Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 13 nº 27 - pág. 01-16
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

DEMOSTRACIONES DEL *PONS ASINORUM*. APORTES DE LA HISTORIA A LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa – Academia General Militar – Espanha

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza – Espanha

(aceito para publicação em outubro de 2013)

Resumen

El descubrimiento y la demostración de teoremas suele ocupar buena parte del tiempo de los matemáticos profesionales. En la fase demostrativa, a partir de axiomas y definiciones, los teoremas se prueban (en la mayoría de los casos) de forma deductiva. Este método deductivo también se utilizó durante siglos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y tuvo su origen en los *Elementos de geometría* compuestos por Euclides de Alejandría (300 a.C.). Desde una perspectiva pedagógica, el método deductivo no es siempre aconsejable y su uso debe estar supeditado a las necesidades de los alumnos. En este artículo, presentamos diversas demostraciones de un mismo teorema (*Elementos*, Libro I, prop. 20), analizándolas desde un punto de vista didáctico.

Palabras clave: Demostraciones en geometría, Educación matemática, Historia de la matemática, Desigualdad triangular.

[PROOFS OF *PONS ASINORUM*. CONTRIBUTIONS OF HISTORY TO MATHEMATICS EDUCATION]

Abstract

The discovery and proof of theorems is usually one of the main activities of professional mathematicians. In most cases, theorems are proved starting from axioms and definitions in a deductive way. This deductive method was also used for centuries in the teaching and learning of geometry and its origin can be traced back to Euclid's *Elements of geometry* written about 300 B.C. From a pedagogical point of view the deductive method is not always desirable and its use must be subject to the students' needs. In this paper we present several proofs of the same result (*Elements*, Book I, prop. 20) analyzing them from a didactical standpoint.

Keywords: Proofs in geometry, Mathematics education, History of mathematics, Triangle inequality.

1. Introducción

Según narra Carl Boyer (1986, p. 135) en su *Historia de la matemática*, Menecmo (350 a.C.) respondió a la pregunta de su discípulo Alejandro Magno sobre los posibles atajos en el aprendizaje de la geometría indicándole que «*para viajar por el país hay caminos reales y caminos para los ciudadanos comunes, pero en la geometría hay un único camino para todos*». El mismo historiador (op. cit., p. 141) relata como el propio Euclides señaló a Ptolomeo que «*no hay ningún camino real a la geometría*».

Si estas anécdotas son ciertas, muestran claramente que ambos científicos griegos concebían un único método, el deductivo, para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Sin embargo, no parece ésta una postura unánime. Por ejemplo, en el prefacio de sus *Élémens de géométrie* (1741), Alexis Claude Clairaut (1713–1765) defiende un modelo pedagógico en el que las demostraciones deductivas pierden protagonismo:

> «*Que Euclides se tomase la molestia de demostrar que dos círculos que se cortan no tienen el mismo centro o que, en un triángulo inscrito en otro, la suma de sus lados es menor que la suma de los lados del triángulo en el que se encuentra inscrito, no resulta sorprendente. Esta Geometría tenía que convencer a los sofistas obstinados, que se vanagloriaban en rehusar las verdades más evidentes. Entonces era necesario que la Geometría, como la Lógica, tuviese la ayuda de esos razonamientos formales para tapar la boca a los necios. Pero las cosas han cambiado mucho. Todo razonamiento que incide sobre lo que el buen sentido decide por sí solo, es siempre pura pérdida de tiempo y sólo sirve para obscurecer la verdad y para hastiar a los lectores*.»

