Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 24, nº48 - pp. 33–50
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UMA HISTÓRIA SOBRE A TRACTRIZ

Gabriel Faria Vieira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM – Brasil

Mônica de Cássia Siqueira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM – Brasil

(aceito para publicação em fevereiro de 2024)

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar parte de um estudo histórico sobre a Tractriz. A metodologia utilizada foi a histórico documental. A partir da carta escrita por Huygens endereçada à Beauval, entre 1691 e 1695, apresentamos uma compreensão da curva e dos métodos utilizados por Huygens, além de uma construção deste método utilizando o software GeoGebra para uma representação matemática da curva.

Palavras-chave: Matemática, História, Huygens, Tractriz.

[A STORY ABOUT THE TRACTIX]

Abstract

The aim of this article is to presente a part of a historical study about the Tractrix. The methodology used here was the historical documentary. From a letter written by Huygens to Beauval, between 1691 and 1695, we present a comprehension of the curve and of the methods used by Huygens, besides a construction of this method using the software Geogebra to a mathematical representation of the curve.

Keywords: Mathematics, History, Huygens, Tractrix.

1. Introdução

Este trabalho fez parte da iniciação científica desenvolvida pelos autores durante o ano de 2019 na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Na ocasião, decidimos pesquisar a História da Matemática, área de atuação da professora orientadora, e decidimos estudar algumas curvas que usassem o cálculo diferencial e integral que havia sido sistematizado por Leibniz e Newton no século XVII, assim apresentamos nossos estudos sobre a Tractriz.

Nossa pesquisa é classificada, segundo Mendes (2012) como estudos e pesquisas em História e Epistemologia da Matemática, pois estudamos "a evolução de algum conceito ou teoria, temas específicos de Matemática".

Na pesquisa histórica, segundo Bloch (2001, p. 65), "A incompreensão do presente nasce fatalmente da ignorância do passado. Mas talvez não seja menos vão esgotar-se em compreender o passado se nada se sabe do presente." Isso significa que o historiador busca realizar um processo de reconstrução, baseado nas informações disponíveis; entretanto, é difícil obter a verdade sobre um fato histórico, pois as informações podem diferir quanto ao objeto, fontes e métodos de pesquisa. Assim, o que se procura fazer durante a pesquisa em História da Matemática é utilizar diversas fontes para que possamos nos aproximar, o máximo possível, do objeto histórico em questão (Mendes, 2012).

Miranda e Silva (2013) apontam que, para fazer a pesquisa em História da Matemática devemos levantar perguntas que nos permitam conhecer a cultura matemática praticada então e, se possível, relacioná-la com o presente.

Neste artigo fizemos como apontado por Miranda e Silva, e apresentamos o problema da Tractriz, em seguida uma versão atual do problema resolvido e, por último uma solução apresentada por Huygens, acompanhada de nossa interpretação geométrica usando o software GeoGebra.

2. O Problema da Tractriz

De acordo com Baron e Bos (1974), supõe-se que o problema da Tratória (ou Tractriz) tenha sido proposto por Claude Perrault (1613–1688), e consiste em encontrar qual a curva formada quando um objeto qualquer é arrastado por uma corda, sendo esta arrastada em linha reta; ele teria ilustrado o problema utilizando seu relógio de bolso, colocando-o sobre a mesa e puxando a corrente pela ponta, fazendo o relógio deslizar ao longo da mesa. Em termos matemáticos, o problema resume-se a definir uma curva na qual, em todos os seus pontos, a reta tangente à estes encontra o eixo a uma mesma distância.

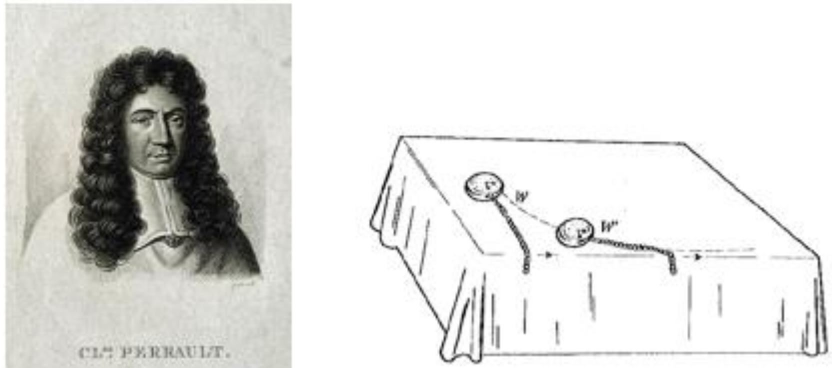


Figura 1: Claude Perrault demonstrou o problema utilizando seu relógio de bolso

Fonte 1: http://blog.wellcomelibrary.org/wpcontent/uploads/2013/10/a0975931dbeb6780fb0959d3908.jpg e Baron e Bos, 1974, p.30

Ainda segundo Baron e Bos (1974) vários autores trabalharam com essa curva, como Leibniz (1646–1716), Newton(1643–1727), Huygens (1629–1695), Jakob Bernoulli (1655–1705), dentre outros. Tal problema se enquadrava nos chamados problemas de tangente inversa (nestes, dada determinada propriedade das tangentes de uma curva, devia-se descobrir qual curva origina tais tangentes). O desenvolvimento de tal problema recai numa equação diferencial e, hoje sabemos que para sua solução, é necessário usar a função logarítmica.

2.1 A Tractriz Atualmente

De acordo com Raposo (2013), a tractriz também é conhecida como *curva do cão*, pela seguinte analogia: um cão está parado e seu dono o puxa pela coleira. O dono se move em linha reta, arrastando o cão. A trajetória do cão arrastado forma uma tractriz. Outro exemplo que lembra a curva tractriz é a curva feita por veículos articulados, uma vez que, a partir do momento que a parte dianteira termina a curva e passa a andar em linha reta, ela puxa a parte traseira, formando assim a curva. A tractriz é dita também uma curva de *perseguição*.

