrônica da Transposição Didática dos cardinais e ordinais. Para tal, será percorrida a evolução da Teoria dos Conjuntos, com início em Cantor até a sua formalização dedutiva. Com essa nova análise buscou-se compreender como os cardinais e ordinais foram se constituindo enquanto conceitos matemáticos acadêmicos que compõem a versão usual de Teoria dos Conjuntos. Esta pesquisa lança luz sobre o movimento do desenvolvimento histórico da Matemática em que a intuição é abandonada a favor do formalismo que passou a imperar nessa Ciência.

Palavras-chave: Transposição Didática, Análise Diacrônica, Intuição, axiomatização, Cardinais e Ordinais.

[FROM INTUITION TO AXIOMATIZATION OF MATHEMATICS: A DIACHRONIC ANALYSIS OF THE DIDACTIC TRANSPOSITION OF CARDINALS AND ORDINALS]

Abstract

According to the most popular version of the Set Theory, cardinal and ordinal numbers are distinct only for infinite sets, i.e. finite cardinals and finite ordinals are the same Mathematical objects. However, elementary and high school educational systems have traditionally taught cardinal and ordinal numbers as distinct conceptions. From the point of view of the theory of didactical transposition, this characterizes an epistemological problem of legitimacy. A synchronic analysis of the didactic transposition, focus of previous research, has led to questions about the constitution of mathematics knowledge. This paper addresses this issue by means of a diachronic analysis of the didactic transposition of cardinals and ordinals, covering the development of the Set Theory, from Cantor up to its deductive formalization. The analysis aims at understanding how the cardinals and ordinals were formed as academic mathematical concepts of the usual version of the Set Theory. This research sheds light on the movement of the historical development of mathematics in which the intuition is abandoned in favor of the formalism which now prevails in this science.

Keywords: Didactic Transposition, Diachronic Analysis, Intuition, Axiomatization, Cardinals and Ordinals.

Introdução

"*Números Cardinais*" e "*Números Ordinais*" são temas abordados nos primeiros anos do Ensino Fundamental, em geral, quando se introduz o conceito número. Em tais anos, esses temas aparecem em atividades de classificação e sequência e são concebidos como assuntos que conduzirão o aprendiz ao conceito de número (SÃO PAULO, 1992). Desta forma, os conceitos de cardinais e ordinais são abordados quando se introduz o conceito de número, tendo, portanto, referência os números naturais finitos. Nessas séries, os cardinais são usados para indicar quantidades e os ordinais para indicar posição, tal como posto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> *Com relação ao número, de forma bastante simples, pode-se dizer que é um indicador de quantidade (aspecto cardinal) que permite evocá-la mentalmente sem que ela esteja fisicamente presente. É também um indicador de posição (aspecto ordinal), que possibilita guardar o lugar ocupado por um objeto, pessoa ou acontecimento numa listagem, sem ter que memorizar essa lista integralmente.* (BRASIL, 1997, p. 67).

Os números cardinais e ordinais também são registrados como noções de senso comum: um "*cardinal (number) is a number which represents amount, such as 1, 2, 3, rather than order, such as 1st, 2nd, 3rd*" (PROCTER, 1995, p.195); an "*ordinal (number) is a number like 1st, 2nd, 3rd, 4th, which shows the position of something in a list of items*" (Ibid.). Em ambos os casos é comum a crença de que cardinais e ordinais são conceitos distintos.

No entanto, se voltarmos nossa atenção à Matemática estudada no nível superior, ou seja, a matemática acadêmica, e pedirmos referências sobre cardinais e ordinais, em geral, seremos remetidos à Teoria dos Conjuntos na versão de Zermelo-Fraenkel, forma padrão da teoria axiomática dos conjuntos sendo "[...] *amplamente aceita pelos especialistas da Teoria dos Conjuntos.*" (FERREIRA, 1998, p.30). Nessa versão os números cardinais e ordinais são distintos apenas quando para conjuntos infinitos, ou seja, em tal teoria, no caso de conjuntos finitos, cardinais e ordinais se identificam.

> [...] *um número cardinal é um número ordinal α tal que se β é um número ordinal equivalente a α (isto é, card α = card β), então $\alpha \leq \beta$* [...]. *Se X é um conjunto, então card X, o número cardinal de X (também conhecido como potência de X), é o menor número ordinal equivalente a X.* (HALMOS, 1960, p.109).

> *Um número ordinal finito (isto é, um número natural) não é equivalente a nenhum número ordinal finito distinto de si próprio. Segue que se X é finito, então o conjunto dos números ordinais equivalentes a X é um conjunto unitário, e, consequentemente, o número cardinal de X é o mesmo que o número ordinal de X.* (HALMOS, 1960, p.109).

Tal fato deu origem à seguinte pergunta: *"Como justificar que no Ensino Fundamental os cardinais e os ordinais são conceitos distintos enquanto na matemática acadêmica, para o caso finito, essses conceitos são identicos?"*

Isso nos remete à teoria transposição da didática, a qual se constitui pelo trabalho de fabricação do saber ensinado a partir do saber erudito (CHEVALLARD, 1989). Segundo este autor, o saber ensinado deve procurar satisfazer dois tipos de legitimidade: a *legitimidade educativa* e a *legitimidade epistemológica* (CHEVALLARD, 1989, p. 63). A legitimidade educativa diz respeito aos anseios sociais e a epistemológica refere-se a uma garantia científica.

Do ponto de vista desta toeria, a questão acima se caracteriza como um problema de legitimidade epistemológica sobre o ensino de cardinais e ordinais, já que a forma como esses conceitos são abordados na Educação Básica não possui uma referência científica.

Disso surgiram os seguintes questionamentos: Qual é a relação entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica quando nos referimos aos números cardinais e ordinais?

Por que o conhecimento matemático do Ensino Fundamental é contraditório com o conhecimento matemático acadêmico?

Meneghetti (1995; 1999), por meio de uma análise sincrônica da transposição didática dos cardinais e ordinais, buscou responder a essas questões observando três níveis de ensino: fundamental, médio e superior (graduação).

A seguir, retomarei e apresentarei os principais resultados da análise sincrônica realizada na pesquisa de Meneghetti (1995; 1999). Na sequência, destacarei novos questionamentos que surgiram e que apontaram para a necessidade de se analisar historicamente a evolução Matemática dos conceitos de cardinalidade e ordinalidade, que é o objetivo deste artigo.

Sobre a Teoria da Transposição Didática

De acordo com a Teoria da Transposição Didática, até chegar à escola e adquirir condições de ser ensinado, o conhecimento passa por um processo de transformação e adaptação. Chevallard (1991) denomina Transposição Didática latu sensu como sendo o processo que segue as seguintes etapas:

[1] objeto de conhecimento $\rightarrow$ [2] objeto a ser ensinado $\rightarrow$ [3] objeto de ensino

O objeto de conhecimento [1] refere-se ao conhecimento acadêmico, ou seja, aquele que é produzido e reconhecido por uma comunidade científica. Esse tipo de saber pode ser apresentado através de artigos, teses, livros ou relatórios científicos. Referimo-nos à comunidade matemática, a fim de discutir questões de legitimidade do conhecimento.

O objeto a ser ensinado ou saber escolar [2] representa o conjunto de conteúdos previstos na estrutura curricular das várias disciplinas escolares. É possível encontrar esse tipo de saber nos livros didáticos, programas curriculares, entre outros materiais.