Si según Clairaut, en el siglo XVIII las cosas habían cambiado mucho con respecto a la época de Euclides, qué decir del siglo XX. En nuestra opinión Morris Kline (1976, p. 161), acierta plenamente al postular que las demostraciones se deben adaptar a las necesidades de los aprendices:

> «*Algunos profesores, que conocen las demostraciones rigurosas, se sienten incómodos al presentar simplemente un argumento convincente que ellos, al menos, saben que*

> *es incompleto. Pero no es el profesor quien debe quedar satisfecho, sino el estudiante. La buena pedagogía exige compromisos de esta índole.*»

La visión platónica de la Matemática que ejemplifican las anécdotas sobre Menecmo y Euclides dista mucho, sin embargo, de estar superada. Es fácil encontrar entre el profesorado la opinión de que las matemáticas «son como son» y que sólo hay una forma de aprenderlas (luego de enseñarlas). Las implicaciones negativas de esta visión son muchas. La peor seguramente es su replicación. Los estudiantes acaban por asumir la visión de sus maestros y, en muchos casos, por aborrecer una materia que no comprenden y que no se adapta a su visión del mundo.

Y es que como indica Kline en la cita anterior, y como ya observó Van Hiele en sus trabajos (Crowley, 1987) la enseñanza, si bien debe preocuparse por hacer progresar a los estudiantes, debe adaptarse al nivel en que dichos estudiantes se encuentran.

No quiere decirse con todo esto que no deba trabajarse la idea de demostrar en el aula de matemáticas. Lo que debe tenerse bien claro es que ciertos alumnos pueden no comprender lo que significa «demostrar» o bien pueden sentir que ciertos enunciados no requieren de más demostración que la que sus sentidos les brindan. Incluso aquellos que perciban la demostración como necesaria y entiendan lo que se persigue con ella pueden enfrentarse a métodos de demostración que les resulten extraños por su generalidad o por usar argumentos indirectos.

Así pues, ante un mismo enunciado matemático, resulta interesante para el docente disponer de una batería lo más amplia y variada posible de argumentos, justificaciones o demostraciones que le permitan, en función de sus alumnos, elegir la más adecuada en ese momento del proceso de enseñanza y aprendizaje. Además, desde el punto de vista del estudiante, el acceso a diversas justificaciones o demostraciones de un mismo hecho le hará ir adquiriendo una colección de recursos e ideas que le servirán en otras situaciones y también a relativizar en cierta medida esa supuesta y manida objetividad absoluta de la matemática.

En este artículo pretendemos ilustrar estas ideas presentando y comentando diversas demostraciones de la proposición 20 del libro I de los *Elementos* de Euclides:

En todo triángulo dos lados cualesquiera, tomados en conjunto, son mayores que el otro lado.

2. Una demostración intuitiva

En su obra *Elementos de geometría racional*, Rey Pastor y Puig Adam (1963, p. 131) proponen la siguiente justificación[1] del resultado que nos ocupa:

[1] Demostraciones esencialmente iguales a esta son dadas por Legendre (1807, p. 11), Cortazar (1850, p. 15), Rouché y Comberousse (1864, pp. 12-13), Viñas (s.a., p. 46) o Llardent (1925, p. 104).

> «*Decir que es recto un hilo entre dos puntos cuando está bien tirante, equivale a decir que para darle otra forma habrá que dar más hilo, es decir, mayor longitud. Reconocemos, pues, que el segmento que une dos puntos es, de todas las líneas que los unen, la de menor longitud. Por lo tanto: Todo lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.*»

<u>Comentario:</u>

Los conceptos y procedimientos involucrados en esta argumentación son muy básicos: segmento rectilíneo, línea quebrada, triángulo, lados de un triángulo, comparación de segmentos rectilíneos. Además, se apela a una situación real concreta que el alumno puede construir y manipular a su antojo.

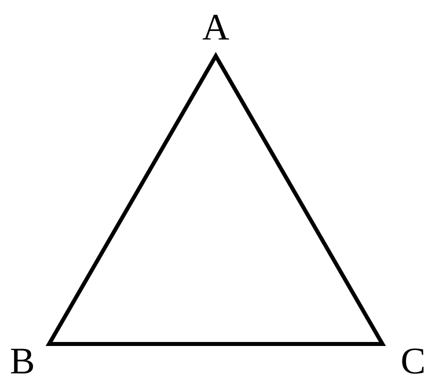
En consecuencia pensamos que, con la ayuda de hilos, de tiras de papel o de mecano, éste tipo de argumento es adecuado para ser presentado a alumnos del tercer ciclo de Educación Primaria (10–12 años).