De acordo com Albuquerque e Ribeiro (2015), temos a função $f(x)$, equivalente à tractriz, e temos que $y = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nela, temos um ponto qualquer $P = (x, y)$, e a reta $\overleftrightarrow{AP}$ é tangente à $f(x)$ no ponto P; $A = (x_A, 0)$ corresponde ao ponto em que a reta tangente intercepta o eixo das abscissas. A distância entre os pontos A e P é constante e igual à a, $a \in \mathbb{R}$. Temos também que o ponto $P_0 = (0, a)$ encontra-se na curva.

Podemos descobrir a equação da reta que passa por P e A utilizando a equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = m(x - x_A) \Leftrightarrow y = f'(x)(x - x_A) \qquad (2.1)$$

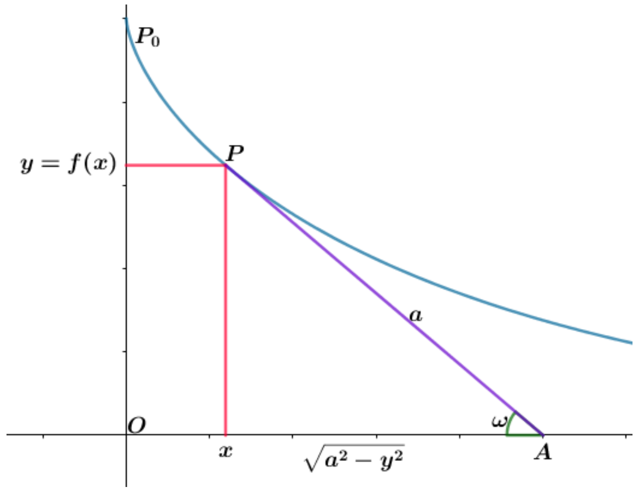


Figura 2: Representação da Tractriz

Fonte 2: Adaptado de Albuquerque e Ribeiro (2005, p. 5)

Note que A, P, e $x = x(P)$ formam o triângulo retângulo APx. Podemos então utilizar uma das relações métricas do Triângulo Retângulo[1]. Então:

$$(x - x_A)^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 = a^2 - y^2 \Leftrightarrow x - x_A = \pm\sqrt{a^2 - y^2}, \text{ e da eq. (2.1)}$$
$$y = f'(x) \cdot \left(\pm\sqrt{a^2 - y^2}\right) \qquad (2.2)$$

Então, a partir da equação (2.2) temos que a equação da curva procurada é dada pelo seguinte problema de valor inicial (pvi):

$$\begin{cases} f'(x) = \pm \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ f(0) = a \end{cases} \qquad (2.3)$$

Inicialmente podemos utilizar a técnica de separação de variáveis na equação diferencial ordinária (edo) do pvi (2.3):

$$f'(x) = \pm\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \Leftrightarrow$$
$$\int dx = \pm\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy \qquad (2.4)$$

[1] Conhecida, equivocadamente, por Teorema de Pitágoras.

Com o intuito de auxiliar nas operações, vamos fazer a seguinte substituição na equação (2.4):

$$y = a \sin \omega$$

$$x = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \omega}}{a \sin \omega} \cdot a \cos \omega \, d\omega =$$
$$\pm \int a\sqrt{1 - \sin^2 \omega} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin \omega} d\omega = \pm a \int \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} d\omega = \pm a \int \frac{1 - \sin^2 \omega}{\sin \omega} d\omega =$$
$$= \pm a \left(\int \frac{1}{\sin \omega} d\omega - \int \sin \omega \, d\omega \right) = \pm a \left(\int \csc \omega \, d\omega - \int \sin \omega \, d\omega \right) =$$

$$x = \pm a[-\ln(\csc \omega + \cot \omega) + \cos \omega] + k, k \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Pela substituição $y = a \sin \omega$, podemos estabelecer as seguintes relações trigonométricas no triângulo Apx:

$$\cos \omega = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a}; \ \csc \omega = \frac{1}{\sin \omega} = \frac{a}{y}; \ \cot \omega = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

Substituindo no resultado encontrado na equação (2.5), temos:

$$x = \pm a \left[-\ln \left(\frac{a}{y} + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \right] + k, k \in \mathbb{R}$$

E portanto, a solução da EDO do PVI é dada por:

$$x = \pm a \left[-\ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \right] + k, k \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Pelo PVI, temos que $f(0) = a$, ou seja, se $x = 0$, então $y = a$. Daí, substituindo na equação (2.6):

$$0 = \pm a \left[-\ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a^2}}{a} \right) + \frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} \right] + k \Leftrightarrow \pm a(-\ln 1) + 0 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Então chegamos a equação cartesiana da curva:

$$x = \pm a\left[-\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)+\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}\right] \tag{2.7}$$

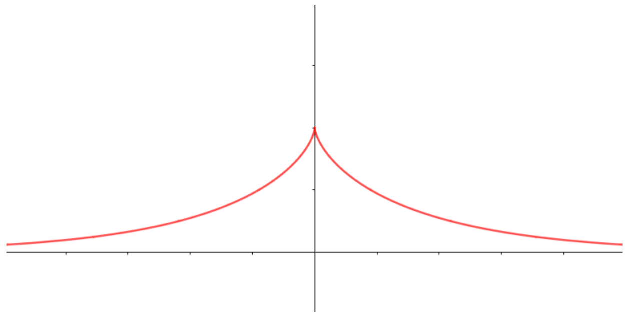


Figura 3: A Tractriz

Fonte 3: Autoria Própria utilizando o GeoGebra

3. Tractriz: Curva Geométrica ou Curva Macânica

Como já dito antes, pensa-se que o problema da tractriz foi proposto a Leibniz por Claude Perrault, o qual o descreveu utilizando seu relógio de bolso. No entanto, segundo Raposo (2013), inicialmente não conseguiram obter uma resposta para o problema. Seis anos mais tarde, Isaac Newton demonstrou que o comprimento entre o ponto em que a reta tangente toca a curva e o ponto em que toca o eixo das abscissas é constante, podendo a tractriz também ser chamada de curva equitangencial. Em 1692, Huygens dedicou-se também ao estudo dessa curva, denominando-a tractriz, encontrando uma expressão analítica que a caracterizasse e a generalizasse.