Já o objeto de ensino ou saber ensinado [3] é o que, de fato, é ensinado na sala de aula, podendo ser encontrado, por exemplo, no plano de aula do professor. Tal saber, muitas vezes, não coincide com a intenção prevista nos objetivos programados.

De acordo com Chevallard (1989, p.63), o conhecimento ensinado deve satisfazer dois tipos de legitimidade: a educacional e a epistemológica. A legitimidade educacional refere-se a expectativas sociais, enquanto a legitimidade epistemológica refere-se a garantias científicas. "*A palavra transposição não foi escolhida aleatoriamente, porque não existe, por exemplo, simples transferência, sem alteração. Em cada momento 'deformações' mais ou menos fortes aparecem nos elementos estruturais transpostos*." (Chevallard, 1989, p.40-41, tradução minha).

Para Arsac (1992) a Teoria da Transposição Didática deve se preocupar em investigar como o conhecimento é legitimado e também analisar rupturas entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento ensinado.

De acordo com esse autor, a separação entre conteúdo do ensino e conhecimento acadêmico ocorre devido a certas restrições que pesam sobre o sistema de ensino. Os conhecimentos ensinados devem satisfazer, simultaneamente, os anseios da esfera social e da erudita.

Ao apresentar a Teoria da Transposição Didática, Chevallard recorre a uma metáfora ecológica, em que haveria três ecossistemas envolvidos na transposição didática de qualquer conhecimento: a esfera acadêmica, o sistema de ensino e a noosfera (CHEVALLARD, 1989). A esfera acadêmica é formada por pessoas que trabalham em instituições e que são oficialmente encarregadas da produção e controle do conhecimento. O sistema de ensino é definido por sua função de transmissão de conhecimento em todos os níveis; é o ambiente no qual ocorre a relação professor-aluno-aprendizagem. A noosfera designa todas as pessoas ou instituições que, de alguma forma, estão envolvidas ou agem dentro do sistema de ensino, isto é, que pensam sobre o ensino e pensam o ensino, de maneira permanente ou ocasional. A noosfera é um ecossistema intermediário entre a esfera acadêmica e o sistema de ensino e é caracterizada por sua função no sistema de ensino.

O estudo da transposição didática pode ser realizado de duas maneiras: sincronicamente e diacronicamente. A análise diacrônica permite investigar o processo de transformação do conhecimento acadêmico em conhecimento ensinado ao longo da história, ou seja, como um resultado de transposição didática ao longo dos anos. A análise sincrônica considera o processo de transformação como está acontecendo no momento presente em todos os níveis do sistema escolar. Percorrendo os possíveis habitats dos cardinais e ordinais, desde as séries iniciais da educação básica até o ensino superior, Meneghetti (1995; 1999) realizou uma análise sincrônica de transposição didática de cardinais e ordinais, utilizando como elementos de coleta de dados: entrevistas com professores, observações de aulas, análise de diretrizes oficiais e programas de ensino e de livros didáticos.

Por meio dessa análise sincrônica, essa autora constatou que apesar do saber científico identificar os cardinais e os ordinais (para o caso de números finitos), a concepção dos cardinais e dos ordinais como conceitos distintos faz-se presente na Educação Básica, tanto no saber escolar (propostas curriculares oficiais e livros didáticos) quanto no saber ensinado (fato constatado por meio de observação em sala de aula). Com a análise sincrônica, ainda foi possível detectar como a contradição entre o saber científico dos cardinais e dos ordinais e os saberes, escolar e ensinado dos cardinais e ordinais é sustentada. A autora verificou que este fato ocorre, principalmente, devido à falta de familiaridade dos noosféricos com os saberes escolar e científico, concomitantemente, ou seja: há uma falta de familiaridade com a teroria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel (Halmos) (ZF-H) e com a Matemática superior daqueles encarregados do Ensino Fundamental e também uma falta de familiaridade entre o Ensino Fundamental dos responsáveis pela Matemática superior. A partir das entrevistas foi também possível constatar que há uma insatisfação dos entrevistados quando o problema de legitimidade é explicitado: 1) as pessoas esperam que o que eles ensinam tenha uma base na ciência, 2) depositários dessa expectativa se sentem desconfortáveis quando eles não podem fornecer imediatamente a garantia esperada.

Da análise sincrônica da transposição didática dos cardinais e ordinais, as seguintes questões se colocaram ainda mais fortemente: por que o saber científico dos cardinais e ordinais é contraditório com seu respectivo saber escolar? Isto sempre foi assim? O que está por detrás dessa contradição?

Compreender esse processo parece remeter-nos à compreensão de como os conceitos de cardinais e ordinais foram se constituindo ao longo da história e isso me conduziuà seguinte pergunta: o que levou a atual definição de cardinalidade e ordinalidade na esfera erudita? Foram esses os questionamentos que me levou a retomar o caso da transposição didática dos cardinais e ordinais através de uma análise diacrônica. Isso levou a uma investigação a respeito do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos: de Cantor a Von Neumann, o qual será apresentado no próximo item. Por meio deste percurso, nesta investigação, objetivou-se compreender como os conceitos de cardinais e ordinais foram se constituindo no decorrer da história da Matemática e com isso ampliar a análise da transposição didática dos cardinais e ordinais.

O início da Teoria dos Conjuntos

O início da Teoria dos Conjuntos é marcado pelos trabalhos de Cantor (1845-1918). Enquanto estudante em Berlim, Cantor foi influenciado pelo ensino de Weierstrass, seu professor, e um de seus primeiros trabalhos em Matemática foi particularmente com a teoria dos números irracionais, exposta no decorrer de suas investigações sobre séries trigonométricas. O trabalho com convergência e igualdade de séries trigonométricas levou-o à utilização de agregados infinitos, ou seja, conjuntos infinitos. Assim, ele passou a se preocupar em investigar a estrutura de tais agregados e os diferentes modos pelos quais as grandezas numéricas, finitas ou infinitas, podem se comportar. Embora a primeira publicação de Cantor sobre Teoria dos Conjuntos tenha ocorrido em 1874, foi durante o período de 1895-1897 que ele publicou no *Mathematische Annalen* dois importantes artigos nos quais ele apresentou suas investigações sobre os números cardinais e ordinais, entendidos como elementos associados a conjuntos. Nessas investigações, ele apresenta sua concepção de cardinais e ordinais para conjuntos finitos e infinitos.

Nesses artigos, Cantor definiu conjunto, número cardinal e número ordinal, respectivamente das seguintes formas:

Por um **conjunto** entendeu alguma coleção numa totalidade M de objetos separados e determinados m de nossa intuição ou nosso pensamento. Esses objetos são chamados elementos de M.

Por um **número cardinal** ou potência de um conjunto M dado, Cantor entendeu aquilo que obtemos quando abstraímos ao mesmo tempo a ordem e a natureza dos elementos de M.

Todo conjunto M tem um '**tipo ordinal**'[1], o qual é obtido de M a partir de uma única abstração: a da natureza de seus elementos. Assim, abstraímos a natureza dos elementos m, mas, conservamos a ordem de precedência entre eles.

Disso, percebe-se que em Cantor os cardinais e os ordinais são conceitualmente distintos. O que nos leva ao seguinte questionamento: em que momento na história isso foi modificado? .

Essa teoria, que se iniciou com Cantor, passou a ser conhecida como "*Teoria Intuitiva dos Conjuntos*", porque os conjuntos (agregados) nessa fase eram tratados de forma intuitiva "[...] *tomando-os como agregados arbitrários de elementos – mesmo que juntos de um modo intuitivamente artificial – que tanto podiam ser em número finito como em número infinito*" (FERREIRA, 1998, p.29).