3. Una demostración por estudio de casos

Thomas Heath (1956), citando a Proclo (411–485), atribuye a Herón (s. I) y a Porfirio (233–309) la demostración que vamos a presentar en esta sección.

Se trata de una demostración deductiva, que no aborda el caso general, sino en la que se consideran tres casos atendiendo a la posible tipología del triángulo ABC de partida. Veámosla.

PRIMER CASO: El triángulo es equilátero [AB = BC = CA].



En esta situación, se tiene que:

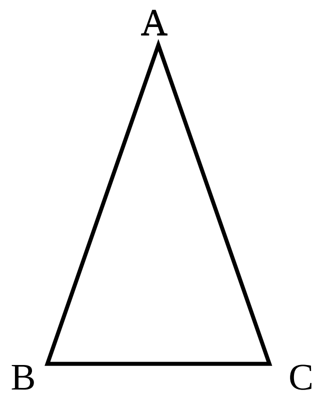
$$AB + BC = AC + AC = 2\cdot AC > AC,$$
$$BC + CA = AB + AB = 2\cdot AB > AB,$$
$$CA + AB = BC + BC = 2\cdot BC > BC.$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera para cualquier triángulo equilátero.

SEGUNDO CASO: El triángulo es isósceles.

En esta situación se pueden presentar las posibilidades siguientes:

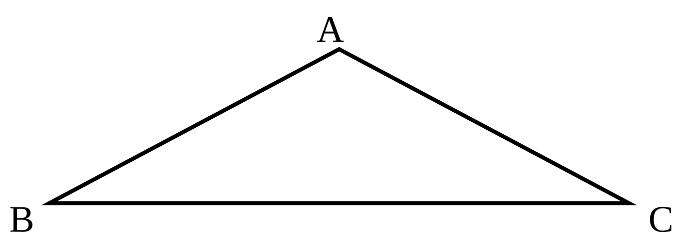
(a) Cada uno de los lados iguales es mayor que la base [AB = AC > BC].



En este caso, resulta que:

$$AB + BC = AC + BC > AC,$$
$$BC + CA = BC + AB > AB,$$
$$CA + AB > BC + BC > BC.$$

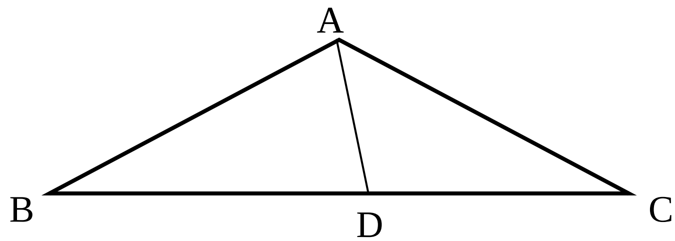
(b) La base es mayor que cada uno de los lados iguales [BC > AB = AC].



En este caso:

$$AB + BC = AC + BC > AC,$$
$$BC + AC = BC + AB > AB.$$

Y sólo falta demostrar que la suma de los lados iguales es mayor que la base. Para ello, sobre el lado BC se elige el punto D, que cumple que BD = BA y se une A con D.



