Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 24, nº48 - pp. 156–176
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

EFECTOS TRANSPOSITIVOS ENTRE PRAXEOLOGÍAS ADVENIMIENTO DEL RADIÁN

Alberto Camacho-Ríos

Verónica Valenzuela-González

Marisela Caldera-Franco
Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua II – TecNM Chihuahua II – México

(aceito para publicação em fevereiro de 2024)

Resumen

El objetivo del artículo es analizar el concepto geométrico de radián a través de un fenómeno de transposición de conocimientos, el cual se investiga en diferentes obras elementales. Situamos el concepto en la configuración general de las producciones a lo largo del siglo XIX y nos interesamos por su uso en otras disciplinas. Las definiciones del concepto que aparecen en las obras de matemáticas, así como aquellas dedicadas a otras profesiones, son caracterizadas en el escrito desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico por praxeologías matemáticas y praxeologías prácticas, en el sentido de Chevallard (2007) y Castela (2009), respectivamente.

Palabras clave: obra elemental, radián, $\operatorname{sen} a$, partes del radio, praxeología.

[EFEITOS TRANSPOSITIVOS ENTRE PRAXEOLOGIAS ADVENTO DO RADIANO]

Resumo

O artigo tem como objetivo analisar o conceito geométrico de radiano através de um fenômeno de transposição de conhecimento, que é investigado em diferentes obras elementares. Este conceito é colocado na configuração geral das produções ao longo do século XIX e está de interesse para seu uso em outras disciplinas. As definições do conceito que aparecem em obras matemáticas e aquelas dedicadas a outras profissões são caracterizadas no artigo a partir da Teoria Antropológica do Didático por praxeologias matemáticas e praxeologias práticas, de acordo com Chevallard (2007) e Castela (2009), respectivamente.

Palavras-chave: trabalho elementar, radiano, sena, partes do ráio, praxeologia.

[TRANSPOSITIVE EFFECTS BETWEEN PRAXEOLOGIES. ADVENT OF THE RADIAN]

Abstract

The objective of the article is to analyze the geometric concept of radian through a phenomenon of knowledge transposition, which is investigated in different elementary works. We place the concept in the general configuration of productions throughout the 19th century and we are interested in its use in other disciplines. The definitions of the concept that appear in mathematical works, as well as those dedicated to other professions, are characterized in the writing from the Anthropological Theory of the Didactic by mathematical praxeologies and practical praxeologies, in the sense of Chevallard (2007) and Castela (2009), respectively.

Keywords: elementary work, radian, sena, parts of radium, praxeology.

1. Obras Elementales y Praxeologías

Las *obras elementales* se consideran libros de texto de diferentes áreas de la ciencia, que bajo esa denominación se usaron durante los siglos XVIII, XIX y principios del XX para la enseñanza de diversas asignaturas, con éxito importante en la matemática escolar: *Tratados, Elementos, Ensayos, Manuales, Cursos*, etc. Desde principios del siglo XVIII los *elementos* se concebían como "aquella parte que denotaba las componentes originales de un cuerpo". Reynaud, en su texto de cálculo titulado Analyse Demontrée, publicado en 1708, y Bèzout, en sus Principes du Calcul Infinitésimal de mediados del siglo XVIII, llamaban *elemento* a la extensión infinitesimal o diferencial que se tomaba en las figuras geométricas con las cuales era posible determinar la cantidad de área, longitud o volumen (Camacho, 2005). El elemento era formulado como una *verdad* que llevaba al establecimiento de una primera proposición, la cual dominaba, era transversal, y permitía iniciar la escritura de la obra. Las proposiciones se distinguen en las *primeras verdades* fincadas en axiomas, convincentes *a priori,* que de principio no admitían contradicción, por antiguos geómetras como Newton, Laplace, Lagrange, Leibniz, y otros. Las obras elementales fueron depositarias de conocimientos que, desde la perspectiva histórica y epistemológica, anteceden a los libros de texto actuales.

En el caso de la trigonometría, la mayoría de los autores de principios del siglo XIX coinciden que su objetivo es determinar las seis componentes fundamentales de un triángulo, a saber, sus tres ángulos y tres lados. Este interés desemboca de la actividad desarrollada con la Geometría Práctica (agrimensura) en la cual, durante las mediciones de terrenos de cierta extensión, se encontraban obstáculos para determinar ángulos y distancias.

En el Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Spérique et Application de L´Algèbre á la Géométrie, escrito en 1807, S. F Lacroix valoraba las primeras verdades para la escritura de la obra, explicando que en las particiones a una circunferencia, cuya medida es designada ordinariamente por 2π, el seno de AB o sen $\frac{1}{2}\pi = 1$:

> "*El arco* $AB = \frac{1}{2}\pi$, *tomando por unidad el radio, AM será de* $0.^q 5$,[1] *se tiene luego* $sen 0.^q 5 = cos 0.^q 5 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707106781186$. *Si enseguida* $a' = 0.^q 5$, *se tendrá* $sen \frac{1}{2} a' = sen 0.^q 25 = 0.38268343239$. *Continuando con la partición de cada arco en dos partes iguales, no llegaremos sobre ninguna de las partes de los cuadrantes; y tendremos solamente arcos cada vez más pequeños; los cuales por esta razón se aproximan sin cesar a ser iguales a sus senos. En la catorceava partición, por ejemplo, llegamos a un arco que es* $\frac{1}{16384}$ *del cuadrante donde el seno es* 0.0000095873799, *menor por consecuencia que* 0.00001*; la pequeñez de este arco es tal, que no diferirá de su seno hasta la doceava cifra decimal."* (Lacroix, 1807, pp. 16–17).

La proposición anterior es una de los primeros elementos con los que Lacroix organizó la escritura del libro de trigonometría. El elemento es caracterizado por la partición en fracciones cada vez más pequeñas de un arco de círculo en segmentos iguales, cuyo radio es unitario, que lleva a concluir en la semejanza del arco con el seno. El enunciado descansa en un teorema que describe en su obra de Geometría:

> "*Si dos magnitudes invaribles A y B son tales que podámos probar que su diferencia* $A - B$ *sea menor que una tercera magnitud* δ, *por pequeña que pueda ser esta última, esas dos magnitudes son iguales entre ellas."* (Lacroix, 1799, Proposición 153, pp. 100–101)

El teorema es resultado del proceso de dicotomía efectuado a polígonos regulares inscritos y circunscritos sobre un círculo, de modo que la diferencia entre cualquiera de los polígonos y este último sea menor que una magnitud dada. Gracias a este resultado Lacroix probó, inmediatamente, que las circunferencias de los círculos son entre ellas como los radios. En efecto:

> "(…) *si* $\frac{C}{C'}$, *es la relación invariable de las circunferencias,* $\frac{R}{R'}$, *la relación invariable de los radios,* $\frac{P}{P'}$ *la relación de los perímetros de los polígonos regulares circunscritos, se tiene* $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}$ *y si la diferencia entre* $\frac{C}{C'} - \frac{R}{R'} = \delta$, *es también pequeña, deducimos la igualdad* $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$. *(op, cit.)*"

Lo cual supone esto que actualmente se conoce como *continuidad del cociente*.