Diante do problema apresentado sobre a transposição didática dos cardinais e ordinais, pode-se observar que através das origens da Teoria dos Conjuntos, especificamente com Cantor, seria possível legitimar os saberes escolar e ensinado dos cardinais e dos ordinais.

O fato é que essa teoria não predominou na Matemática, disto surge o seguinte questionamento: como ocorreu o processo de depuração de tais noções às formas Matemáticas?

Entende-se que tal processo ocorreu ao longo do século XX: teve seu início com Cantor, considerado o pai da Teoria dos Conjuntos, e se estendeu às definições de Zermello-Fraenkel (expostas em Halmos), comumentes adotadas pela comunidade científica da Matemática. Neste movimento da história, a distinção estabelecida por Cantor entre cardinais e ordinais não está presente em Halmos. Outras noções como *"faculdade ativa do pensamento"*, a *"abstração"*, a *"natureza"* e a *"intuição"* parece que foram sendo abandonadas. Meu propósito, neste trabalho, é procurar entender por que e em que momento isso ocorreu.

Assim, no que segue na busca de se compreender porque a Teoria Intuitiva dos Conjuntos não prevaleceu na Matemática, procuro apresentar alguns dos principais fatos da evolução da Teoria dos Conjuntos de Cantor à Von Neumann.

De Cantor a Von Neumann: trajetória histórica

Um fato histórico importante que começou no início do século XIX foi o movimento denominado "*Aritmetização da Análise*", marcado pela busca do estabelecimento de uma fundamentação rigorosa para a análise.

---

[1] No caso especial de conjuntos bem-ordenados, o tipo ordinal foi denominado de 'número ordinal'. Portanto, número ordinal é um caso particular de tipo ordinal, desta forma, todas as operações válidas para os tipos ordinais valem, em particular, para os números ordinais.

No início do século XIX, Cauchy colocou o cálculo em uma base essencialmente moderna. Ele, Abel (1802-1829) e Gauss (1777-1855) desenvolveram um tratamento rigoroso para as séries infinitas. Mais tarde, nesse mesmo século, Weierstrass (1815-1897) trabalhou em direção à "*Aritmetização da Análise*"; desprendendo-a do uso da intuição geométrica nas provas, que era prevalecente na época. Antes de Weierstrass, a introdução de número irracional foi, explícita ou implicitamente, geométrica e isso levava a um círculo vicioso: o número real era definido como limite de uma série convergente, no entanto, a definição de séries convergentes envolvia uma definição prévia do significado de número real. Neste sentido, como enfatiza Jordain (1955), havia um erro lógico nas introduções pré-weierstrassianas de números irracionais.

Paralelamente ao trabalho de Weierstrass, temos especialmente as contribuições de Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918). Dedekind apresentou uma fundamentação para os números reais, através dos conhecidos "*cortes de Dedekind*" no conjunto dos números racionais.[2] Cantor trabalhou na caracterização do tipo de ordem do sistema dos números reais por meio do princípio da separabilidade.[3] Ele criou uma *"*[...] *abordagem dos números irracionais, que utiliza sequências convergentes de números racionais"* (EVES, 1997, p.615). Esses trabalhos iniciais na "*aritmetização da análise*" convergiam para a noção de número, precisava-se então de uma boa definição de número. Os números complexos foram definidos como pares ordenados de números reais; estes últimos foram definidos em função dos números racionais, os quais foram definidos em termos de números inteiros. Os inteiros, por sua vez, foram definidos em termos de números naturais. Portanto, o conceito essencial de número real, fora reduzido, passo a passo, àquele de número natural.

Desse modo, precisava-se de uma definição precisa para os números naturais, tarefa que Frege se deteve em seu projeto logicista. Assim, a corrente filosófica da Matemática denominada de "*logicismo*", caracterizada pelo propósito de fundamentar a Matemática à lógica, tem seu início com o trabalho do matemático alemão Gottlob Frege (1848-1925), contemporâneo de Cantor, que criticou desse último o uso da intuição e buscou fundamentar a aritmética totalmente na lógica e, como consequência, desprezou o uso da intuição ou da experiência na Matemática. Aqui se percebe o início do abandono da intuição no processo de formalização da Matemática.

---

[2] Se dividirmos o conjunto de todos os números racionais em dois conjuntos parciais A e B, de modo que ambos contenham no mínimo um elemento e que cada $a \in$ A seja menor que cada $b \in$B, existirá sempre um e só um número real γ que separa os dois conjuntos e para o qual se verifica $a<\gamma<b$, para todo a $\in$ A e para todo b$\in$B. Este é o corte de Dedekind, que dá origem ao número γ. Em toda parte onde quer que cortamos o conjunto dos números racionais, encontramos os números reais.

[3] Se O é um conjunto simplesmente ordenado, então O é chamado separável se ele tem um subconjunto enumerável S tal que entre cada dois elementos de O existe um elemento de S; e S é chamado conjunto de separação enumerável de O. A existência de tal conjunto é designada de propriedade de separabilidade de O. No caso dos números reais, o conjunto dos números racionais positivos é o conjunto de separação enumerável de R^+ (conjunto dos números reais positivos).

O projeto logicista de Frege

Frege (1848-1925) pretendeu fundamentar a aritmética à lógica, iniciando seu projeto em 1879 com sua obra Begriffsschrift[4], desenvolvendo uma linguagem própria para a aritmética, a fim de unir lógica e Matemática. Com tal obra, a lógica do cálculo de proposições passou a ser constituída como uma linguagem simbólica que não necessitava ser suplementada por qualquer razão intuitiva. Assentadas as bases da nova lógica, Frege dedicou-se à tarefa de mostrar que as leis aritméticas fundamentam-se nas leis da lógica. O núcleo desse trabalho encontra-se em sua teoria de número, exposta em sua obra "*Os Fundamentos da Aritmética*"[5], na qual se preocupou principalmente em apresentar uma definição lógica para o conceito de número. Assim, o número foi concebido por Frege como um objeto lógico, ideal, não tendo existência espaço-temporal, cujo acesso se dá unicamente por meio da razão. Nesse contexto, refutou da aritmética, em particular do conceito de número, todo apelo aos aspectos intuitivo, empírico e psicológico.

Essa crítica também caiu sobre Cantor. De acordo com Frege, na teoria de Cantor, as noções matemáticas estão baseadas na intuição, sem intenção de fidelidade lógica, em suas palavras: "*Cantor apela antes a uma 'intuição interna' misteriosa*" (FREGE 1959; 1983, § 86).

Entretanto, embora Frege tenha dedicado quase toda a sua vida ao seu projeto logicista, ele não conseguiu atingir seu propósito. Em 1902, Russell mostrou, com o então famoso 'Paradoxo de Russell'[6], que o sistema apresentado por Frege era inconsistente. Como se não bastasse, na virada do século XIX para o XX, já haviam surgido outros paradoxos[7], colocando a Teoria dos Conjuntos e, consequentemente, toda a Matemática em crise.

---

[4] O nome completo dessa obra no original é: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (FREGE, 1971).

[5] Título no original: *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). É nessa obra que Frege apresenta uma definição lógica para o número cardinal.