En el triángulo ADB el ángulo exterior $\angle$ ADC es mayor que el interior y opuesto $\angle$ BAD (en virtud del la proposición 16 del libro I de los *Elementos*[2]):

$$\angle ADC > \angle BAD. \quad [1]$$

En el triángulo ADC el ángulo exterior $\angle$ ADB es mayor que el interior y opuesto $\angle$ CAD (nuevamente en virtud del la proposición 16 del libro I de los *Elementos*):

$$\angle ADB > \angle CAD. \quad [2]$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades [1] y [2] anteriores resulta que:

$$\angle ADC + \angle ADB > \angle BAD + \angle CAD.$$

De donde, teniendo en cuenta que $\angle$ BAD = $\angle$ ADB (por ser el triángulo ABD isósceles), se tiene que:

$$\angle ADC > \angle CAD.$$

Por tanto (*Elementos*, libro I, prop. 19)[3]:

$$AC > DC.$$

Entonces, dado que AB=BD (por construcción), resulta que:

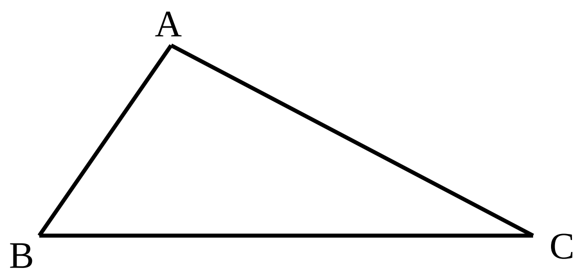
[2] La proposición 16 del libro I de los *Elementos* afirma que si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos interiores y opuestos. Esta propiedad se sigue fácilmente del hecho de que los ángulos de un triángulo suman 180º.

[3] La proposición 19 del libro I de los *Elementos* afirma que en todo triángulo, el ángulo mayor subtiende el lado mayor.

AC+AB > BD+DC = BC.

En definitiva, tenemos que la proposición es verdadera para cualquier triángulo isósceles.

TERCER CASO: El triángulo es escaleno.

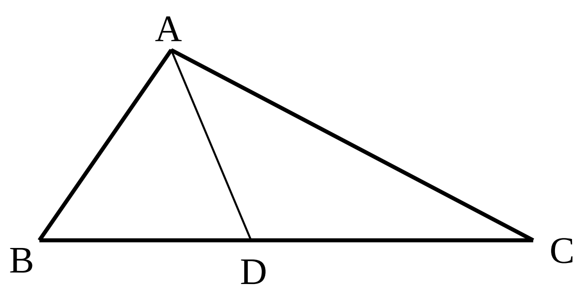


Podemos suponer sin problema alguno que BC>AB>AB.

Así las cosas, se tiene que:

AB+BC > AC,
BC+AC > AB.

Por lo que nos falta demostrar que AB+AC > BC. Para ello, como antes, se toma el punto D sobre el lado BC de modo que BD = BA.



Procediendo como en el caso anterior [triángulo isósceles con la base mayor que cada uno de los lados iguales] se llega a que AB + AC > BC.

En definitiva, la proposición es cierta para cualquier triángulo escaleno.

Por consiguiente, teniendo en cuenta las conclusiones de los tres casos anteriores, se concluye que la proposición es cierta para cualquier triángulo.

Comentario:

Para el desarrollo de la demostración precedente ha sido necesario aplicar los siguientes conocimientos previos:

- Clasificación de los triángulos atendiendo a las longitudes de sus lados.
- Propiedades básicas de las desigualdades.
- Ángulos en la base de un triángulo isósceles.
- Proposición 16 del libro I de los *Elementos* de Euclides.
- Proposición 19 del libro I de los *Elementos* de Euclides.

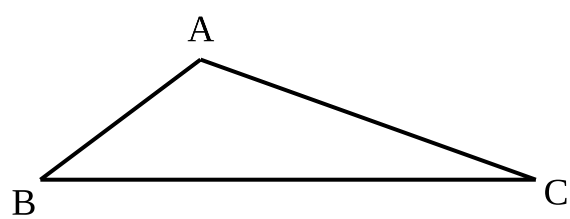
Además, durante la argumentación se ha recurrido a dos estrategias heurísticas interesantes:

i. Transformar la demostración de un teorema general en la comprobación de todos los casos particulares posibles.
ii. Introducir elementos auxiliares en la situación que se está tratando de estudiar.