Bos (1988) diz que Leibniz teria solucionado o problema, mas não teria publicado seus resultados por cerca de 20 anos. Após Huygens publicar seus estudos sobre a curva em 1693, tanto Leibniz quanto os irmãos Jakob e Johann Bernoulli demonstraram interesse na Tractriz. Durante o século XVII, os cientistas acreditavam que as curvas eram traçadas pelo movimento e, embora inicialmente a matemática da época não creditasse à Tractriz o status de curva geométrica, esta acabou adquirindo tal posto posteriormente.

Mas o que diferenciava curvas geométricas das não geométricas? De acordo com Merli (2016), os geômetras gregos as diferenciavam pelo uso de máquinas em sua construção: aquelas que se pudesse traçar utilizando apenas réguas e compasso, seriam curvas geométricas e, as que necessitassem de outros materiais seriam curvas não geométricas, isto é, curvas mecânicas. Entretanto, Descartes apud. Merli (2016, p. 118) dizia que:

> “(...) *não posso compreender porque as denominaram mecânicas de preferência a geométricas; pois dizer que a causa é ter de servir-se de*

> *alguma máquina para traçá-las tornaria necessário incluir também nelas os círculos e as rectas, dado que para desenhá-las sobre o papel se requere um compasso e uma régua, que podem também considerar-se máquinas.*" (DESCARTES apud. MERLI, 2016, p. 118)

Descartes propõe então outro modo de diferenciar as curvas geométricas das curvas mecânicas: sua exatidão (Merli, 2016). Ele utiliza tal argumento para sustentar que "as curvas que são passíveis de serem construídas por um movimento contínuo são consideradas precisas e exatas, logo são chamadas de geométricas" (MERLI, 2016, p. 119). Já as que não seguissem tal critério seriam curvas mecânicas, como, por exemplo, a espiral e a quadratriz, "por poderem imaginar-se descritas por dois movimentos que não têm entre si nenhuma relação que possa medir-se exactamente" (DESCARTES apud Merli, 2016, p. 119).

Segundo Bos (1988), o estudo de curvas como a Tractriz levou os cientistas da época a trabalharem com curvas, que hoje denominamos transcendentais, com as quais estes não estavam habituados. Isso se deve ao fato que as resoluções da época deveriam ser geométricas; mesmo com o advento do Cálculo Infinitesimal, resoluções puramente algébricas ainda não eram totalmente aceitas. Isto poderia ser feito, por exemplo, provendo um meio de construção da curva, o que não era uma tarefa fácil para as curvas transcendentais.

Ainda segundo Bos (1988), as curvas algébricas poderiam ser traçadas por meio da geometria cartesiana (por sua equação); o mesmo não poderia ser feito para as curvas transcendentais. Estas foram então, excluídas da geometria cartesiana. Posteriormente, essa perspectiva veio a ser desaprovada. Não seria a primeira vez que o conceito de construção de curvas seria reformulado. Antes de Descartes, a construção de curvas era usualmente feita utilizando-se régua e compasso, dados determinados processos.

Bos (1988) nos diz que alguns desses processos eram preferíveis a outros, sendo que alguns sequer eram aceitos. Quanto às preferências, pode-se dizer que "os principais conceitos por trás desses critérios eram exatidão e simplicidade" (BOS, 2016, p.13). Devemos notar, porém, que isso abre margem para incertezas, afinal exatidão e simplicidade não são possíveis de se medir. Também se faz necessário notar que os processos de construção eram, usualmente, intuitivos, isto é, não necessariamente seria possível traçá-los de forma precisa.

De acordo com Bos (1988), tais processos intuitivos possuíam certa utilidade para desenvolver problemas geométricos. Estes problemas geralmente consistiam em, dada determinada propriedade de um objeto geométrico, descobrir qual objeto atendia à tais propriedades e formular um método de construção deste. Esses métodos eram utilizados como a representação de uma curva, antes das equações cartesianas serem introduzidas. Tais equações poderiam ser utilizadas na representação de curvas algébricas, mas não havia a simbologia necessária para a representação de curvas transcendentais.

Ainda de acordo com Bos (1988), as curvas algébricas foram descritas por Descartes como geométricas, enquanto as não-algébricas foram descritas como mecânicas. De fato, as curvas mecânicas, que hoje conhecemos como transcendentais, não poderiam ser estudadas pelos métodos algébricos, o que acabou causando um choque de interesses quando os matemáticos do século XVII voltaram sua atenção à tais curvas. Estas apareciam, por exemplo, em problemas de tangente inversa, problemas nos quais, dada determinada propriedade das tangentes de uma curva, deveria-se descobrir qual curva gerava tais tangentes; tais problemas correspondem atualmente, a resolução de equações diferenciais de primeira ordem.