[1] La letra *q* designa grados sexagesimales, así como la posición del cuarto de cuadrante donde se ubica el ángulo.

Enseguida estableció la relación de la circunferencia *C* con el radio *R* del círculo, como: $1 : \pi :: 2R : C$, concluyendo que $R = \frac{C}{2\pi}$. Utilizando la última de las proposiciones, y partiendo los polígonos inscritos y circunscritos hasta en 12,288 lados, aproximó el valor de π entre las siguientes fracciones (op, cit., pp. 103-108):

$$3\frac{10}{70} > 3.1415926 > 3\frac{10}{71}$$

Las circunstancias de la partición del arco se encuentran planteadas en obras de antiguos geómetras como el Almagesto de Ptolomeo, incluyendo la notación similar a $0.^{q}\,5$. Mientras que la semejanza del arco con el seno es resultado del análisis desarrollado por los creadores del cálculo infinitesimal como Newton, quien extendió en series infinitas de potencias las funciones trigonométricas. Por su lado L´Hospital, unos treinta años antes que Lacroix, hizo distinción del límite entre dos cantidades que se aproximan a cero, en una proposición colocada en su obra Analyse des Infiniment Petits (1768), descrita como:

> "*Sea una línea curva AMD (AP=x, PM=y, AB=a) tal que se busca el valor de la Aplicada, sugerida por una fracción, luego que el numerador y el denominador devienen cada uno cero cuando x=a, es decir luego que el punto P cae sobre el punto dado B. Nos demandamos luego cuál debe ser el valor de la Aplicada BD."* (p. 141, sección IX, Artículo 163).

El límite entre cantidades descrito como *el arco se aproxima al seno*, $a \approx sen a$, o bien desde la perspectiva actual, $\lim_{a \to 0} \frac{a}{\operatorname{sen} a}$, sugerido en la obra de Lacroix, fue evolucionando ha convertirse en el eje transversal de las obras elementales de trigonometría escritas a lo largo del siglo XIX. Esta forma de abordar el límite fue por él llamada *método analítico* con el que inauguró el paradigma de las *demostraciones directas* a través de pocas cuestiones geométricas. En el límite se encuentra en transición el concepto actual de radián, arropado por la función seno. Bajo esa concepción fue ampliamente utilizado en las ciencias subsidiarias de la trigonometría, como la astronomía, topografía, navegación y geodesia.

La historia alude interacciones de conocimientos entre las matemáticas y otras disciplinas. Esta influencia recíproca ha sido llamada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) *efecto transpositivo* (Chevallard, 2007). Por lo general, la influencia de la matemática con diferentes ciencias es desarrollada en el campo de la actividad humana, al transformar el conocimiento matemático y adaptarlo para su uso en otras profesiones. Las adaptaciones se dan en las *praxeologías prácticas* al tomar algunos elementos de las *praxeologías matemáticas* y adecuarlas a estas. Una praxeología matemática es explicita a partir de la unidad de análisis [T, τ, θ^{th}, Θ] (op., cit) la cual contiene un tipo de actividad T por resolver, a través de una técnica matemática τ, producida por un teorema, definición o axioma θ, también reconocidos en la TAD como *tecnologías*. En su conjunto, toda praxeología es organizada por un discurso teórico Θ. Este tipo de praxeologías son utilizadas para describir *prácticas matemáticas* (Camacho y Romo-Vázquez, 2015). El límite entre cantidades supuesto en la obra de Lacroix, dispuesto como: $\lim_{a \to 0} \frac{a}{\text{sen}a} = 1$, corresponde a una tecnología del tipo θ^{th}, el cual determina ese tipo de prácticas.

Castela (2009, p. 1196) considera que una praxeología es una *Institución* y define este concepto como "una organización social estable; en ésta existen sujetos que realizan ciertas actividades sociales, bajo ciertas restricciones institucionales, aprovechando ciertos recursos disponibles en dicha institución". Los objetos siguientes son ejemplos de instituciones: la asignatura de trigonometría, las carreras de ingeniería en México, el libro de texto de ecuaciones diferenciales de Zill y Cullen, la topografía, la demostración matemática, el lenguaje, etc.

En tanto, las praxeologías prácticas incluyen, además de las componentes citadas en la unidad de análisis, una tecnología práctica representada con el símbolo θ^p (Castela y Romo-Vázquez, 2011).

$$I \rightarrow \begin{bmatrix} T & \tau & \theta^{th} & \Theta \\ \square & \square & \theta^{p} & \square \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow I_{th} \\ \leftarrow I_u \end{matrix}$$

Figura 1. Unidad básica que incluye una tecnología práctica θ^p, del modelo extendido de la TAD.

En el esquema que se presenta en la Figura 1, *I* es la institución en la que se plantearon los problemas que dieron origen a la praxeología. A la derecha, las flechas simbolizan prácticas sociales de validación, legitimación e institucionalización. Se desarrollan en dos tipos de instituciones, según Castela (2009, p. 1203):

> "*las Instituciones teóricas I_{th} que respecto a T están en una posición de espectador, su función social es la producción de saberes; las Instituciones que les utilizan, I_u, en las que algunos de los sujetos tienen que cumplir tareas del tipo T. En cada nivel, están en juego cadenas de instituciones de tamaño variable, empezando con comunidades que constituyen los sujetos de cierta institución I_u que se enfrentan a T en su vida institucional.*"

Una tecnología práctica θ^p se distingue de una tecnología teórica θ^{th} debido a que la segunda se finca desde el marco teórico de la matemática formal, mientras que la primera es resultado de observaciones experimentales que se realizan en ciencias ajenas a la matemática, como las citadas. Por ejemplo, la ley empírica que determina el gasto o cantidad de volumen *V* de fluido que pasa a través de una sección ideal y el tiempo *t* que tarda en ocurrir, en la hidráulica, es dada por $Q = \frac{V}{t}$. Por la forma experimental en que surge la expresión se ubica más en el dominio de la física-matemática y, por consecuencia, corresponde a una tecnología práctica. No obstante, este tipo de expresiones suelen comprender técnicas matemáticas τ que se desprenden de tecnologías matemáticas θ^{th}, como se verá más adelante.

Este impulso otorgado al marco teórico de la TAD, con la inclusión de praxeologías prácticas θ^p, permite analizar los efectos transpositivos ocurridos entre praxeologías matemáticas y praxeologías prácticas. De lo que precede nos hacemos las siguientes preguntas, las cuales se desprenden del proyecto de Castela (2009) ¿Cómo la concepción del radián, que aparece en las obras elementales de trigonometría del siglo XIX, fue transformado en un conocimiento práctico? ¿Cómo este conocimiento es utilizado en la topografía, geodesia y astronomía? Para abordarlas, procederemos al análisis y reformulaciones del concepto *radián,* tanto en la matemática escolar del siglo XIX como en las ciencias citadas, ubicadas en la misma época.