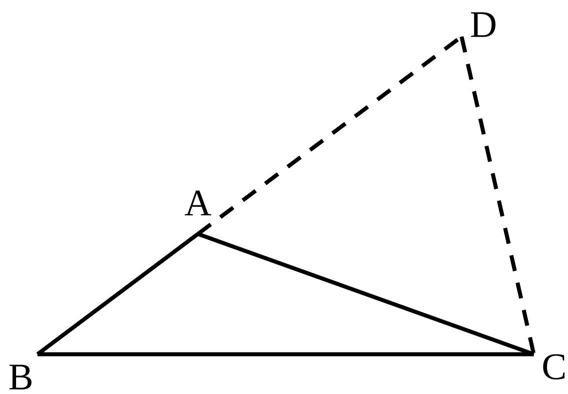
Puesto que esta demostración se basa en estudiar diversos casos, se adapta muy bien a poder trabajar casos aislados con los alumnos en función del nivel en que nos encontremos. Así, con alumnos de primer ciclo de E.S.O. (12–14 años) podría trabajarse el primer caso y los apartados de los otros dos casos que no supongan construcciones auxiliares. La demostración completa podría presentarse, siempre paso a paso, a alumnos del segundo ciclo de E.S.O. (14–16 años).

4. La demostración de Euclides

En esta sección presentamos una adaptación en lenguaje moderno de la demostración “original” dada por Euclides en sus *Elementos*.



Sea ABC el triángulo. Prolónguese BA hasta el punto D, de modo que AD = AC. Dibújese el segmento rectilíneo DC.



Como el triángulo ADC es isósceles, debe ser ∠ ADC = ∠ ACD. Además, se tiene que ∠ BCD > ∠ ACD = ∠ ADC. Entonces (*Elementos*, libro I, prop. 19), BD > BC y, por tanto:

BA+AD > BC.

De donde, recordando que AD=AC, resulta que:

BA + AC > BC.

De forma similar se demostraría que:

AC + CB > BA y CB + BA > AC

<u>Comentario:</u>

A diferencia de la demostración anterior, la prueba de Euclides[4] no requiere de hipótesis adicionales sobre el triángulo de partida. Parte de un triángulo cualquiera. En otras palabras, la demostración de la proposición 20 del libro I de los *Elementos* es general.

Para su desarrollo se han aplicado los siguientes conocimientos previos:

- Ángulos en la base de un triángulo isósceles.
- Proposición 19 del libro I de los *Elementos* de Euclides.

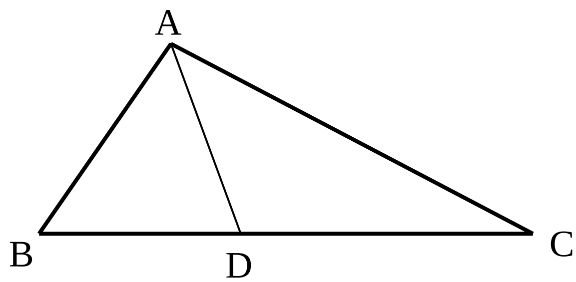
[4] Demostraciones esencialmente iguales a la de Euclides se encuentran en los textos de T. Simpson (1760, p. 21) o de Rey Pastor y Puig Adam (1934, tomo I, p. 66).

Además, la prueba se apoya nuevamente en la estrategia heurística de introducir algún elemento auxiliar en el dibujo del triángulo ABC que se está estudiando.

La generalidad de esta demostración hace que no sea conveniente introducirla antes del segundo ciclo de E.S.O. (14–16 años).

5. Otra demostración general

La demostración que vamos a presentar aquí se debe (Heath, 1956), como en el caso de la Sección 3, a Herón y Porfirio.



Sea ABC un triángulo cualquiera. Trazamos la bisectriz del ángulo ∠ BAC, que determina el punto D sobre el lado BC.