Como os métodos cartesianos não eram adequados para lidar com curvas transcendentais, estes deram lugar aos métodos infinitesimais. Entretanto, mesmo usando tais métodos não era fácil descrever uma curva deste tipo. Como já dito anteriormente, faltava notação para as exprimir em equações, restando apenas representar as curvas transcendentais utilizando algum método de construção, o que também não era fácil, pois não era possível se utilizar dos métodos cartesianos, os quais até então, eram considerados certo padrão na matemática europeia (Bos, 1988).

4. Uma Tradução do Problema Original da Tractriz: Huygens

O texto a seguir constitui uma tradução livre[2] de uma correspondência entre Huygens e H.Basnage de Beauval (1757 - 1810). A carta foi publicada em conjunto com diversas outras correspondências, na série de livros Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, sob número 2793. O livro utilizado em nosso contexto foi Correspondance [de Christiaan Huygens], 1691-1695. Tal livro foi publicado pela Sociedade Holandesa das Ciências, com a data de edição entre 1888 e 1950. Acredita-se que a carta utilizada aqui foi escrita em fevereiro de 1693. Optamos por utilizar a carta pois trata-se de uma fonte primária, isto é, não utilizamos traduções desta para outros idiomas.

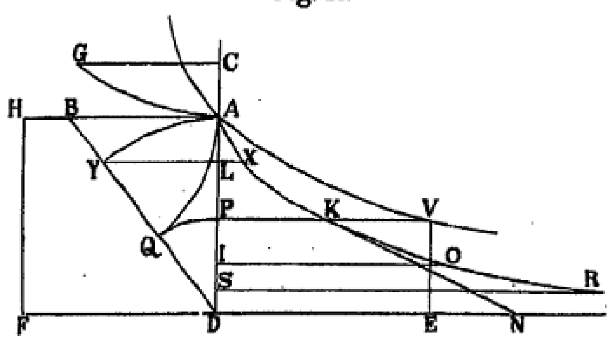
4.1 Uma Tradução

"*Eu não sei se existem muitas linhas curvas que possuem esta propriedade, que seu comprimento pode ser medido por ela mesma. No entanto, aqui está uma que eu conheci há não muito tempo atrás, que, como você verá, ainda é digna de nota por outras coisas. É (Fig. II) a curva $AXKO$, estendida até o infinito ao longo de uma linha que é a sua assíntota, DN; à qual AD, tangente ao vértice A, é perpendicular, & cuja propriedade principal, & muito simples, é que toda tangente entre o ponto de contato e a assíntota, como KN, é igual à linha AD.*

[2] Consideramos tradução livre a tradução praticada na intenção e objetivo do contexto geral do texto, onde iremos passar ao leitor a ideia e pensamento do autor.

Figura 4: Figura II descrita por Huygens

Fig. II.



Fonte 4: Huygens, 1693, p.408

Ela se estende da mesma maneira do outro lado da perpendicular DA. Para encontrar uma linha igual a uma determinada parte dessa curva a partir do vértice A, como AK (porque teremos isso para qualquer outra porção), temos que conduzir KP perpendicular à AD e descrever um arco circular PQ tendo D como o centro e DP de meio diâmetro, encontrar em AB paralelo à assíntota, o ponto B, que é o centro da circunferência que passa por A e toca o arco PQ, o que é fácil. Após ter conduzido à retilínea BD devemos assumir DY , igual à DA, & do ponto Y traçar uma paralela à assíntota até a curva em X. Então esse YX será igual à curva AK. E a natureza dessa linha é tal, que quando tomamos proporcionalmente o quanto queremos na linha AD depois de D, como DS, DI, DP, & aplicamos SR, IO, PK; as partes interceptadas da curva, como RO, OK, são todas iguais.

Ela ainda serve a quadratura da hipérbole. Porque a mesma linha YX cria com AD um retângulo igual a um espaço hiperbólico $ADEV$, terminado por AD, VE, perpendiculares à FDE, uma das assíntotas, quais perpendiculares são em razão de AD à DP; a hipérbole AV sendo equilateral, & seu quadrado no ângulo das assíntotas sendo $ADFH$. Daí vemos reciprocamente como podemos encontrar os pontos dessa curva, assumindo a quadratura da hipérbole."

4.2. Uma interpretação

Nessa primeira parte, Huygens (1693) nos dá uma construção pela qual é possível verificar o comprimento da Tractriz. Para isso, ele primeiramente considera a curva como dada, sendo ela $AXKOR$, e sua assíntota é a semirreta $\overrightarrow{DN}$ (pode-se pensar que $\overrightarrow{DN}$ faz o papel do eixo das abscissas). $\overline{AD}$ é perpendicular à $\overline{DN}$, e contém o ponto A, que é o vértice da curva. Huygens complementa trazendo a principal propriedade da curva: se K é um ponto qualquer da curva e $\overleftrightarrow{KN}$ sua tangente, temos que o segmento $\overline{KN}$ é igual ao segmento $\overline{AD}$.

Após explicar que a curva também se estende para os dois lados de $\overline{AD}$ a partir de A, ele traz uma construção que permite determinar o comprimento da curva, de seu vértice até um ponto K qualquer, na forma de um segmento de reta, além de mostrar que ela pode ser utilizada na quadratura da hipérbole.

Aqui reproduzimos a construção usando o software Geogebra, como pode ser visto na *Figura 5*.