2. Origen de la palabra *radián*

La palabra *radianes* fue utilizada por primera vez en forma impresa en 1873 por el matemático inglés James Thomson, quien la adoptó junto con el físico Thomas Muir en unas preguntas elaboradas para un examen aplicado a estudiantes en el Queen´s College, Belfast. Al parecer ambos investigadores pensaron de manera independiente en la misma palabra, *radians* por su designación en lengua inglesa, para dar significado al ángulo unitario. Según W. N Roseveare, "El radián es un ángulo poco interesante; Lord Kelvin (hermano de James Thomson) introdujo la palabra simplemente como una conveniencia para dar una conferencia, y evitar la frase larga *ángulo cuya medida circular*”.[2] Su símbolo es rads, radiales y radianes. Doerfling (1960) uso la palabra *radiantes* para dar el mismo significado.

Según cita Cajori (1993, p. 147):

> “*Ha sido habitual entre muchos autores omitir la palabra radianes en el uso de la medida circular y para escribir, por ejemplo* $\frac{\pi}{2}$ *o* π, *con lo que se quiere decir;* $\frac{\pi}{2}$ *radianes o* π *radianes. También ha sido propuesta el uso de la palabra griega* ρ *escribiendo* 2ρ, $\frac{3}{5}\rho\pi$ *para dos radianes y tres quintos de* π *radianes, otros usan la letra mayúscula R colocándola como* $\frac{\pi^R}{4}$ *para indicar* $\frac{\pi}{4}$ *radianes, aunque también se utiliza la letra minúscula r como* 1^r *para un radián, aun cuando otros la colocan en un paréntesis como en* $2^{(r)}$ *para significar dos radianes.”*

Entre 1876–1879, en la Globe Enciclopaedia of Universal Information se afirmaba, en un artículo sobre el círculo: “La unidad, llamada radián por el Profesor James Thomson, es el ángulo que subtiende al arco cuya longitud es igual al radio”. La definición ortodoxa que aparece en la mayoría de las obras elementales de Geometría de finales del siglo XIX y principios del XX, es semejante a la siguiente:

> “*es que sus lados cortan un arco igual en longitud al radio en la circunferencia del círculo, ya que la longitud de este arco es igual a un radio del círculo,* se dice que la medida de este ángulo es medida en radianes, con lo que se intenta contraer la frase *ángulos radiales*.”[3]

[2] La cita aparece en la página 133 of W. N. Roseveare, “On ‘circular measure’ and the product forms of the sine and cosine”. Mathematical Gazette 3 No 49 (January 1905), pp. 129–137.
[3] Las itálicas son nuestras. Tomado de <http://jeff560.tripod.com/r.html>.

Sin embargo, esta es solamente una concepción tardía del radián, como dejamos ver en el escrito.

3. Obras elementales publicadas durante el siglo XIX

Las primeras obras elementales escritas en el intermedio de los siglos XVIII y XIX, tenían por objetivo *elementarizar* el conocimiento científico contenido en obras de ciencias como la Mécanique Analitique de Lagrange, los Essai Philosophique sur les Probabilités de Laplace, así como aquellas otras de Cálculo Diferencial e Integral, Geometría y Trigonometría, escritas por reconocidos autores. La elementarización no era casual y obedecía a la necesidad de conocimientos escolares que debían ser enseñados en la École Polytechnique, fundada en 1794. En estos procesos se ubican los efectos transpositivos del conocimiento, en tanto fenómenos didácticos, que forman parte de la propia actividad de elementarizar. Las primeras dos obras que se analizan enseguida, Bourdon (1854) y Lefébure De Fourcy (1836), guardan esta filiación, la tercera, Chauvenet (1850), muestra la trascendencia de esos conocimientos en América, siendo la cuarta, Díaz Covarrubias (1896), evidencia de la aplicación de dichos conocimientos en las ciencias de la Tierra citadas. Para algunas de las obras hemos incluido breves reseñas con el interés de posicionar y aclarar la situación histórica de su aparición.

Vemos esta pequeña muestra fragmentaria de obras elementales, aisladas en la historia, como ensamble de piezas de un rompecabezas, actividad semejante a la desarrollada por los arqueólogos, cuyo conocimiento ahí contenido hay que recuperar y organizar.

Aspiramos estrechar esos conocimientos y mostrar en el escrito esa realidad, por hoy perdida, desconocida y olvidada.

3.1 Trigonométrie de M. Bourdon: arcos, senos y tangentes

En 1854 se publicó en Francia la Trigonométrie Rectiligne et Sphérique escrita por M. Bourdon. Fue compuesta conforme a los programas de estudio de los liceos, toda vez que adoptada por L´Université de Paris, y se adecuaron los temas para los estudiantes que aspiraban ingresar a L´École Polytechnique de esa época. Bourdon había escrito otros manuales, no menos importantes, como fueron los Éléments d´Árithmétique (1853), Aplication de l´Álgebre a la Géométrie (1854), Élements d´Álgebre (1848), un Cours de Géométrie Élémentaire (1844) así como el Abrége du Cours de Géométrie (1854).

La trigonometría fue dividida en rectilínea y esférica y cada definición incorporada en forma de proposiciones en artículos enumerados consecutivamente. En la primera parte del libro establece las relaciones entre las *líneas trigonométricas*, la determinación de las fórmulas principales y la construcción de tablas. Las líneas trigonométricas son definidas usando un radio unitario para la circunferencia. Además, una proposición que atraviesa al libro, es que el seno y tangente guardan *relación* con el arco de circunferencia que subtienden:

> “*(…) son tres cantidades que tienden sin cesar hacia la unidad a medida que el arco disminuye; y luego que el arco es menor que una magnitud dada, esas relaciones difieren entre ellas de la unidad de una cantidad*

> *menor que toda magnitud dada. En otras palabras, "esas tres relaciones tienen por LÍMITE común la UNIDAD."* (Bourdon, 1854, p. 62)

De esa proposición Bourdon destaca la relación $\frac{a}{\mathrm{sen}a}$, *la cual difiere muy poco de la unidad*, lo que conduce a considerar que "el arco y el seno son también muy poco diferentes uno del otro" (Artículo 41, p. 62). O bien $\mathrm{sen}a$ es muy próximo o igual que a; diriamos actualmente que $\lim_{a\to 0}\frac{a}{\mathrm{sen}a} = 1$. En consecuencia, es posible determinar el *error cometido* después que se toma el arco por el seno, o recíprocamente. De modo que observando la relación:

$$\tan\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a$$

la cual se descompone como:

$$\mathrm{sen}\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$$

de donde, multiplicando los dos miembros de la desigualdad por $2\cos\frac{1}{2}a$, y considerando la identidad $2\cos\frac{1}{2}a\ \mathrm{sen}\frac{1}{2}a = \mathrm{sen}a$, se deduce:

$$sena > a\cos^2\frac{1}{2}a$$

$$\mathrm{sen}a > a(1 - \mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a)$$