En el triángulo ABD se verifica (*Elementos*, libro I, prop. 16):

$$\angle ADC > \angle BAD = \angle DAC.$$

Entonces, aplicando la proposición 19 del libro I de los *Elementos*:

$$AC > DC. \quad [3]$$

Por su parte, en el triángulo ADC se verifica (*Elementos*, libro I, prop. 16):

$$\angle ADB > \angle DAC = \angle DAB.$$

Así que, como antes, la proposición 19 del libro I de los *Elementos* implica que:

$$AB > BD. \quad [4]$$

De donde, sumando miembro a miembro las inecuaciones [1] y [2], se tiene que:

$$AB+AC > BD+DC = BC$$

Comentario:

En el transcurso de la demostración anterior hemos recurrido a los conocimientos previos siguientes:

- Bisectriz de un ángulo.
- Propiedades básicas de las desigualdades.
- Proposición 16 del libro I de los *Elementos* de Euclides.
- Proposición 19 del libro I de los *Elementos* de Euclides.

Además, la prueba vuelve a apoyarse en la estrategia heurística de introducir algún elemento auxiliar en la situación que se está estudiando.

Atendiendo al carácter general de la demostración y a su discurso deductivo, estimamos que no se debe proponer antes del segundo ciclo de E. S. O. (14–16 años).

6. La demostración de José Mariano Vallejo

En la página 316 del primer tomo del *Compendio de matemáticas puras y mistas*, escrito por el pedagogo y matemático español José Mariano Vallejo y Ortega (1779–1846), encontramos la siguiente demostración de la proposición 20 del libro I de los *Elementos* de Euclides.

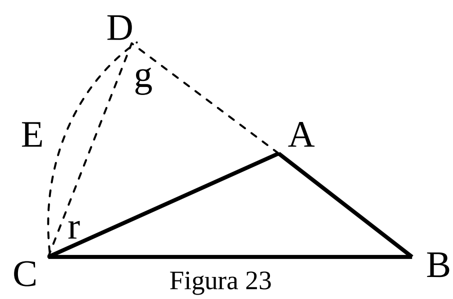


Figura 23

«*Esp. Sea* BCA *(fig. 23) un triángulo cualquiera; digo que* BA + CA > BC.
Constr. Haciendo centro en B *y con radio igual al lado mayor BC, trácese el arco* CED*, hasta que encuentre al lado* BA *prolongado, y tírese la cuerda* DC*.*
Dem. Las líneas BC *y* BD *son iguales por radios de un mismo círculo; luego en el triángulo* CBD *el ángulo* DCB = g*; pero el ángulo* r < DCB *por ser parte suya; luego también será* r < g*. Luego en el triángulo* DCA *el ángulo* g > r*, y por lo mismo el lado* CA > DA*. Si a estas cantidades desiguales añadimos una misma cantidad* AB*, también permanecerán desiguales, y se tendrá*

CA + AB > DA + AB*;*

y como DA + AB = BD = BC*, se sigue que*

CA + AB > BC,

que era L. Q. D. D.»

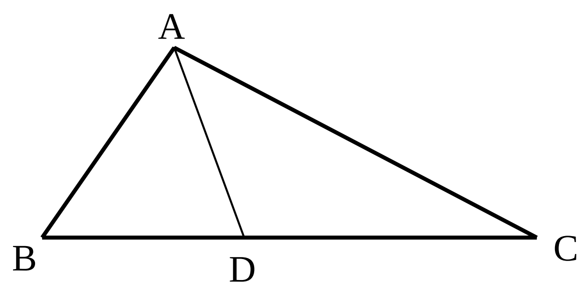
Comentario:

Es interesante observar que, pese a que el autor no lo hace notar, esta demostración no es válida para triángulos equiláteros ni para triángulos isósceles en los que los lados iguales son menores que el desigual (pues en tal caso D = A). No obstante, es aplicable a los triángulos isósceles en los que los lados iguales son menores que la base y a los triángulos escalenos.