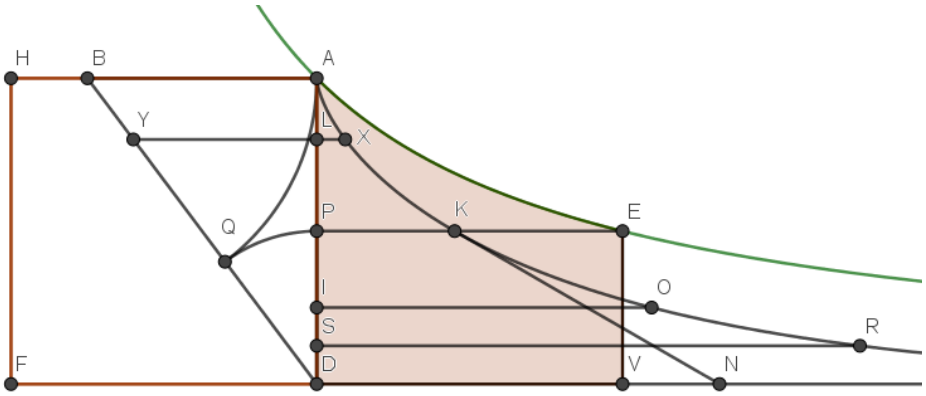


Figura 5: Reconstrução da curva

Fonte 5: Autoria Própria utilizando o GeoGebra

Para acompanhar a construção de Huygens, fizemos essa reconstrução no GeoGebra[3]. Deixamos um passo a passo da construção no software, bastando apenas digitar na barra de comando o seguinte:

1. Criar o controle deslizante a: $a =$*ControleDeslizante*$(0{,}5)$.
   Apesar de ter início no 0, o número a deve ser maior que ele, isto é, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Criar a curva $\begin{cases} x = a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-t^2}}{t}\right) - \sqrt{a^2-t^2} \\ y = t \end{cases}, 0 < t \leq a,$
   utilizando o seguinte comando: $c =$*Curva*$\left(a * \ln\left(\left(a + sqrt(a^2 - t^2)\right)/t\right) - sqrt(a^2 - t^2), t, t, 0, a\right)$

3. Criar o controle deslizante b, onde $0 < b < a$, $b \in \mathbb{R}$: $b =$*ControleDeslizante*$(0{,}5)$.
   Criar os pontos A, D, K e P: $A = c(a)$; $D =$*Interseção*(EixoX, EixoY); $K = c(b)$; e $P = (0, y(K))$.

[3] Usamos a versão 5.0 e 6.0. Usando o programa online, na versão calculadora gráfica não é possível efetuar a construção.

4. Criar a reta t tangente à c por K: t =*Tangente*(K, c). Criar o ponto N: N =*Interseção*$(t$, EixoX)

5. Traçar os segmentos $AD = \overline{AD}$, $DP = \overline{DP}$ e $KP = \overline{KP}$: AD =*Segmento*(*A*,*D*); DP =*Segmento*(*D*,*P*); e KP =*Segmento*(*K*,*P*)
   Traçar a semirreta $DN = \overrightarrow{DN}$: DN =*Semirreta(D,N)*

6. Criar o círculo p de centro D e raio DP: p =*Círculo*(*D*,*DP*)

7. Traçar a reta r que passa por A e é paralela à $\overleftrightarrow{DN}$: r =*Reta*(*A*,*DN*)

8. Criar o número n: $n = ((AD)^2 - (DP)^2)/(2DP)$)
   Criar o círculo o de centro A e raio n: o =*Círculo*(*A*,*n*)

9. Criar o ponto B, correspondente à intersecção de r e o: B =*Interseção*(*r*,*o*)
   Note que dois pontos serão formados, B_1 e B_2; entretanto, estamos interessados apenas naquele à esquerda do eixo das ordenadas, que geralmente é nomeado como B_1. Para renomeá-lo como B, clique nele com o botão direito do mouse e então em *Renomear*.

10. Traçar o segmento $AB = \overline{AB}$: *AB* =*Segmento*(*A*,*B*)
    Traçar o círculo *q* de centro *B* e raio *AB*: *q* =*Círculo*(*B*,*AB*)
    Marcar *Q*, a interseção de *p* e *q*: *Q* =*Interseção*(*p*,*q*)

11. Traçar o segmento $BD = \overline{BD}$: BD =*Segmento(B,D)*
    Traçar o círculo s de centro D e raio $\overline{AD}$: s =*Círculo(D,AD)*
    Marcar o ponto Y como a intersecção de BD e s: Y =*Intersecção(BD,s)*

12. Criar o ponto L: L =(0,y(Y))
    Criar o ponto X: X =c(y(L))
    Criar o segmento $YX = \overline{YX}$: YX =*Segmento(Y,X)*

13. Para que a construção não fique com muitos detalhes, sugiro ocultar os círculos o, s, a reta r e o ponto B_2. Isso pode ser feito clicando-se neles com o botão direito do mouse e em seguida em *Exibir Objeto*. Sugiro também ocultar a reta t e substituí-la pelo segmento $KN = \overline{KN}$.
    Ocultar e substituir também os círculos p e q pelos arcos j e k: KN =*Segmento(K,N)*; j =*ArcoCircular(D,P,Q)*; k =*ArcoCircular(B,Q,A)*

14. Criar os pontos F e H: F =*(-AD,0)* e H =*(-AD,y(A))*
    Criar o polígono $ADFH$: *Polígono(A,D,F,H)*

15. Criar a hipérbole $g(x)$ que passar por A e tem como assíntotas DN e FH: $g(x)$ *=a²/(a+x)*

16. Criar o número m: m *=(a²-a*b)/b*
    Criar o ponto E: E *=(m,g(m))*
    Criar o ponto V: V *=(x(E),0)*
    Criar o segmento $VE = \overline{VE}$ e $KE = \overline{KE}$: VE *=Segmento(V,E)* e KE *=Segmento(K,E)*

17. Criar o ponto I: I *=(0,DP/2)*
    Criar o ponto O: O *=c(y(I))*
    Criar o ponto S: S *=(0,DP/4)*
    Criar o ponto R: R *=c(y(S))*