Y puesto que $a \approx \mathrm{sen}a,$ luego $\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a \approx (\frac{1}{2}a)^2$. Entonces:

$$\mathrm{sen}a > a(1 - (\frac{1}{2}a)^2)$$

$$\mathrm{sen}a > a - \frac{1}{4}a^3$$

O bien:

$$a - \mathrm{sen}a < \frac{1}{4}a^3$$

Por su lado, asumiendo que en la Geometría el radio de la circunferencia es tomado por la unidad, de modo que media circunferencia tiene por medida el valor de $\pi = 3.14159$. Y, puesto que media circunferencia comprende 180^0, 10,800´, o 648,000´´, se sigue que 10´´ de arco corresponden a:

$$10'' = \frac{10\times 3.14159}{648{,}000} = 0.00004848132716\ldots$$ [4]

Lo cual lleva ha establecer la diferencia entre las magnitudes que se desea comparar, el arco de 10´´ y el seno del mismo arco, es decir

$$10'' - \mathrm{sen}10'' < 0.0000000000409318$$

En esta última desigualdad se muestran dos argumentos notables, uno de ellos corresponde a la relación manifiesta que lleva a la expresión actual del radián, dispuesto el ángulo en segundos de arco, como: $10'' = \frac{3.14159}{64{,}800}$. El segundo es que $\mathrm{sen}10''$ es muy próximo de esta última, o bien iguales, en el límite cuando $a \rightarrow 0$. No obstante, la segunda expresión es aproximada.

La Trigonométrie de Bourdon es un texto que sigue la idea central del límite expuesta por Lacroix en su obra. Sin embargo, no va más allá en la utilidad del error cometido δ entre el arco y su seno, es decir: $a - sena < \delta$. En el siguiente apartado se analiza la misma diferencia, en otra obra, relacionada con arcos pequeños que tienden a ser iguales a las funciones seno y tangente de esa magnitud.

3.2 Elemens de Trigonométrie de Lefébure De Fourcy

Lefébure De Fourcy (1785–1869), matemático y astrónomo francés de origen haitiano, fue miembro de la Academia de Ciencias de París, examinador de admisión en diferentes instituciones educativas como la Polytecnnique, además de Caballero de la Legión de Honor. Escribió cuatro manuales para la enseñanza de la matemática en la misma escuela, estos fueron: Leçons d´Algèbre (1850, s.f edition), Leçons de Géométrie Analitique (1827), Traité de Géométrie Descriptive (1842, 4ª edition) y Élémens de Trigonométrié (1836). [5] Su tesis de doctorado fue orientada hacia la mecánica y astronomía, de aquí que se distinguiera más por el conocimiento que tenía de la física-matemática.

Dedujo el arco de 10´´ determinado en el texto de Bourdon, destacándolo como:

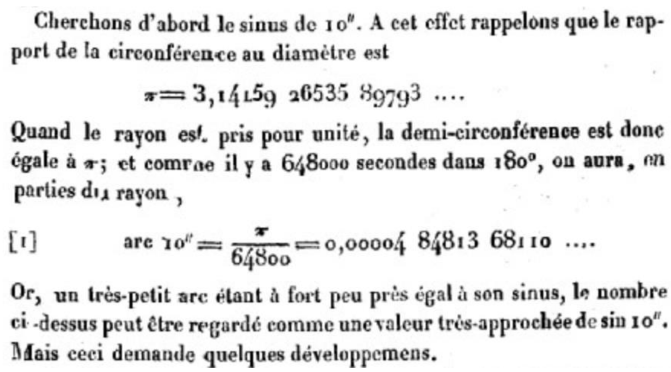
$$\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0.000048481368110\ldots$$

Utilizó la notación arc para simbolizar al arco subtendido por el ángulo y consideró el número π con una aproximación de 15 cifras después del punto decimal como $\pi =$

[4] Bourdon redondea esa cantidad como 0.00004

[5] Lefébure De Fourcy titula el manual en francés antiguo como Éleméns en lugar de Éleménts.

3.141592653589793 ..., misma cantidad de cifras empleadas para definir el arco de 10´´, Figura 2.



Cherchons d'abord le sinus de 10''. A cet effet rappelons que le rapport de la circonférence au diamètre est

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ \ldots.$$

Quand le rayon est pris pour unité, la demi-circonférence est donc égale à π; et comme il y a 648000 secondes dans 180°, on aura, en parties du rayon,

$$[1] \qquad \text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0,00004\ 84813\ 68110\ \ldots.$$

Or, un très-petit arc étant à fort peu près égal à son sinus, le nombre ci-dessus peut être regardé comme une valeur très-approchée de sin 10''. Mais ceci demande quelques développemens.

Figura 2. Definición de Lefébure De Fourcy del arco de 10´´, p. 37.
Fotografía tomada del documento original que se encuentra en Biblioteca Nacional de Francia (BNF). [6]

Llegó, además, al mismo resultado exhibido por Bourdon:

$$\mathrm{sen}a > a - \frac{1}{4}a^3$$

Aplicando esta desigualdad en el resultado del arco de 10´´ como:

$$\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0.000048481368110 \ldots$$

se tiene que arc $10'' < 0.00005$. Luego:

$$\frac{1}{4}(\text{arc } 10'')^3 < 0.000000000000032$$ [7]

De ahí se sigue que

$$\mathrm{sen}10'' > \begin{cases} 0.000048481368110 \ldots \\ \underline{-0.000000000000032} \end{cases}$$
$$\mathrm{sen}10'' > 0.000048481368078 \ldots$$

Se deja ver que el $\mathrm{sen}10''$ comenzará a diferir del arc10´´ hasta la 13ª cifra decimal en una unidad demás. De modo que se puede fijar como:

[6] https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k26778p/f41.item.texteImage
[7] Próximo del resultado real 0.000000000000028488…

$$\mathrm{sen}10'' = 0.0000484813681,$$

el cual garantiza que el error δ cometido será una unidad ubicada en la 13ª cifra decimal. Con este resultado el autor se propuso determinar los senos y cosenos de los arcos de 20´´, 30´´, 40´´, hasta 45° y elaborar con ellos una Tabla Trigonométrica.