[6] Eis o paradoxo que Russell apontou na teoria de Frege. Na teoria deste último, conceito admite extensão. A extensão do conceito é um objeto do qual posso perguntar se ele cai sob o conceito. Pode-se também perguntar se ele cai sob o conceito que lhe deu origem. Foi isso que originou o paradoxo de Russell, visto que, se admitirmos o conceito $x \notin x$, a extensão deste conceito é a classe $y = \{x; (x \notin x)\}$, i.e., a classe de tudo aquilo que não é membro de si próprio. Desde que y é um objeto, podemos perguntar se ele cai ou não sob o conceito $x \notin x$, i.e., $y \in y$ ou $y \notin y$. Mas, se $y \in y$ chega-se à conclusão de que $y \notin y$ e se $y \notin y$ obtemos que $y \in y$. Todavia, ambos os casos são contraditórios. Tal paradoxo põe em risco todo o trabalho de Frege, que, então, passa a buscar uma solução para o problema e, no entanto, não obtém sucesso.

[7] O primeiro paradoxo que surgiu consiste na suposição de que existe um conjunto que contém todos os números ordinais, o que leva à contradição. Tal antinomia foi descoberta pelo próprio Cantor e comunicada por ele a Hilbert, em uma carta de 1896 (hoje esse paradoxo é conhecido com o nome de Burali-Forti, que o descobriu independente e o publicou). O segundo paradoxo, conhecido como "paradoxo de Cantor", refere-se à cardinalidade da classe universal (ou seja, assumir a existência do conjunto de todos os conjuntos leva à contradição), esse apareceu numa carta de Cantor endereçada a Dedekind, em 1899. O Paradoxo de Russell, no entanto, foi o pior de todos, pois atingiu conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos, a saber, o próprio conceito de conjunto e o conceito de 'ser elemento de'.

Assim, no começo do século XX, havia grandes preocupações quanto a esses paradoxos e verificou-se que a maioria nascia de suposições básicas da Teoria dos Conjuntos; quando essa é entendida de maneira direta ou "*ingênua*". Como saída, a Teoria dos Conjuntos em seu estágio ingênuo é abandonada, tomando lugar o que foi denominado por 'Teoria dos Conjuntos Axiomatizada'.

No que segue apresento uma análise das soluções que se apresentaram à Teoria dos Conjuntos e à própria Matemática, buscando compreender o sistema de axiomas introduzido por Peano, o logicismo que se prosseguiu com Russell, o formalismo de Hilbert e o que foi proposto por Zermelo, Fraenkel e Von Neumann.

A escola de Peano

O trabalho de Peano (1858-1932) e seus colegas foi de um tipo ligeiramente diferente do de Frege. No lugar de tentar fundamentar a Matemática na lógica, eles buscaram expressar a Matemática de forma similar ao cálculo lógico; assim, buscaram enunciar os teoremas matemáticos por meio de um simbolismo lógico. Esse movimento pode ser caracterizado como a união da Matemática ao cálculo de lógica. Para tal propósito, esses matemáticos tiveram que abrir mão de outros princípios não lógicos, entre os quais a indução completa. Assim, em vez de tentar dar ao número natural significado tal como o incorporado na definição de Frege, i.e., reduzir o número à noção lógica de conjunto, Peano tratou a definição como indefinida e usou essencialmente o seguinte sistema de axiomas:

Dado um conjunto N de elementos indeterminados, chamados números, e uma relação binária indeterminada, *s*, entre números: x *s* y é lido "*x é sucessor de y*". Os axiomas são:

- 1 está contido em N, e 1 não é sucessor de nenhum elemento de N.
- Se $x \in N$, existe um único $y \in N$ tal que y *s* x; y é chamado o sucessor de x.
- Se y *s* x e y' s x' e y = y' então x = x'.
- (Princípio da indução Matemática) Se G é um subconjunto de N tal que: (i) $1 \in G$ e (ii) se $x \in G$ e y *s* x então $y \in G$; então G = N .

Assim, para Peano e seus seguidores, o uso do simbolismo lógico era considerado puramente um meio para um fim. A lógica para eles estava a serviço da Matemática e não poderia ser dispensanda. No sistema de Peano, a derivação de teoremas torna-se um processo algébrico, sendo utilizado somente símbolos e fórmulas: cada teorema é enunciado como uma fórmula simbólica. Este método de derivação de teoremas matemáticos como fórmulas simbólicas a partir de um conjunto inicial de axiomas, usando o que corresponde ao cálculo lógico pela derivação, encontra sua "*contrapartida*" no conhecido "*sistema formal*" da lógica Matemática moderna, na qual a Matemática é reduzida a um processo estritamente "*formal*", sem qualquer referência às interpretações reais dos símbolos envolvidos. (WILDER, 1965). O procedimento adotado por Peano e seus seguidores exerceu influência tanto na Matemática como na lógica e é ainda presente nos dias de hoje.

Os trabalhos enunciados por Frege e Peano influenciaram diretamente o *Principia Mathematica* de Russell (1872-1970) e Whitehead (1861-1947), cuja ideia principal foi de se identificar grande parte da Matemática com a lógica por meio da dedução do sistema dos números naturais, a partir de um conjunto de premissas da própria lógica (EVES, 1997). Este fato será abordado no tópico seguinte.

O logicismo de Russell

O logicismo teve sua continuidade com Russell, porém este adotou uma postura mais radical do que a de Frege: a de reduzir toda a Matemática à lógica. Russell adotou a posição de que o mundo existe independente de nossa percepção (RUSSELL, 1919).

Enquanto Frege concebeu a aritmética como se constituindo de conhecimentos puramente lógicos, excluindo todo apelo à intuição, Russell estendeu tal concepção para toda a Matemática. Para ele as verdades Matemáticas são verdades lógicas e, portanto, não dizem respeito ao conhecimento empírico e também não podem expressar conhecimento subjetivo.

O projeto de Russell foi esboçado em sua obra *The Principles of Mathematics* (1903), porém o empreendimento maior desse projeto se deu em colaboração com Whitehead, tornando-se o terceiro volume dos *Principia Mathematica* (1910-1913) (PM). No prefácio dos *Principles*, Russell esclarece que esta obra leva em consideração os resultados advindos da Teoria dos Conjuntos e a utilização da lógica simbólica:

> *Este trabalho* [...] *se originou da conjunção de dois estudos diferentes* [...]. *Por um lado temos os trabalhos dos analistas e geômetras, no modo de formulação e sistematização de seus axiomas e no trabalho de Cantor e outros em tais assuntos como a Teoria dos Conjuntos. Por outro lado temos a lógica simbólica, que, depois de um período necessário de crescimento, tem agora, graças a Peano e seus seguidores, adquirido a adaptabilidade técnica e compreensão lógica que são essenciais para um instrumento matemático que trata com o que até aqui tem sido o início da Matemática. A partir da combinação desses dois estudos, dois resultados emergem, a saber, (1) que o que foi formalmente tomado, tacitamente (implicitamente), ou explicitamente como axiomas são ou demonstráveis ou desnecessários; (2) que os mesmos métodos pelos quais os axiomas supostos são demonstráveis darão resultados valiosos em regiões tais como, número infinito, que tem sido formalmente relacionado como inacessível à mente humana. Portanto, o alcance da Matemática é alargado tanto pela adição de novos assuntos como por uma extensão retroativa em províncias (competências) até aqui*

> *abandonadas à Filosofia*. (RUSSELL, 1903, Prefácio, tradução minha, tradução minha).