Tanto los conocimientos previos necesarios, como las estrategias seguidas son similares a las de la demostración original de Euclides; por lo que valen aquí los mismos comentarios.

7. Una demostración por reducción al absurdo

En esta sección presentamos una prueba indirecta debida (Heath, op. cit.) de nuevo a Herón y Porfirio.



Supongamos que, en la figura anterior, BC es el lado mayor del triángulo ABC. Queremos demostrar que BA+AC > BC. Si no fuese así, entonces BA+AC sería menor o igual que BC.

Supongamos que BA+AC = BC. En tal caso se elije sobre BC el punto D tal que BD=BA y se une A con D. En esta situación se tiene que:

$$BA+AC = BC \Rightarrow AC = BC–BA \Rightarrow AC = BC–BD = DC.$$

Entonces (dado que el triángulo ACD es isósceles), resulta que:

$$\angle CDA = \angle CAD. \quad [5]$$

Además, como AB = BD, el triángulo ABD es isósceles y se tiene que:

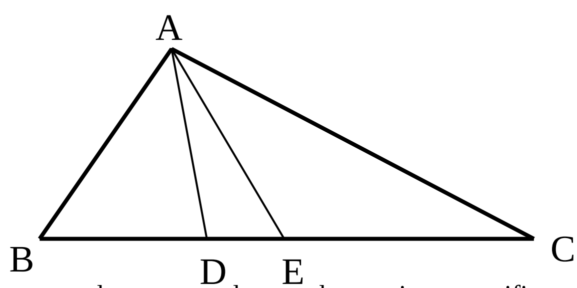
$$\angle BDA = \angle BAD. \quad [6]$$

Sumando miembro a miembro las igualdades [5] y [6] se obtiene que:

$$\angle CDA + \angle BDA = \angle CAD + \angle BAD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CAD + \angle BAD = 180°.$$

Esto es imposible y, en consecuencia, BA + AC $\neq$ BC.
Supongamos ahora que BA+AC < BC. En tal caso tomamos sobre el lado BC los puntos D y E tales que BD = BA y CE = CA y unimos A con D y A con E.



En esta situación, razonando como en el apartado anterior, se verifica que:

$$\angle BDA = \angle BAD \quad y \quad \angle CEA = \angle CAE.$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores se obtiene:

$$\angle BDA + \angle CEA = \angle BAD + \angle CAE. \quad [7]$$

Por otro lado, aplicando la proposición 16 del libro I de los *Elementos*, se tiene que:

$$\angle BDA > \angle DAC > \angle CAE,$$
$$\angle CEA > \angle EAB > \angle BAD.$$

Por tanto, sumando, resulta:

$$\angle BDA + \angle CEA > \angle CAE + \angle BAD$$

Pero, en virtud de [7], la suma del primer miembro de la desigualdad obtenida era igual al segundo, lo cual es imposible. En consecuencia, BA+AC $\nless$ BC.

Finalmente, dado que BA+AC $\neq$ BC y BA+AC $\nless$ BC, resulta que debe ser BA+AC > BC.

<u>Comentario:</u>

Conviene observar que la argumentación anterior no es aplicable a triángulos equiláteros, puesto que parte de la asunción de que existe un lado mayor. Sin embargo sí tiene sentido en cualquier otra situación.

Dado que la demostración por reducción al absurdo no es directa; es decir, la tesis no se deduce de la hipótesis, consideramos que este método de demostración no está, en general, al alcance de los alumnos no universitarios.

8. Conclusiones

En este artículo hemos presentado una variedad de demostraciones de un mismo resultado geométrico. Dichas demostraciones varían desde la constatación manipulativa y visual del ejemplo de Rey Pastor y Puig Adam presentado en la Sección 2 hasta el rigor de la demostración indirecta por reducción al absurdo de la Sección 7.