Por su lado, al establecer el valor de la magnitud del arco de 10´´, Lefébure hace la siguiente afirmación:

> "(…) *cuando el radio es tomado por la unidad, la media circunferencia es luego igual* π*; y como hay 648,000 segundos en* $180°$, *tendrémos,* ***partiendo el radio***
>
> $$arc\ 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0.000048481368110\ ...$$
>
> *o bien, un arco muy pequeño casi igual a su seno (Figura 2).*"

Lo señalado en negrillas es nuestro y aclara con certeza que la unidad de medida del radio de la circunferencia es la misma que la unidad de medida del arco. Parafraseando al autor, diríamos que *un arco de* 10´´*es igual a* $0.000048481368110\ ...$ *partes del radio*. No obstante, el autor enfatiza la igualdad entre el arco y el seno del mismo y no entre las magnitudes del radio unitario y el arco, que resulta como consecuencia y permitiría reconocer en esa afirmación la definición actual del radián. Esta consecuencia, sin embargo, pareciera no tener importancia puesto que el autor destaca la semejanza entre el arco y el seno como, con cierta aproximación, $a \approx \mathrm{sen}a$. Incluso, reconoce que la aproximación entre ambas magnitudes, hasta la 13ª cifra decimal, *pudiera no ser suficiente* y considera posible "recomenzar de nuevo los cálculos iniciando con un arco de 1´´, en lugar de 10´´"(Lefébure De Fourcy, 1836, p. 41). En otras palabras, lo que interesaba a Lefébure es la determinación del seno del ángulo.

Las obras elementales de trigonometría que aparecieron a finales del siglo XIX, contienen el mismo sedimento e influencia matemática de aquellas de Lacroix, Bourdon y Lefebure De Fourcy. Una de estas fue elaborada en el continente americano, el A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry del estadunidense William Chauvenet, publicada en 1850, la cual se difundió a otros países, como México, desde los años sesenta del siglo XIX.

3.3 W. Chauvenet: A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry

William Chauvenet (1820–1870) fue matemático y astrónomo, así como profesor de matemáticas, astronomía, navegación y topografía, en las universidades norteamericanas de Pensilvania y Washington; se encuentra además entre los fundadores de la Naval Academy de los E.U. Escribió algunas obras entre las que destacan: A Manual of Spherical and Practical Astronomy (1863), A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry (1850), Theory and use of Astronomical Instruments: Method of Least Squares (1863) y A Treatise of Elementary Geometry (1870). En el tratado de trigonometría recoge los conocimientos de los matemáticos franceses de principios del siglo XIX, que hemos señalado, y los utilizó para elaborar todo el corpus mencionado. Al igual que las obras elementales analizadas, esta última es ordenada a través de proposiciones consecutivas.

Según el autor: "la trigonometría es la rama de las matemáticas que trata de métodos para reducir ángulos y triángulos al cálculo numérico" (Chauvenet, 1850, p. 2). A partir de la igualdad de los límites, ya vista para el valor del arco a muy pequeño:

$$\lim_{a\to 0}\frac{a}{\mathrm{sen}a}=\lim_{a\to 0}\frac{a}{\tan a}=1,$$

estableció la igualdad del sen1´´ con el arco, como:

$$\mathrm{sen}1'' = \mathrm{arc}1'' = 0.000004848137$$

Estos argumentos le permitieron expresar las funciones $\mathrm{sen}x$ y $\tan x$ en segundos de arco, en la forma:

$$\mathrm{sen}x = \tan x = x\,\mathrm{sen}1''$$

o bien en minutos de arco:

$$\mathrm{sen}x = \tan x = x\,\mathrm{sen}1'$$

Concluyendo que si x expresa la longitud del arco, siendo el radio unitario, entonces:

$$\mathrm{sen}x = \tan x = x$$

Para determinar la longitud de un arco del cual se da el número de grados, minutos, etc., partió de conocer la magnitud de la semi-circunferencia de radio unitario, es decir, 3.14159265; siendo R el radio $3.14159265 \times R$. Con ello fijó las longitudes de los diferentes arcos para $1^{\circ}, 1'$ y $1''$, utilizando la notación Arc, para el arco, y la variable x para designarlo, es decir:

	Siendo $R = 1$
Arc $180° = 3.14159265 \cdot R$	$= 3.14159265$
Arc $1° = 0.017453293 \cdot R$	$= 0.017453293$
Arc $1' = 0.0002908882 \cdot R$	$= 0.0002908882$
Arc $1'' = 0.000004848137 \cdot R$	$= 0.000004848137$

Por lo tanto, a la longitud de un arco x sobre el círculo, cuyo radio es la unidad, expresado en grados, minutos o segundos, se llega utilizando las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\mathrm{Arc}x &= 0.017453293x^{\circ}\\ &= 0.0002908882x'\\ &= 0.000004848137x''\end{aligned}$$

La notación indica al Arc$x$ expresado en radianes, pero deducido en unidades de grados *o*, minutos ´o segundos ´´. Con esos argumentos dispuso la siguiente definición del radio *R* en partes de grados, minutos o segundos (Artículo 10, p. 12):

Para encontrar la cantidad de grados, minutos, segundos, etc., en un arco de igual magnitud al radio (en este caso unitario), hacemos

$$R = \frac{180°}{3.14159265} = 57.2957795° = 3437^{\prime}.74677 = 206264^{\prime\prime}.806$$

El ángulo en el centro medido por un arco igual al radio, a menudo es tomado como unidad de medida angular, ya que este ángulo será de magnitud invariable, cualquiera que sea la longitud del radio (Chauvenet, 1850, p. 13).

En si misma, la definición corresponde al actual radián aun cuando el autor no lo menciona de esa manera. El radián es la *unidad de medida angular*, la cual, siendo *x* el número de tales unidades en un ángulo dado, el número de grados, minutos, etc., se reduce a unidades del radio multiplicando por el valor de este último en grados, minutos, etc. Así, describe la magnitud del arco en unidades del radio, subtendido por el ángulo central, dado en grados, minutos y segundos:

$$\begin{gathered} x° = xR° = 57^{\circ}.2957795x = [1.7581226]x \\ x^{\prime} = xR^{\prime} = 3437^{\prime}.74677x = [3.5362739]x \\ x^{\prime\prime} = xR^{\prime\prime} = 206264^{\prime\prime}.806x = [5.3144251]x \end{gathered}$$

Recíprocamente, dado el ángulo en grados, minutos, etc., se reduce a unidades del radio,[8] dividiendo por $R°, R^{\prime}, R^{\prime\prime}$, así,

$$x = \frac{x°}{R°} = \frac{x^{\prime}}{R^{\prime}} = \frac{x^{\prime\prime}}{R^{\prime\prime}}$$

Luego, entonces, si un ángulo se expresa por la longitud del arco que mide el ángulo en el círculo cuyo radio es la unidad, se dice que el ángulo así expresado está dado en *unidades del arco*,[9] y viceversa. Si tomamos, como es usual $\pi = 3.14159265$ ..., "π es la medida circular de dos ángulos rectos, o bien la expresión de dos ángulos rectos en arco".