Com tal "*extensão retroativa*" objetivava-se estabelecer um conjunto de axiomas "*primitivos*" de lógica para formar a base de toda a Matemática. Números, por exemplo, deveriam ser definidos como tendo significados únicos; "*1*" deveria emergir como o que ordinariamente se pensa como "*unidade*", e não meramente como um candidato ao elemento inicial de uma sequência, como postulado nos axiomas de Peano.

As verdades Matemáticas eram, portanto, concebidas como uma espécie de verdades lógicas ou analíticas e, por sua vez, essas últimas eram compreendidas como produtos de convenções linguísticas. A introdução da terminologia Matemática e seu uso em ciências empíricas deveriam, portanto, serem eliminadas.

Assim, Russell entendeu por investigação Matemática de estrutura uma investigação das consequências lógicas do conjunto de axiomas. Também assumiu que existem indivíduos básicos e, por consequência, proposições logicamente primitivas básicas que afirmam que uma dada relação vale entre indivíduos atômicos.

Dessa forma, o *Principia Mathematica* inicia com ideias e proposições primitivas (axiomas) e, a partir disso, os conceitos e os teoremas matemáticos são desenvolvidos, começando com o cálculo de proposições, passando pela teoria das classes e das relações, deduzindo os sistemas dos números naturais e, a partir disso, toda a Matemática que se baseia nesse sistema. (EVES, 1997).

Os paradoxos que haviam surgido antes envolviam um conjunto S e um membro m de S cuja definição depende de S. Definições dessa natureza são ditas impredicativas, pois levam a círculos viciosos. Russell evita as antinomias a fim de eliminar as definições impredicativas, para isso introduziu, como um princípio lógico adicional, o "*Princípio do Círculo Vicioso*", o qual estabelece que nenhuma entidade pode ser definida em termos de uma totalidade da qual ela é, por si mesma, um possível membro. É este princípio que permite o surgimento de uma hierarquia de tipos de objetos: 'a teoria dos tipos simples'. Com isso, todas as entidades na Teoria dos Conjuntos passam a ser distribuídas em uma hierarquia de níveis ou tipos, pertencendo cada entidade a apenas um tipo bem determinado.

A observância dessa regra evita definições impredicativas e, portanto, os paradoxos da Teoria dos Conjuntos[8]. Entretanto, a fim de obter as definições impredicativas necessárias para a construção da análise, Russell teve que postular um princípio não lógico, o "*axioma da redução".* Tal axioma afirma que toda função proposicional é formalmente equivalente a uma "*função predicativa*".[9]

O axioma da redução foi o meio empregado por Russell para separar totalmente o conhecimento matemático do mundo empírico ou intuitivo, pois tal axioma parece

---

[8] A essa atitude uma objeção é feita: há partes da matemática que envolvem definições impredicativas e que os matemáticos relutam em abandonar. Um exemplo de tal tipo de definição em matemática é a do Supremo de um conjunto não vazio de números reais: o supremo de um conjunto dado é o menor de seus limites superiores.

[9] Funções são chamadas "*formalmente equivalentes*" se forem verdadeiras ou falsas para os mesmos valores de suas variáveis.

manifestar a crença de que todas as descobertas, envolvendo expressões de objetos abstratos exibindo algum conteúdo empírico ou exprimindo algum conteúdo ingênuo, podem ser expressas novamente, reduzindo-se a linguagens que não contenham essas manifestações (TILES, 1991).

Entretanto, tal axioma, além de se tratar de uma suposição não lógica também se apresentou incompatível com o Princípio do Círculo Vicioso, pois sugere um retorno a alguma forma de platonismo. A posição platônica de que números, classes, conceitos e funções com uma existência independente de nós e de nossas atividades Matemáticas viola tal princípio. Esse foi, essencialmente, o argumento apresentado por Gödel (1944), apontando para impossibilidade do projeto logicista. Com isso, foi possível mostrar que o logicismo de Russell também não pode ser realizado.

Outra proposta para fundamentar a Matemática foi apresentada com o formalismo por Hilbert, como segue.

O formalismo

O formalismo advém do programa proposto por Hilbert (1862-1943), que entendeu o formalismo como uma forma de garantir a consistência nas investigações em Matemática. Ele acreditou que, analisando processos e conceitos matemáticos, lógicos ou não, e representando-os por um simbolismo apropriado, como uma lógica simbólica, poderia ser capaz de demonstrar que, a partir de fórmulas fundamentais e regras apoiadas pela manipulação de símbolos, nunca obteríamos uma fórmula que levasse a uma contradição. Assim, esse matemático concebeu que as coisas existem desde que novos conceitos e novas entidades possam ser definidos sem contradição. (HILBERT, 1927). Desse ponto de vista, a Matemática passou a ser concebida como uma construção puramente axiomatizada ou formal.

Propriamente, pode-se dizer que a formalização torna a Matemática uma coleção de fórmulas. Estas são distintas das fórmulas comuns somente pelo fato de que, junto com símbolos e sinais comuns, estão também símbolos da lógica, especialmente a implicação ($\rightarrow$) e a negação (~). Determinadas fórmulas, que servem como pedra para o edifício formal da Matemática, são chamadas *axiomas*. Uma *prova* é uma sequência de fórmulas F_1, F_2. . . , F_n, em que cada fórmula ou é um axioma ou provém de fórmulas que a precedam na sequência, por meio das regras de inferência. Uma prova é uma demonstração rigorosa de sua última fórmula (F_n). Uma fórmula diz-se *provável* ou um *teorema* se existir uma prova dela. Percebe-se, portanto, que, no formalismo, a Matemática, de fato, está preocupada com formas de representação de objetos (TILES, 1991).

O programa de Hilbert justificou a Matemática clássica, incluindo a teoria dos transfinitos de Cantor. Para tal, procedeu-se utilizando dois critérios: (a) expressar a Matemática em linguagem formal; (b) usar somente métodos finitários para provar que o sistema formal de Matemática infinitária é consistente, provando que nenhuma fórmula da forma '0=1'é provável nele.[10] Tais critérios permitiram o desenvolvimento de trabalhos em lógica Matemática: geraram a teoria de modelos, a teoria de sistemas formais e a teoria de função recursiva.

No entanto, como enfatizado por Tiles (1991), a conceituação da atividade Matemática que é incentivada no formalismo, teve efeitos negativos em toda ciência, pois se a Matemática for pensada como 'um jogo de fórmulas', então não há por que buscar significado no trabalho do matemático. Este último, simplesmente inventa e joga com um sistema formal, o que abre a possibilidade de se criar um formalismo vazio. Ademais, a razão compelida a regras formais permanece em oposição à liberdade e criatividade, uma vez que é privada de interferir em outros assuntos, como, por exemplo, os que se referem à vida diária.

Isso tudo nos permite dizer que a concepção formalista do conhecimento matemático exclui, entre outras coisas, os aspectos intuitivos e empíricos do conhecimento.

O sistema de Zermelo

A fim de evitar os paradoxos da Teoria dos Conjuntos, em 1908, Zermelo propos reconstruir essa teoria por meio de uma base axiomática restrita, suficientemente forte para eliminar as antinomias. Uma Teoria dos Conjuntos axiomatizada, como a de Zermelo, pode ser caracterizada como um formalismo, visto que também considera a consistência como única condição de existência dos objetos matemáticos.