18. Criar os segmentos $IO = \overline{IO}$ e $SR = \overline{SR}$: IO *=Segmento(I,O)* e SR *=Segmento(S,R)*

19. Criar a integral i: i *=Integral(g,0,m)*
    Criar o comprimento de arco AK: AK *=Comprimento(c,A,K)*
    Criar o número u: u *=AD*YX*
    Observe que $AK = YX$, e também $i = u$

No parágrafo seguinte, Huygens dá detalhes sobre como a Tractriz pode ser utilizada na quadratura da hipérbole. Para tal, ele considera a área abaixo da hipérbole começando no ponto A, que corresponde a um extremo da Tractriz, e terminando em E, um ponto na hipérbole tal que sua distância até a assíntota seja igual à $\overline{DP}$. Para que tal quadratura seja possível, são necessárias algumas condições; a hipérbole em questão deve conter o ponto A e possuir $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{FD}$ como assíntotas, estendendo-se de maneira equilateral em ambos os lados destas. Se estas condições forem atendidas, a área abaixo da hipérbole de A à E será $a \cdot \overline{YX}$, ou seja, o produto de $\overline{YX}$ por $\overline{AD}$. Deste modo, Huygens também conclui que, dada a quadratura da hipérbole, é possível construir a Tractriz fazendo o processo inverso.

Bos (1988) nos diz que a carta de Huygens não incluía explicações sobre como ele havia chegado a esses resultados. Estas explicações ficaram restritas a seus manuscritos, e não são fáceis de se compreender. Então, Bos traz a sua explicação sobre a relação da Tractriz com a quadratura da hipérbole.

Primeiramente Bos (1988) traz nomenclaturas para alguns segmentos: $\overline{LX} = x$, $\overline{LD} = y$, $DV = u$, $\overline{EV} = \overline{DP} = v$, $\overline{BA} = w$ e $\overline{YL} = z$. Essas escolhas podem ser justificadas se pensarmos no sistema de eixos cartesianos. O ponto D seria a origem. Então, $\overleftrightarrow{DN}$ faria o papel de eixo das abscissas (eixo x) e $\overleftrightarrow{AD}$ o papel de eixo das ordenadas (eixo y). O ponto X na Tractriz teria coordenadas $X = (x, y)$, logo $\overline{LD} = y$ e $\overline{LX} = x$. O mesmo acontece para a hipérbole; tem-se D como origem, $\overleftrightarrow{DV}$ como eixo das abscissas (eixo u) e $\overleftrightarrow{AD}$ como eixo das ordenadas (eixo v). O ponto V na hipérbole teria coordenadas $V = (u, v)$, e portanto $DV = u$ e $EV = v$; e como $\overline{DP} \equiv \overline{EV}$, $\overline{DP} \equiv \overline{EV} = v$. Além disso, temos que $\overline{AD} = a$.

Segundo Bos (1988), como o ponto $X = (x, y)$ está na Tractriz, então, da equação (2.7):

$$\begin{aligned}\overline{LX} = x &= a \ln\left(\frac{\overline{AD} + \sqrt{(\overline{AD})^2 - (\overline{LD})^2}}{\overline{LD}}\right) - \sqrt{(\overline{AD})^2 - (\overline{LD})^2} \\ &= a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}\end{aligned} \tag{4.2}$$

A hipérbole que satisfaz as condições dadas por Huygens é tal que:

$$\overline{VE} = \frac{(\overline{AD})^2}{\overline{AD} + \overline{DV}} \Leftrightarrow v = \frac{a^2}{a + u} \Leftrightarrow (a + u)v = a^2 \Leftrightarrow a + u = \frac{a^2}{v} \tag{4.3}$$

Além disso, por uma das relações métricas do triângulo retângulo, temos que:

$$\begin{aligned}(\overline{DY})^2 = (\overline{LD})^2 + (\overline{YL})^2;\ \overline{DY} \equiv \overline{AD} \Rightarrow (\overline{AD})^2 = (\overline{LD})^2 + (\overline{YL})^2 \Leftrightarrow a^2 \\ = y^2 + z^2 \Leftrightarrow z^2 = a^2 - y^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{a^2 - y^2}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Pela mesma relação citada anteriormente:

$$\begin{aligned}(\overline{DQ} + \overline{BQ})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{BA})^2 \Leftrightarrow (\overline{DP} + \overline{BA})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{BA})^2 \\ \Leftrightarrow (v + w)^2 = a^2 + w^2 \Leftrightarrow v^2 + 2vw + w^2 = a^2 + w^2 \\ \Leftrightarrow w = \frac{a^2 - v^2}{v}\end{aligned} \tag{4.5}$$

A expressão (4.5) nos permite determinar o ponto B em $\overleftrightarrow{BA}$; $\overline{BA}$ deve ser tal que $\overline{BA} = \frac{(\overline{AD})^2 - (\overline{DP})^2}{\overline{DP}}$.

Em seguida, Bos (1988, p. 27-28) nos dá a área $ADEV$ e faz uma comparação mostrando que o retângulo citado por Huygens possui a mesma área. Podemos calcular a área $ADEV$ utilizando métodos modernos, tais como o Cálculo. Observando a Figura 5, vemos que a área $ADEV$ tem início no ponto $A = (0, a)$ e término no ponto $V = (u, v)$. Assim, utilizando os eixos u e v propostos anteriormente, teremos que:

$$ADEV = \int_0^u \frac{a^2}{a+u}\,du = a^2 \ln(a+u)|_0^u = a^2 \ln(a+u) - a^2 \ln(a)$$
$$= a^2 \ln\left(\frac{a+u}{a}\right) = a^2 \ln\left(\frac{\frac{a^2}{v}}{a}\right) = a^2 \ln\left(\frac{a}{v}\right) \tag{4.6}$$