En un apartado posterior define las funciones trigonométricas inversas de funciones *implícitas* como $x = \operatorname{sen}^{-1} y$, para la función inversa del $\operatorname{sen} x$, así como la deducción de identidades, resolución de ecuaciones trigonométricas, incluyendo la resolución de lados y ángulos entre triángulos y las diferencias y diferenciales de cada función trigonométrica.[10] También, y usando las expresiones deducidas del $\operatorname{arc} 1^{\prime}$ y $\operatorname{sen} 1^{\prime}$, $\cos 1^{\prime}$, así como las identidades correspondientes, construyó una Tabla Trigonométrica. Por ejemplo, para deducir $\operatorname{sen} 2^{\prime}, \operatorname{sen} 3^{\prime}$ ..., hace:

---

[8] Unidades del radio o partes del radio, como se menciona en otras de las obras analizadas.
[9] Las cursivas son nuestras.
[10] Por ejemplo, asume que $\operatorname{sen} dx = dx$.

$$\mathrm{sen}2' = 2\cos 1'\mathrm{sen}1' - \mathrm{sen}0 = 0.0005817764$$
$$\mathrm{sen}3' = 2\cos 1'\mathrm{sen}2' - \mathrm{sen}1' = 0.0008726646$$
$$\ldots$$

Chauvenet utilizó diferentes herramientas de la matemática de su época para dar sentido a las proposiciones y fórmulas que establece en su obra, entre otras, se aprecian desarrollos en serie de potencias devenidos del teorema del binomio de Newton y serie de Taylor, así como el método de aproximaciones sucesivas en la resolución de ecuaciones. Incluso, sugiere los desarrollos en serie de potencias de las funciones trigonométricas para construir las tablas correspondientes.

En lo que se refiere al análisis del radián en las obras hasta aquí analizadas, aparece con regularidad la definición de este último alternando con el arco y el seno del mismo. Esta tendencia se coloca en las obras elementales escritas a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX, incluyendo la técnica para convertir magnitudes de longitud del arco en grados, actualmente diríamos convertir de radianes a grados.[11]

La definición de un arco de magnitud pequeña en partes del radio, tendría una repercusión y uso en las ciencias naturales, en la determinación de las magnitudes de elementos geométricos del planeta Tierra, en las que el $\mathrm{sen}a$, para a muy pequeño, permite trasladar con suficienciente aproximación arcos dados en grados a radianes. Daremos espacio enseguida para mostrar un ejemplo presentado en una obra elemental que justifica esto último.

3.4 Tratado Elemental de Topografía, Geodesia y Astronomía Práctica

Francisco Díaz Covarrubias (1833–1889) fue un geógrafo mexicano que contribuyó como jefe de la Oficina de Fomento en la administración juarista. Escribió varias obras elementales de diferentes facultades de la ciencia, entre otras se encuentran los Elementos de Cálculo Infinitesimal (1873), así como el Tratado Elemental de Topografía, Geodesia y Astronomía Práctica (1896, tercera edición). En esta última, en la Introducción, se preocupa por hacer distinción del alcance geográfico de dos disciplinas como la geodesia y la topografía. Ambas son dedicadas a medir extensiones superficiales considerando la esfericidad del planeta Tierra, la geodesia, mientras que en la topografía se acepta esta última como si fuera plana. Desde su extensión geométrica, ambas ciencias coinciden en el punto de contacto del esferoide con un plano tangente.

[11] Por ejemplo, en la obra de Babinet (1857, p.6) se muestra un ejemplo en el que se pide determinar el número de grados de un arco representado en magnitud por el número 17, siendo el radio unitario. Tomando la circunferencia completa de 360° y su longitud por 2π, obtiene:

$$\frac{360°}{2\pi} = \frac{17}{x} \text{ con } x = \frac{180.17}{\pi}$$

O bien $\frac{1}{\pi} = 0.31831$, de modo que $x = 974°.0286$. Restando dos circunferencias y media queda $74°01'43''$. Si se considera un círculo de radio *R* cualquiera, se tendrá:

$$\frac{360°R}{2\pi} = \frac{17}{x}$$

Sin embargo, esa disposición del radián tardaría en asentarse en las obras elementales hasta mediados del siglo XX.

Díaz Covarrubias supuso un casquete esférico y su plano tangente, engendrados respectivamente por el movimiento del arco ab (Figura 3) y la tangente AB alrededor del radio R de la Tierra, $R = OC$. Se propuso establecer la longitud expresada por la diferencia entre el arco *ab* y tangente *AB*, es decir

$$d = AB - ab \ldots(1)$$

La diferencia explica con buena aproximación los límites de la extensión que se deben dar a las operaciones topográficas o geodésicas.

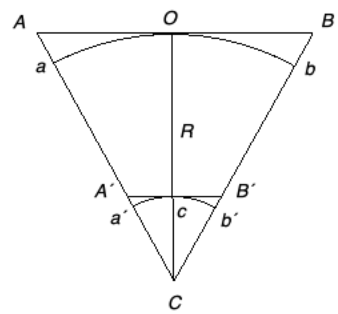


Figura 3. Casquete esférico y plano tangente engendrados por el movimiento del arco *ab.*

Considerando el radio de la Tierra como $R = OC = 6{,}366{,}738$ m,[12] construyó el arco $a´b´$ y su tangente $A´B´$ suponiendo el radio unitario para este último. En virtud de la semejanza de triángulos y sectores, se tiene $\frac{AB}{A´B´} = \frac{ab}{a´b´} = \frac{R}{1}$. O bien $AB = A´B´ \cdot R$; $ab = a´b´ \cdot R$, de modo que la ecuación para la distancia d queda como:

$$d = (A´B´ - a´b´) \cdot R \ldots(1)$$

Si enseguida se designa por c el ángulo central formado por los dos radios, resulta $a´b´ = c$, $A´B´ = 2R \cdot \tan\frac{1}{2}c$, de modo que la ecuación (1) vendrá a ser:

$$d = (2\tan\frac{1}{2}c - c) \cdot R \ldots(2)$$

En esta última se presenta la afectación al principio de homogeneidad en las magnitudes involucradas al arco c. Díaz Covarrubias asume que el arco es un *factor* del radio *R.* Para explicar esto último hizo uso de la serie de potencias que da la tangente en función del arco *m*, a saber:

---

[12] El radio de la Tierra estimado por Díaz Covarrubias es un promedio de los radios ecuatorial y polar determinados por Bessel a principios del siglo XIX, estos son, respectivamente: 6,377,397.15 y 6,356,078.96.

$$\tan m = m + \frac{1}{3}m^3 + \frac{2}{15}m^5 + \text{etc.}$$

Aplicándola al ángulo $\frac{1}{2}c$, tomando solo los primeros dos términos, se tiene: $\tan\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}c^3$, de donde $2\tan\frac{1}{2}c - c = \frac{1}{12}c^3$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2) resulta, finalmente:

$$d = \frac{1}{12}R \cdot c^3 \text{ (3)}$$

En (3) *c* está expresado **en partes del radio** *R*, lo cual depende de su valor en grados, minutos o segundos. Si se quisiera introducir por su partición en minutos, bastaría multiplicar en (3) por $\text{sen}1´$ y, entonces, haciendo la constante $\frac{1}{12}R \cdot \text{sen}^3 1´ = p$ se tendrá:

$$d = pc^3 \ldots (4)$$

Donde $p = 0.0000130591246$.