Uma crítica que se faz a essa solução é de que tal procedimento foi elaborado com o único objetivo de eliminar os paradoxos. No caso, não houve qualquer outra preocupação, por exemplo, o próprio porquê dos paradoxos não era explicado. Ademais, esse procedimento não garantia a não existência de futuros paradoxos.

Zermelo contornou os paradoxos limitando as hipóteses concernentes à existência de conjuntos. Com tal restrição, o que era um conjunto no sentido ingênuo, poderia não o ser no sentido axiomático do termo. Na Teoria de Zermelo o importante é introduzir axiomas suficientemente fortes para assegurar a existência de conjuntos necessária à dedução do maior número possível dos teoremas desejados. Com isso, houve uma restrição nos axiomas, com intuito de impedir o surgimento dos paradoxos. (HEIJENOORT, 1971).

O sistema de Zermelo proporcionou à Matemática um ponto de partida para muitos sistemas posteriores que colocam a Teoria dos Conjuntos em uma fundamentação axiomática. Zermelo concebeu a ideia de proporcionar um sistema de axiomas que fosse consistente e permitisse a criação de conjuntos suficientemente amplos para os propósitos da Matemática ordinária. Seu intento foi realizado da seguinte forma:

Com um termo indefinido (conjunto) e uma relação binária ($\in$) entre conjuntos, os termos subconjuntos disjuntos e a relação de igualdade entre conjuntos podem ser definidos. Os cinco primeiros axiomas estabelecidos são:

Se a, b e A são conjuntos tal que $a \in A$ e $a = b$ então, $b \in A$.

[10] Isto foi o que Gödel mostrou ser impossível.

Se a e b são conjuntos disjuntos, então existe um conjunto, denotado por {a,b} tal que, a$\in$ {a, b}, b$\in$ {a, b} e se x$\in$ {a, b}, então x é a ou b.

Se μ é um conjunto e M $\in$ μ pelo menos para um conjunto M, então existe um conjunto $\sigma\mu$, cujos elementos são os elementos de todos os elementos de μ, e somente esses (ou seja, x$\in$ $\sigma\mu$ implica que x $\in$ M, para algum M tal que M $\in$ μ; e se x$\in$ M, M$\in\mu$, então x $\in$ $\sigma\mu$).

Se M é um conjunto então existe um conjunto υM, chamado conjunto potência de M, cujos elementos são os subconjuntos de M e somente esses.

Se M é um conjunto e P uma propriedade significativa11 para os elementos de M, então existe um subconjunto M(P) de M cujos elementos são todos aqueles elementos de M que tem a propriedade P e somente esses.

Além disso, têm-se também os seguintes teoremas:

Se existe algum conjunto, então existe um único conjunto ϕ chamado conjunto nulo ou vazio, o qual não tem nenhum elemento e é um subconjunto de todos os conjuntos.

Se M é um conjunto, então existe um conjunto {M} cujo único elemento é M.

Se M é um conjunto diferente de ϕ, cujos elementos são conjuntos disjuntos então existe um conjunto βM cujos elementos são aqueles subconjuntos de σM que tem exatamente um elemento em comum com cada elemento de M. Se $\phi\in$M então, βM=ϕ.

Se M é um conjunto diferente de ϕ, cujos elementos são conjuntos disjuntos, e $\phi \notin$ M, então o conjunto βM é diferente de ϕ.

A priori, nenhum dos axiomas ou teoremas acima nos permite assumir a existência de qualquer tipo de conjunto. Dessa forma, deve ser adicionado um axioma dizendo que "*existe pelo menos um conjunto*" ou "*existe o conjunto ϕ*". A partir disto, a existência de um conjunto infinito seria dada pelo seguinte axioma:

Existe um conjunto Z tendo as seguintes propriedades: o conjunto ϕ é um elemento de Z e, se x$\in$Z então {x}$\in$ Z.[12]

O número cardinal de Z_0 é $\aleph_0$. A partir de Z_0, obtemos pelo axioma (iv) o conjunto υ Z_0= Z_1 de número cardinal ([Z_1]) $2\aleph_0$=c. A partir deste último obtemos o conjunto Z_2=υ Z_1 e depois a sequência dos conjuntos Z_0, Z_1 , Z_2 , ... Z_n . . . tal que para cada n, $Z_n < Z_{n+1}$. No entanto, nenhum conjunto de números cardinais maior que todos os

[11] O termo "*propriedade significativa*" refere-se a uma propriedade tal que, se x$\in$ M, então x tem a propriedade P ou x não tem a propriedade P. Se M é o conjunto dos números reais, P pode ser a propriedade de ser algébrico, embora haja números, sobre os quais não sabemos se são ou não algébricos. Se M é o conjunto de todos os números naturais e P a propriedade de ser vermelho então, P não é uma propriedade significativa para os elementos de M.

[12] O conjunto Z_0 cujos elementos são ϕ, {ϕ}, {{ϕ}}, {{{ϕ}}}, etc., é o menor conjunto deste tipo e é similar ao conjunto dos números naturais.

números [Z_n] é assegurado. Assim, neste sistema, a existência de conjuntos com números cardinais, arbitrariamente grandes, não é assegurada. Do ponto de vista da consistência isto é desejado, pois evita conjuntos muito amplos autocontraditórios.

A solução apresentada por Zermelo foi amplamente adotada pela comunidade Matemática. Segundo Abe e Papavero (1991, p.5) "*A corrente central da Matemática tornou sua a resposta axiomática de Zermelo*". Porém, uma reformulação do sistema de Zermelo foi realizada culminando no que denominamos de Teoria de Conjuntos na versão de Zermelo-Fraenkel.

As modificações do sistema de Zermelo

O uso da noção de propriedade significativa no axioma (v) era um tanto vago, pois conjuntos e propriedades são noções permutáveis. Assim, introduzir em um axioma para conjunto a ideia de propriedade como se essa fosse um conceito intuitivamente conhecido era insatisfatório, pois tal procedimento levava a um círculo vicioso. Para evitar isso, uma reformulação do sistema de Zermelo foi realizada por Skolem e Fraenkel. Na proposta deles, as propriedades admissíveis para determinar subconjuntos são definidas por fórmulas construídas a partir de relações do tipo $x \in M$. Dessa forma, Fraenkel começa com "*função-conjunto*" elementar. Uma "*função-conjunto*" de um conjunto x pode ser:

(i) qualquer conjunto fixado dado;
(ii) um conjunto x variável;
(iii) o conjunto σx (axioma III);
(iv) o conjunto $\cup x$ (axioma IV);
(v) se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são funções-conjuntos, então também o são $\{\varphi(x), \psi(x)\}$ e $\varphi(\psi(x)$.

Com isso, o axioma (v) foi restabelecido como segue:

v') Dados um conjunto M e duas funções-conjuntos $\varphi(x)$ e $\psi(x)$; existe um subconjunto M' de M que tem como elementos exatamente aqueles elementos x de M, tal que $\varphi(x) \in \psi(x)$.[13]

No tratamento axiomático tal como o de Zermelo-Fraenkel, os axiomas são formulados na lógica do cálculo de predicados de primeira ordem (adicionando um conjunto teórico de variáveis predicativas adequadas como um símbolo predicativo para "$x = y$"), com isso é possível encaixar a teoria técnica no cálculo de predicados, tornando os mecanismos lógicos também axiomatizados. Com essa formulação da Teoria dos Conjuntos a prova da independência do axioma da escolha e a hipótese do contínuo puderam ser efetuadas (WILDER, 1965, p. 238).