Pensamos que las distintas demostraciones de un mismo teorema geométrico:

1. Permiten adaptarlo a diferentes niveles educativos y a las necesidades de aprendizaje de los alumnos.
2. Enriquecen la fase de «visión retrospectiva» del modelo teórico de Polya (1957) para la resolución de problemas matemáticos.
3. Permiten descubrir diferentes estrategias heurísticas que se pueden aplicar en la resolución de otro tipo de problemas matemáticos. Así la estrategia heurística «introducir líneas auxiliares» en un problema geométrico, por ejemplo, equivale a «introducir una incógnita auxiliar» en un problema algebraico.
4. Pueden mostrar diversos métodos probatorios que todos los estudiantes de disciplinas científicas deberían conocer.

El trabajo que hemos llevado a cabo pone también de manifiesto que la historia de las Matemáticas en general, y el estudio de textos clásicos en particular, proporcionan recursos didácticos que pueden ayudar al docente en su trabajo diario de aula.

En este sentido es indudable que debe trabajarse el análisis de este tipo de textos con maestros y profesorado de secundaria en formación. Algunos ejemplos de posibles cuestiones a plantear en un seminario en que se tratara el tema de este trabajo podrían ser:

- ¿Qué importancia matemática tiene el resultado con el que hemos trabajado?
- ¿En qué curso o nivel educativo trabajarías las ideas de cada una de las demostraciones? ¿De qué modo?
- Para cada una de las demostraciones, identifica los conceptos previos que debe conocer el alumno.
- ¿Todas las demostraciones presentadas te parecen igualmente correctas? Si tuvieras que elegir una, ¿cuál sería? ¿Por qué?
- Diseña una secuencia didáctica, para un curso a tu elección, que presente y motive la desigualdad triangular y que termine con una justificación «convincente» para los alumnos.

Referencias

BOYER, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial, S. A.

CORTAZAR, J. (1850). *Tratado de geometría elemental* (3ª edición). Madrid: Imprenta y fundición de D. Eusebio Aguado.

CLAIRAUT, A. C. (1741). *Élémens de géométrie.* Paris: Lambert & Durand.

CROWLEY, M.L. (1987). The Van Hiele Model of the Development of geometric Thought. En *Learning and teaching Geometry K-12*, 1987 Yearbook of the NCTM. M. Montgomery Lindquist (ed.) pp. 1-16. Reston: NCTM.

HEATH, T. (1956). *The thirteen books of The Elements* (tres tomos). New York: Dover.

KLINE, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI de España editores, S. A.

LEGENDRE, A. M. (1807). *Elementos de Geometría, con notas* (traducidos por Don Antonio Gilmán). Madrid: Imprenta de Repulles.

LLARDENT, A. (1925). *Curso de geometría* (cuarta edición). Madrid: Imprenta de Julio Cosano.

POLYA, G. (1957). *How to solve it.* Princeton University Press.

REY PASTOR, J. y PUIG ADAM, P. (1934). *Elementos de geometría racional* (dos tomos). Madrid: Imp. de A. Marzo.

REY PASTOR, J. y PUIG ADAM, P. (1963). *Matemáticas. Primer curso* (Plan 1957). Madrid: Nuevas Gráficas, S. A.

ROUCHÉ, E. y de COMBEROUSSE, CH. (1864). *Traité de géométrie élémentaire.* París: Gauthier-Villars.

SIMPSON, T. (1760). *Elements of geometry.* London: J. Nourse.

VALLEJO, J. M. (1835). *Compendio de matemáticas puras y mistas* (dos tomos). Madrid: Imprenta Garrasayaza.

VIÑAS, J. (s.a.). *Geometría razonada.* Barcelona: Imprenta Elzeviriana y Librería Camí.

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar – Espanha
E-mail: oller@unizar.es

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza – Espanha
E-mail: meavilla@unizar.es