Suponiendo un arco *c* de 30´, la diferencia resulta $d = a \cdot (30´)^3 = 0.3526$ m.[13] Con estos valores la tangente $AB = 55{,}560.62$ m y el arco $ab = 55{,}560.27$, difieren en esa magnitud, de modo que, con ese arco, una extensión de 55.56 km, puede suponerse sensiblemente plana sin error considerable, 35 cm. En otras palabras, las operaciones de medición corresponden a la topografía.

No obstante, observe que el arco *ab* se deduce de la proporción vista, $\frac{AB}{A´B´} = \frac{ab}{a´b´} = \frac{R}{1}$, es decir:

$$ab = a´b´ \cdot R = c \cdot R$$

Sin embargo, en este último se aprecia el problema de justificar el principio de homogeneidad entre las cantidades. El problema es resuelto utilizando el seno del arco, en el caso del problema citado $\text{sen}1´$, que permite hacer la traslación de arcos en segundos a partes del radio, es el caso del arco de 30´, en la forma:

$$ab_{\text{en partes del radio}} = sen1´ \times 30´$$

O bien:

$ab = 0.008726646137$ partes del radio

Observe que el arco *ab* en partes del radio, corresponde a una aproximación de la magnitud del radián del arco de 30´ dispuesto como 0.5° es decir:

$$ab = \frac{0.5° \times \pi}{180°} = 0.00872664626 \text{ radianes,}$$

[13] Díaz Covarrubias utilizó logaritmos de cinco cifras decimales para las operaciones. En el escrito estas últimas son reproducidas con una calculadora.

con una diferencia del orden de 0.000000000123. Puesto que $\text{sen}1' \approx \frac{\pi}{10{,}800}$, siendo $10{,}800 = 180° \times 60$. De modo que:

$$ab_{\text{ en partes del radio}} = \frac{\pi}{10{,}800} \times 30' \text{ radianes}$$

Díaz Covarrubias fue influenciado por los argumentos geométricos dados por Chauvenet (1870) en su obra del que tomó la idea de reducir a partes del radio el arco subtendido por un ángulo dado, utilizando para ello valores muy pequeños del seno del ángulo. Estas ideas fueron utilizadas en la obra de astronomía del segundo para convertir expresiones dadas en grados a partes del radio. El A Manual of Spherical and Practical Astronomy se encuentra lleno de esta técnica. El ejemplo que se exhibe en la expresión que se muestra en la Figura 4 para la determinación de la diferencia de declinaciones, $\Delta' - \Delta$, de un astro, muestra que, operativamente, las magnitudes dadas en partes del radio son convertidas a grados, al dividir el numerador por $\text{sen}1''$.

$$\Delta' - \Delta = \frac{n^2 \sin(\Delta-\gamma)}{sin1''} + \frac{n^2 sin2(\Delta-\gamma)}{2\; sin1''} + \&\text{c}$$

Figura 4. Determinación de la diferencia de declinaciones de un astro en los que se emplea $\text{sen}1''$ para trasladar magnitudes dadas en partes del radio a ángulos: Chauvenet, 1863, p. 121.

4. Resultados

El esquema de la praxeología [T, τ, θ^{th}, Θ] que contiene al radián bajo esa forma, se puede describir de la siguiente manera:

$$\theta^{th}\colon \lim_{a\to 0} \frac{a}{\text{sen}a} = 1$$

Esa expresión corresponde a la Tecnología teórica θ^{th} la cual pertenece a la teoría Θ, que ha su vez se instala en el dominio del Análisis Real. La técnica τ que se desprende de la tecnología θ^{th} funciona como un modelo de aproximación, en la forma:

$$\tau\colon a - \text{sen}a \approx \delta$$

En la cual δ es el *error* de aproximación que se verifica con la diferencia entre las magnitudes del arco y su seno. La diferencia se descompone de dos técnicas, τ_1 y τ_2, es decir:

$$\tau_1\colon a = \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{10{,}800'} = \frac{\pi}{648{,}000''}$$

Principalmente $a = \frac{\pi}{180^0}$ corresponde al modulo actual por el cual hay que multiplicar una magnitud dada en grados para convertirla en radianes. La otra es:

$$\tau_2 \colon \mathrm{sen} a$$

En esta última a se determina a través de calcular el error δ. Este es deducido por Lefébure De Fourcy, el cual establece la técnica, deducida por Bourdon:

$$\tau_3 \colon \mathrm{sen} a > a - \frac{1}{4} a^3$$

La técnica τ_3 permite fijar el valor del $\mathrm{sen} a$ con la aproximación deseada. Lefébure ejemplifica con el $\mathrm{sen} 10''$, determinando primero el error δ, utilizando la técnica $\tau_1 \colon \mathrm{arc}\ 10'' = \frac{10''\pi}{648{,}000''} = 0.00004848136811$. Con esta $\frac{1}{4}(\mathrm{arc}\ 10'')^3$, queda:

$$\frac{1}{4}(\mathrm{arc}\ 10'')^3 < 0.000000000000032$$

Luego, aproximó el valor del $\mathrm{sen} 10''$ hasta la treceava cifra decimal, esto es:

$$\mathrm{sen} 10'' > \begin{cases} 0.000048481368110\ \ldots \\ \underline{-0.000000000000032} \end{cases}$$
$$\mathrm{sen} 10'' > 0.000048481368078\ \ldots$$

Fijándolo como:

$$T \colon \mathrm{sen} 10'' = 0.0000484813681,$$

La determinación del $\mathrm{sen} 10''$ constituye la actividad *T* que se trata de resolver con la técnica τ. La actividad *T* de establecer el $\mathrm{sen} 10''$ era necesaria debido a que las Tablas Trigonométricas, elaboradas en esa época, no estaban del todo estandarizadas.

Por su lado, la expresión para la diferencia entre el arco y la tangente $d = \frac{1}{12} R \cdot c^3$, determinada por Díaz Covarrubias (1896), corresponde a una tecnología práctica θ^p debido al empirismo de su origen, en tanto ubicada entre la topografía y geodesia. Esta última es descrita por el autor como $d = \frac{1}{12} R \cdot \mathrm{sen}^3 1' \cdot c^3$, en la que *c* es el ángulo que subtiende al arco, dado en minutos. La inclusión en la fórmula del $\mathrm{sen}^3 1'$ sirve para expresar el ángulo *c* en partes del radio *R*, o bien convertirlo a radianes. No obstante, observe que $(\mathrm{sen} 1')^3$ es una de las técnicas, τ_2, que se desprende de la tecnología matemática $\theta^{th} \colon \lim_{a \to 0} \frac{a}{\mathrm{sen} a} = 1$. Algo semejante ocurre con $\mathrm{sen} 1''$ en la determinación de la diferencia de declinaciones, $\Delta' - \Delta$, de un astro, mostrado por Chauvenet (1863) en su obra, cuya expresión $\Delta' - \Delta = \frac{n^2 \sin(\Delta - \gamma)}{\sin 1''} + \frac{n^2 \sin 2(\Delta - \gamma)}{2 \sin 1''}$ +&c., deviene a observaciones astronómicas.