[13] Por exemplo, se M e A são conjuntos dados, atribuindo o significado $\varphi(x)=x$ e $\psi(x)= A$, com M como em V', prova-se a existência do conjunto $A\cap M$.

O método de Von Neumann consistiu em introduzir a ideia de que nem todas as entidades podem ser admitidas como elementos de conjuntos. O Paradoxo que Russell apontou na teoria de Frege derrubou principalmente a tese de que os números são objetos lógicos. O ponto chave que levou ao paradoxo de Russell diz respeito à passagem de números à extensão.

No entanto, é possível identificar, praticamente sem problemas, ao menos números finitos com extensões. Um modo natural de se fazer isso é identificar cada número com alguma classe particular tendo aquele número de membros, isto é o que é feito na construção que Von Neumann apresentou para os números ordinais. (DEMOPOULOS, 1995, p. 187)

De Cantor à Von Neumann: algumas considerações

Foi, portanto, por meio desse percurso de Cantor à Von Neumann que se estabeleciam as bases modernas da Teoria dos Conjuntos e, consequentemente, de toda a Matemática clássica. Porém, Gödel (1931) apresentou o seguinte resultado: em qualquer sistema, suficientemente limitado e contendo todas as fórmulas de uma teoria de número elementar formalizada, existem teoremas que nem eles e nem a negação deles podem ser provados. [14] Com isso, em particular um sistema tal como o *Principia Mathematica* (PM) mesmo se for consistente, conterá fórmulas "*indecidíveis*". Isso vale também para o sistema de axiomas da Teoria dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Von Neumann, quando formalizados pela adição de regras e axiomas de conclusão do cálculo de predicado. Aliado aos resultados de Gödel há também os de Church, tal como posto por Meneghetti (2001):

> [...] *a crença de Hilbert na possibilidade de se obter uma prova finitária de consistência, estava ancorada em sua suposição de que, transformando as regras de inferência em regras formais de manipulação de símbolo, seria possível distinguir fórmulas prováveis de não prováveis. Mas, o teorema de Church*[15] *mostrou que isso não é possível para fórmulas na lógica de primeira ordem.* (MENEGHETTI, 2001, p.118).

Dessa forma, os resultados de Gödel e Church mostraram que Hilbert estava equivocado ao pensar que deve ser possível, por meio de uma seleção de notações adequadas, ter um sistema formal capaz de ser interpretado como uma formalização da aritmética clássica (TILES, 1991).

[14] O que Gödel primeiro provou, foi que qualquer sistema formal, tal como aquele do PM, no qual a aritmética pode ser expressa, deve conter uma sentença G tal que se PM é consistente, nem G e nem a negação de G são teoremas de PM. Em outras palavras, uma formalização consistente da aritmética, não pode também ser completa.

[15] O Teorema de Church mostra que ainda que o cálculo dos predicados de primeira ordem seja completo, i.e., que toda fórmula bem formada válida seja provável, não existe processo finitário que verifique a provabilidade (e, portanto, a validade).

Assim, embora pareça impossível desenvolver a Matemática sob um sistema formal consistente e completo, a postura adotada pelos matemáticos foi de reduzir partes especiais da lógica e da Matemática a sistemas formais. Destarte, geralmente, o uso que os matemáticos profissionais fazem da Teoria dos Conjuntos envolve somente porções seguras da mesma, a fim de evitar contradições. Essa é uma solução que pode servir para os propósitos da Matemática clássica, mas transpor isso para o ensino poderia ser insustentável.

Considerações finais

Com o percurso traçado foi possível verificar que a mudança de forma do tratamento dado aos cardinais e ordinais de Cantor para Zermelo-Fraenkel (versão apresentada por Halmos) foi consequência de um ideal de depuração das noções filosóficas da Matemática dominantes no final do século XIX e início do XX.

Na análise sincrônica da transposição didática dos cardinais e ordinais Meneghetti (1995; 1999) constatou que embora Halmos, que identifica os cardinais e os ordinais para conjuntos finitos, seja uma referência popular entre os noosféricos acadêmicos, felizmente, no Ensino Fundamental esse conhecimento não foi transposto tomando essa referência acadêmica.

Por meio da análise diacrônica, focalizada neste artigo, observa-se que o que há no Ensino Fundamental a respeito de cardinalidade e ordinalidade poderia encontrar uma fonte Matemática de legitimação em Cantor, na denominada 'Teoria Intuitiva dos Conjuntos'. Nesta, os objetos constituintes dos conjuntos estão no domínio da intuição. Cantor introduziu definições de cardinais e ordinais através da "*faculdade de abstração*" humana. A abstração foi aplicada em algum objeto previamente existente; as definições expressavam uma relação entre o sujeito que conhece e um objeto de conhecimento. Neste contexto, os cardinais e os ordinais, mesmo para o caso finito, são considerados como conceitos distintos. Esta forma de conceber definições foi se alterando.

Antes das correntes fundamentalistas da Matemática, ou seja, aquelas que buscaram apresentar uma fundamentação para a Matemática - entre as quais estão o logicismo e o formalismo (final do século XIX e início do século XX) -, definir estava mais próximo à ideia de se buscar a essência. Podemos observar que em Aristóteles, por exemplo, a definição diz respeito à essência e todas as demonstrações propõem e assumem a essência (ARISTOTELES, 1987). Ou como colocado por Spinoza: "*A verdadeira definição de uma coisa qualquer não implica nem exprime nada além da natureza da coisa definida.*" (SPINOZA, I, 8, schol.II apud ABBAGNANO, 1901, p. 236).

Observa-se que ao longo do tempo, na história da matemática, esse caráter de se buscar a essência foi se perdendo. Abbagnano (1998, p.237) coloca que num conceito mais moderno a definição pode ser considerada como "*qualquer restrição ou limitação do uso de um termo em determinado contexto*"; sendo o contexto considerado como "*um conjunto de pressuposições que constituem um preâmbulo à definição*". Dessa forma: "*Se o preâmbulo faz referência a linguagens artificiais (como a lógica e a Matemática), a definição será* *simplesmente uma convenção (proposta ou aceita) sobre o uso da palavra em tal linguagem* [...]".

Por meio da análise efetuada neste artigo podemos perceber que a forma de definir ou de conceber as coisas foi sendo drasticamente mudada a partir das correntes fundamentalistas da Matemática. Em Hilbert, por exemplo, verificamos que um objeto existe desde que ele seja consistente com o sistema. Nesse contexto, as definições não têm que expressar a essência, mas devem obedecer às convenções do discurso técnico.

Segundo Bicudo (1998, p.78) os problemas sintáticos *"ser consistente"*, "ser *completo"*, *"ser independente"* substituiu o problema semântico *"ser verdadeiro"*. A Matemática, na conceituação moderna, não tem a verdade como um objetivo. Não faz sentido perguntar se um dado sistema axiomático que formaliza uma teoria Matemática é ou não é verdade. O que está em jogo não é a essência, o objetivo imutável de cada conceito, mas um sistema de declarações que nos permitem deduzir outras declarações com base em regras de inferência lógica.