Huygens (1693) propôs que o retângulo de lados $\overline{AD}$ e $\overline{YX}$ é igual à área $ADEV$. Bos (1988) parte então para verificação. Segundo Bos, o retângulo citado tem área $\overline{AD} \cdot \overline{YX} = a \cdot \overline{YX} = a \cdot \left(\overline{YL} + \overline{LX}\right)$; na notação proposta, e utilizando as equações (4.4) e (4.2):

$$ADYX = a \cdot (z + x) = a \cdot \left(\sqrt{a^2 - y^2} + a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2 - y^2}\right)$$
$$= a^2 \ln\left(\frac{a+z}{y}\right) = a^2 \ln\left(\frac{a}{y} + \frac{z}{y}\right) \tag{4.7}$$

Então, segundo Bos (1988), se $\frac{a+z}{y} = \frac{a}{v}$, a área $ADEV$ é igual ao retângulo $ADYX$. Bos então indica que, pela construção, os triângulos DBA e DYL são semelhantes (possuem o ângulo reto e o ângulo $B\widehat{D}A$ em comum); além disso, $\overline{BQ} \equiv \overline{BA}$, $\overline{DQ} \equiv \overline{DP}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{DY} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{\overline{AD}}{\overline{LD}} = \frac{\overline{DY}}{\overline{LD}}$ e por semelhança de triângulos:

$$\frac{\overline{DY}}{\overline{LD}} = \frac{\left(\overline{BQ} + \overline{DQ}\right)}{\left(\overline{AD}\right)} = \frac{\overline{BA} + \overline{DP}}{\overline{AD}} = \frac{w+v}{a}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{\overline{YL}}{\overline{LD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} = \frac{w}{a}$$

Portanto, substituindo na equação (4.7):

$$a^2 \ln\left(\frac{a}{y} + \frac{z}{y}\right) = a^2 \ln\left(\frac{v+w}{a} + \frac{w}{a}\right) = a^2 \ln\left(\frac{v}{a} + \frac{2w}{a}\right)$$
$$= a^2 \ln\left(\frac{a}{v} + \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2 - v^2}{2v}\right) = \tag{4.8}$$
$$a^2 \ln\left(\frac{v}{a} + \frac{(a^2 - v^2)}{(av)}\right) = a^2 \ln\left(\frac{a}{v}\right)$$

Assim, como as equações (4.6) e (4.8) são iguais, Bos (1988) conclui que a propriedade apresentada por Huygens estava correta, e, portanto, a área $ADEV$ sob a hipérbole é igual á área do retângulo $ADYX$, enfatizando assim que, embora utilizando-se de uma curva até então considerada não geométrica, Huygens havia efetuado a quadratura da hipérbole.

Embora Bos não deixe explícito em seu texto, a partir de suas notações e cálculos, podemos verificar a propriedade que diz respeito ao comprimento de arco da Tractriz. Segundo Huygens (1693) o comprimento de arco da Tractriz de A à K é igual ao segmento $\overline{YX}$. Como a equação cartesiana da Tractriz é dada por

$$x = a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2-y^2},$$

podemos considerá-la uma função:

$$f(y) = a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right) - \sqrt{a^2-y^2}.$$

Podemos então utilizar o método moderno para calcular o comprimento de arco. Seja k o comprimento de arco de A à K. Então: $k = \int_v^a \sqrt{1+[f'(y)]^2}dy$. Isso porque Huygens considera o comprimento de arco começando em $A = (0, a)$, e observando a figura Figura 5, podemos perceber que $y(K) = v$, já que $\overline{DP} = v$. Temos também que:

$$f'(y) = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \Leftrightarrow [f'(y)]^2 = \frac{a^2-y^2}{y^2} = \left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1.$$

Daí:

$$k = \int_v^a \sqrt{1+\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1}dy = \int_v^a \frac{a}{y}dy = a\ln(y)_v^a = a(\ln(a) - \ln(v)) \tag{4.9}$$
$$= a\ln\left(\frac{a}{v}\right)$$

Sabemos, que:

$$\overline{YX} = (z + x) = a\ln\left(\frac{a+z}{y}\right) = a\ln\left(\frac{a}{v}\right) \tag{4.10}$$

Portanto, como as equações (4.9) e (4.10) são iguais, a propriedade proposta por Huygens, que o comprimento de arco da Tractriz de A à K é igual à $\overline{YX}$, também está correta.

Huygens (1693) também propõe tomarmos $\overline{DI}$ e $\overline{DS}$ em $\overline{DP}$ de forma proporcional, dando-nos pontos da curva

$$O = \left(\overline{DI}, a \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-\left(\overline{DI}\right)^2}}{\overline{DI}}\right) - \sqrt{a^2 - \left(\overline{DI}\right)^2}\right) \text{ e}$$

$$R = \left(\overline{DS}, a \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-\left(\overline{DS}\right)^2}}{\overline{DS}}\right) - \sqrt{a^2 - \left(\overline{DS}\right)^2}\right).$$

Então, segundo Huygens, o comprimento da curva de K à O será igual ao comprimento da curva de O à R. Isso pode ser justificado recorrendo-se novamente às notações de Bos, embora também não esteja explícito.

Quando Huygens nos diz que I e S devem ser tomados proporcionalmente, isso quer dizer que devem ser tomados tal que: $\overline{DI} = \frac{\overline{DP}}{n} = \frac{v}{n}$ e $\overline{DS} = \frac{\overline{DI}}{n} = \frac{\overline{DP}}{n^2} = \frac{v}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Se k é o comprimento da curva de A à K, i o comprimento da curva de K à O e o, o comprimento da curva de A à O, então $o = k + i \Leftrightarrow i = o - k$.