Conclusiones

Las técnicas $\tau_1\!: a = \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{10{,}800'} = \frac{\pi}{648{,}000''}$ y $\tau_2\!: \mathrm{sen}a$, forman parte de la técnica $\tau\!: a - \mathrm{sen}a \approx \delta$ la cual se desprende de la tecnología matemática θ^{th}. Tanto en la matemática escolar como en las ciencias de la Tierra, la utilidad de τ_1 no prospero en la época analizada dando lugar a τ_2. Ello tiene una explicación por la forma en que fue utilizado $\mathrm{sen}a$, puesto que, operativamente, es más sencillo determinar la longitud de arco para un ángulo que le subtiende de 30´, en la forma expuesta por Díaz Covarrubias:

$$ab_{\text{en partes del radio}} = sen1' \times 30'.$$

En este caso es innecesario determinar el error δ que causa la diferencia entre las magnitudes del arco y su seno, para obtener con cierta precisión este último, debido que a mediados del siglo XIX las Tablas Trigonométricas se encontraban del todo estandarizadas, así como, también, los logaritmos de base 10 que servían de instrumento de cálculo. Las operaciones se realizaban bajo ese esquema y se reducían utilizando constantes numéricas, como en el caso del producto $p = \frac{1}{12}R \cdot \mathrm{sen}^3 1' = 0.0000130591246$, lo cual hacia más expedita la algoritmia.

En lo que se refiere a la técnica $\tau_1\!: a = \frac{\pi}{180°}$, comenzó a ser utilizada en los textos de Geometría de mediados del siglo XX, no tanto por la declaración de James Thomson quien la hubo adoptado en 1873 con la denominación del radián, sino por la tendencia de desaparecer la trigonometría como disciplina subsidiaria de la astronomía, la navegación, agrimensura y la geodesia, siendo originalmente incluida en algunos capítulos de esta disciplina (Baldor, 2004, Introducción). La mitad del siglo XX vislumbra, también, el declive del establecimiento de una primera proposición para la escritura de obras elementales y, en consecuencia, da paso a la definición de libros de texto semejantes en su definición a los actuales.

Alrededor de las tecnologías prácticas θ^p, mostramos que estas son integradas por técnicas τ que pertenecen a tecnologías matemáticas θ^{th}, lo cual constituye un fenómeno transpositivo de saberes entre disciplinas, esto que Castela (2009) llama *codeterminación entre praxeologías*. La codeterminación ocurre gracias a los elementos comunes alojados en ambas, en este caso el ancestral concepto de ángulo que elimina, para las instituciones involucradas, las restricciones para el uso de la técnica τ_2. En la figura 4 se indica cómo la técnica τ_2, que pertenece a τ, es utilizada y compartida por las instituciones I_u: Astronomía, Geodesia y Topografía.

$$I \rightarrow \begin{bmatrix} T & \tau\!: \tau_1, \tau_2 & \theta^{th} & \Theta \\ \square & \tau_2 & \theta^{p} & \square \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow I_{th}\!: \text{Trigonometría} \\ \leftarrow I_u\!: \text{Astronomía, Geodesia, Topografía} \end{array}$$

Figura 5. Modelo extendido de la TAD que muestra la posición de la técnica τ_2 en las instituciones teórica θ^{th} (Trigonometría) y práctica θ^p: Astronomía, Geodesia y Topografía.

La técnica τ_2 cohabita, y actúa, además, con otros elementos propios de la Tecnología práctica, como son los ángulos que definen la declinación del astro: Δ' y Δ, así como, también, el ángulo γ obtenido directamente de las observaciones astronómicas, en el caso mostrado de Chauvenet (1863). De manera semejante, en la expresión de la longitud determinada por Díaz Covarrubias (1896), $d = \frac{1}{12} R \cdot \text{sen}^3 1'c^3$, la técnica τ_2 opera sobre el ángulo *c*.

La pregunta obligada que resta es ¿Será posible devolver estos conocimientos al salón de clases para mejorar el aprendizaje del radián?

Referencias bibliográficas

BABINET, M. 1857. *Calculs pratiques appliques aux sciences d´*observation. Paris: Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire.

BALDOR, A. 2004. Geometría plana y del espacio y trigonometría. México: Compañía Cultural Editora de Textos Americanos, Vigésima Reimpresión.

BOURDON, M. 1854. Trigonométrie rectiligne et sphérique. Paris: Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire.

CAJORI, F. 1993. A history of mathematical notations. New York, Dover Publications Inc (Reimpression).

CAMACHO, A. 2005. Sistemas sintéticos: lo inteligible en los manuales para la enseñanza. *Cinta moebio* 22: 1–18.

CAMACHO, A., y ROMO-VÁZQUEZ, A. 2015. Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 443–453

CASTELA, C. 2009. La noción de praxeología: Un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posible útil para la Socioepistemología. En Lestón Patricia (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME-22* (pp. 1195–1205). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

CASTELA C., y ROMO-VÁZQUEZ A. 2011. Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79–130.

CHEVALLARD Y. 2007. Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In RUÍZ-HIGUERAS L., Estepa A., García F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas.*

Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (pp. 705–746). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

CHAUVENET, W. 1850. A treatise on plane and spherical trigonometry. Philadelphia: J. B. Lippincott and Co.

CHAUVENET, W. 1863. A manual of spherical and practical astronomy. Philadelphia: J. B. Lippincott and Co.

DÍAZ COVARRUBIAS, F. 1896. Tratado Elemental de Topografía, Geodesia y Astronomía Práctica. México: Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento, tercera edición.

DORFLING, R. 1960. Matemáticas para ingenieros y técnicos. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, S. A.

LACROIX, S-F. 1799. Élements de géometrie à l´usage de l´École Centrale des Quatre Nations. Paris: Chez Courcier, Imprimeur-Libraire.

LACROIX, S-F. 1807. Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et spérique et application de l´algèbre á la géométrie. Paris: Chez Courcier, Imprimeur-Libraire.

LEFEBURE DE FOURCY, L-E. 1836. Éleméns de trigonométrie. Paris: Bachelier, Libraire de L´École Polytechnique, troisième édition.

Alberto Camacho-Ríos
Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua II – TecNM Chihuahua II – México

E-mail: alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx

Verónica Valenzuela-González
Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua II – TecNM Chihuahua II – México

E-mail: veronica.vg@chihuahua2.tecnm.mx

Marisela Caldera-Franco
Tecnológico Nacional de México campus Chihuahua II – TecNM Chihuahua II – México

E-mail: marisela.cf@chihuahua2.tecnm.mx