Referente à mudança no entendimento da natureza da Matemática, desde a antiguidade até a conceituação moderna, este último autor conta com o significado de duas palavras gregas:

> *O verbo grego epístemai, como empregado inicialmente por Homero, exprime a ideia de 'saber' com uma orientação prática; depois de 'estar seguro de',* [...] *finalmente de 'compreender, saber'. O substantivo mais importante derivado deste verbo é epistéme, que corresponde bem a epístemai, 'conhecimento prático'* [...] *Téchne, por sua vez, expressa 'a habilidade em uma profissão', 'ocupação, técnica, arte', donde, por vezes, 'ardil, embuste', e, de um modo geral, 'maneira de fazer, meio', 'um conjunto de regras, sistema ou método de fazer; em Platão, a palavra é, por vezes, oposta tanto a phýsis como a epistéme*. (BICUDO, 1998, p.75).

Assim, observa-se que houve uma ruptura entre essência e técnica. Pode-se também, presenciar essa ruptura num clássico livro de Teoria dos Conjuntos de Hausdorff, contemporâneo de Cantor. Ao analisar este livro percebe-se que o autor preserva certas características do trabalho de Cantor. No entanto, diferentemente desse último, ele não se preocupa com a essência dos objetos matemáticos e sim apenas com a utilidade de tais objetos. O número cardinal é considerado um conceito primitivo.

> *Esta explicação formal diz o que os números cardinais devem fazer e não o que eles são. Têm sido buscadas definições mais precisas, mas elas são desnecessárias e insatisfatórias. Relações entre números cardinais são meramente um modo mais conveniente de expressar relações entre*

> *conjuntos; devemos deixar a determinação da "essência" do cardinal à filosofia.* (HAUSDORFF, 1962, p.28 e 29, tradução minha).

Percebe-se que esse autor atribui a essência dos objetos à Filosofia, como se Filosofia e Matemática fossem campos de conhecimentos distintos.

Portanto, se por um lado o movimento de *epistéme* para *techné* parece ter se estendido, a partir do final século XIX, por toda a Matemática (noosfera acadêmica), por outro lado, os que não são especialistas em Matemática parecem ter resistido de serem arrastados por esse movimento e ainda compreendem a Matemática como *epistéme*. Claramente, ao longo da primeira metade do século XX, a Matemática mudou de *epistéme* para *techné*. No processo de depuração da Matemática, com o formalismo a consistência passou a ser a única condição de existência para os objetos matemáticos.

Assim, a ruptura que há entre o saber sábio dos cardinais e ordinais e o ensinado na Educação Básica parece ocorrer devido à adoção do formalismo como base para o conhecimento matemático científico.

Porém, tal como adverte Thom (1985), com a formalização da Matemática o acúmulo de fórmulas é tão grande e tão complexo que todas as possibilidades de interpretação intuitiva são eliminadas. Os teoremas assim obtidos podem ser corretos formalmente, mas são semanticamente insignificantes. Para esse autor a axiomatização é trabalho de especialistas e não tem lugar em outros níveis de ensino, exceto para aqueles profissionais especializados no estudo das fundamentações. Especificamente sobre a Teoria dos Conjuntos, Thom (1985) afirma que protagonistas modernos desta teoria devem entender que a mesma é insuficiente para considerar os passos dedutivos mais elementares do pensamento ordinário.

Portanto, com o movimento realizado neste artigo, foi possível perceber que as concepções de cardinais e ordinais presentes no ensino fundamental não encontram legitimação epistemológica na matemática acadêmica atual visto que, esta última ao adotar o formalismo como base para a produção do conhecimento matemático foi se afastando cada vez mais da intuição e da busca pela essência do conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino, que compartilhou das ideias iniciais desse trabalho, quando a análise histórica ainda não havia sido traçada. Agradeço também ao Prof. Dr. Irineu Bicudo, pela indicação de referências bibliográficas que foram fundamentais para que eu pudesse traçar este percurso.

Bibliografia

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia.* Tradução Alfredo Bosi. 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.
ABE, J. M.; PAPAVERO, N. *Teoria Intuitiva dos Conjuntos.* São Paulo: Makron, McGraw-Hill, 1991.
ARISTÓTELES. *Organon IV: analíticos posteriores.* Trad. e Nota P. Gomes, Guimarães editores, Lisboa, 1987.
ARSAC, Gilbert- L' evolution D'une Théorie en Didactique: L'exemple de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathematique*, v.12, n. 1, pp. 7-32, 1992.
BICUDO, I. Matemática: técnica ou ciência. *HYPNO∑: Téchne*, Ano 3, n. 4, 1998, pp. 74-81.
BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática.* Brasília, MEC/SEF, 1997.
CANTOR, G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Trad., Intr. e Notas P. E.B. Jourdain. Dover Publications, Inc., New York, 1955.
CHEVALLARD, Y. *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques.* Fac. des Sciences de Luminy, Univ. d'Aix-Marseille II, 1989.
________. *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné.* Paris: La Pensée Sauvage, 1991.
DEMOPOULOS, W. *Frege's Philosophy of Mathematics.* Havard University Press – Cambridge, Massachusetts- London, England, 1995.
EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 2.ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.
FERREIRA, F. Teoria dos Conjuntos: uma vista. *Boletim da SPM (Sociedade Portuguesa de Matemática).* Abril de 1998, pp. 29-47. Disponível em http://www.ciul.ul.pt/~ferferr/vistacorr.pdf. Acesso em 04 out. 2012.
FREGE, G. Begrissffchrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought, 1879. In: HEIJENOORT, V. *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879-1931.* Havard University Press, Cambridge, Maddschutts, 1971, pp. 1-82.
FREGE, G. *Os Fundamentos da Aritmética.* Trad. L. H. Santos, Coleção 'Os Pensadores', v. 6, São Paulo, Abril, 1983.
_______. *The Foundations of Arithmetic*. English Translation by J. L. Austin. M.A- Basil Blackwell- Oxford, 1959.
HALMOS , P.R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Trad. I. Bicudo. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Editora Polígono, 1970 – 116 p. ilus.
HAUSDORFF, F. *Set Theory*. Trad. J.R.Aumann, et al. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y, 1962.
HEIJENOORT, V. (Ed.) *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879-1931*. Havard University Press, Cambridge, Massachusetts, Second Printing, pp.1-82, 1971.

HILBERT (1927). The foundations of mathematics. In: HEIJENOORT, V. V. *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879-1931*. Havard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1971, Second Printing, pp. 464-479.

MENEGHETTI, R. C. G. *Sobre a Transposição Didática dos Cardinais e Ordinais*. 1995. 221f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP – campus Rio Claro. Rio Claro, 1995.

________. A Transposição Didática dos Cardinais e Ordinais: relação ensino e ciência. *BOLEMA*, n. 13, Departamento de Matemática de Rio Claro, 1999. pp.12-28.

________. *O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: uma análise a luz da história e da filosofia da matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP – IGCE – Rio Claro/SP. Rio Claro, 2001**.**

PROCTER, P. *Cambridge International Dictionary*. New York: CambridgeUniversity Press, 1995.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1903.

RUSSELL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*. George Allen & Unwin, Ltd., London, 1919.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta Curricular para o Ensino de matemática: 1º grau.* 4. ed. São Paulo, SE/CENP, 1992, 181p.il.

THOM, R. Modern Mathematics: an educational and philosophic erro? In: TYMOCZKO. *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Birkhäuser, 1985.

TILES, M. *Mathemetics and the Image of Reason.* Routledge, London and New York, 1991.

WILDER, R. L. *Introdution to The Foudations of Mathematics.* Second edition, Wiley International Edition – John Wiley & Sons. Inc. New York – London – Sydney, 1965.

Renata Cristina Geromel Meneghetti
Universidade de São Paulo – USP - Brasil

E-mail: rcgm@icmc.usp.br