Seguindo a construção dada por Huygens, podemos conseguir um segmento $\overline{Y_1X_1}$ que descreve o. Agora seguindo os passos de Bos, teríamos a seguinte equivalência com a equação (4.10):

$$\overline{Y_1X_1} = o = a \ln\left(\frac{a}{\frac{v}{n}}\right) = a \ln\left(\frac{an}{v}\right) \tag{4.11}$$

$$i = o - k = a \ln\left(\frac{\frac{an}{v}}{\frac{a}{v}}\right) = a \ln(n) \tag{4.12}$$

Se chamarmos o comprimento da curva de O à R de s e o comprimento da curva de A à R de r, então: $r = o + s \Leftrightarrow s = r - o$

Novamente, seguindo a construção dada por Huygens, podemos conseguir um segmento $\overline{Y_2X_2}$ que descreve r. E seguindo os passos de Bos, teríamos novamente a seguinte equivalência com a equação (4.10):

$$\overline{Y_2X_2} = a \ln\left(\frac{a}{\overline{DS}}\right) = a \ln\left(\frac{a}{\frac{v}{n^2}}\right) = a \ln\left(\frac{an^2}{v}\right) \tag{4.13}$$

$$s = r - o = a \ln\left(\frac{an^2}{v}\right) - a \ln\left(\frac{an}{v}\right) = a \ln\left(\frac{\frac{an^2}{v}}{\frac{an}{v}}\right) = a \ln(n) \tag{4.14}$$

Novamente, como as equações (4.12) e (4.14) são iguais, podemos verificar que a proposição de Huygens estava correta, e que, se I e S são tomados proporcionalmente, então os comprimentos de arco correspondentes serão equivalentes.

5. Conclusão

Na matemática utilizada por Huygens podemos perceber que, apesar de séculos terem se passado, a influência dos geômetras gregos ainda ressoava na Europa, porém mesclada com a geometria cartesiana. Essa é uma observação interessante pois a carta aqui analisada foi trocada em 1693, nove anos após a publicação do artigo de Leibniz sobre o Cálculo Infinitesimal. Isso mostra que, apesar do Cálculo já estar sendo difundido, alguns matemáticos ainda consideravam a Geometria o principal método para encontrar resoluções.

O seu interesse pela Tractriz mostra que os matemáticos estavam voltando seu interesse para curvas que até então não eram consideradas geométricas, ficando, portanto, à margem da geometria cartesiana que era bastante difundida na época. Esse interesse levou a novos métodos para analisar curvas, já que aqueles existentes não eram suficientes. Além disso, Huygens proveu uma solução para o problema da quadratura da Hipérbole, questão debatida até então pois envolve a função logarítmica, que ainda não estava definida.

De modo geral, a correspondência nos mostra um recorte da cultura matemática europeia no final do século XVII, mais especificamente sobre como problemas envolvendo curvas poderiam ser resolvidos. No livro que possui a carta trocada aqui utilizada, é possível ver que Huygens também trocava correspondências com Leibniz, e, portanto, pode-se supor que possuía conhecimento do Cálculo Infinitesimal. Apesar disso, Huygens optou por utilizar a Geometria em seu trabalho, evidenciando assim quão forte era a influência desta sobre os matemáticos do século XVII.

Bibliografia

ALBUQUERQUE, Yuri; RIBEIRO, Sara. **Tráctriz e Catenária:** Modelos e métodos matemáticos. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/rmiranda/wordpress/wpcontent/uploads/2015/12/Tractriz.pdf. Acesso em: 04 maio 2020.

BARON, Margaret Eleanor., BOS, Henk Jan Maarten. **Unidade 5: O cálculo no século XVIII - Técnicas e aplicações.** In: Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974c.

BOS, Henk Jan Maarten. *Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves.* Centaurus, [S.l.], v. 31, n. 1, pp.9–62, abr. 1988. Wiley. <https://doi.org/10.1111/j.1600-0498.1988.tb00714.x>.

BLOCH, Marc. **Apologia da História** ou o ofício do historiador. Rio de Janeiro: Zahar, 2001. Prefácio, Jacques Le Goff; apresentação à edição brasileira, Lilia Moritz Schwarcz; tradução, André Telles. Todos os direitos reservados à editora Schwarcz S.A.

HUYGENS, Christiaan. ***Christiaan Huygens à H. Basnage de Beauval.*** In: HUYGENS, Christiaan. Oeuvres Complétes de Christiaan Huygens: Correspondance [de Christiaan Huygens], 1691–1695. [S.l.]: La Haye, 1888-1950. p. 407-418. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77858m?rk=107296;4>. Acesso em: 04 maio 2020.

MENDES, Iran Abreu. **Pesquisas em história da Educação Matemática no Brasil em três dimensões.** Quipu, [S.l.], v. 14, n. 1, pp. 69–92, abr. 2012.

MERLI, Renato Francisco. **A distinção cartesiana entre curvas geométricas e curvas mecânicas.** 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Filosofia, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo, 2016. Disponível em: <http://131.255.84.103/handle/tede/3070#preview-link0>. Acesso em: 24 jun. 2020.

RAPOSO, Cláudia Sofia Carrilho Morgado. **Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades.** 2013. 249 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/10248/1/ulfc106067_tm_Claudia_Raposo.pdf. Acesso em: 04 maio 2020.

SILVA, Everaldo Raiol da; MIRANDA, Tatiana Lopes de. **A Investigação em História da Matemática**. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. Anais do X SNHM. Campinas: Sbhmat, 2013. p. 1-10. Disponível em: <https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/index>. Acesso em: 04 maio 2020.

Gabriel Faria Vieira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM – campus Uberaba – Brasil

E-mail: gabrielfv9898@gmail.com

Mônica de Cássia Siqueira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM – campus Uberaba – Brasil

E-mail: monica.siqueiramartines@uftm.edu.br