Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 14 nº29 - p. 83-115
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

ELEMENTOS HISTÓRICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA[1]

Natalia Escobar Villota
Universidad del Valle – Cali –Colombia

(aceito para publicação em agosto de 2014)

Resumen

Con esta investigación se pretende brindar algunos elementos desde la perspectiva de la Historia de las Matemáticas, al mejoramiento de la enseñanza de la función logarítmica en los grados 8° y 9° de la Educación Básica. Para ello, se exploran las representaciones del docente frente a la caracterización matemática de la función, su metodología de enseñanza, la Historia de las Matemáticas y asuntos curriculares e institucionales influyentes en la enseñanza de la función, a través de entrevistas directas a diez docentes de Matemáticas en la ciudad de Santiago de Cali seleccionados bajo parámetros preestablecidos.

Palabras claves: Matemática, Historia, Función logarítmica, Enseñanza de las Matemáticas, Formación docente.

[HISTORICAL ELEMENTS FOR TEACHING LOGARITHMIC FUNCTION IN BASIC EDUCATION]

Abstract

This research aims to provide some elements from the perspective of the history of mathematics to improve the teaching of the logarithmic function in grades 8 and 9th of Basic Education. To do this, we explore the representations of teachers against the mathematical characterization of the function, its teaching methodology, the History of Mathematics and influential curricular and institutional issues in the teaching function,

[1]Trabajo académico realizado bajo la tutoría del Profesor Emérito Luis Carlos Arboleda Aparicio, como requisito para optar por el título de Licenciada en Matemáticas y Física del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali, Colombia.

through direct interviews with ten teachers from math in the city of Santiago de Cali selected under preset parameters.

Keywords: Mathematics, History, logarithmic function, mathematics teaching, teacher training.

Introducción

A través del tiempo, el desarrollo y consolidación de las Matemáticas se ha debido a los aportes y trabajos incansables de seres humanos que como hoy, tuvieron obstáculos en el entendimiento de muchos de los conceptos surgidos. La historia de los logaritmos tuvo el mismo proceso de concepciones y formalizaciones que los demás objetos constituyentes de la ciencia matemática. Su creación se originó en la necesidad de facilitar cálculos extensos de multiplicaciones y divisiones requeridos para la navegación y la astronomía en el siglo XVI. Sin embargo, en los años siguientes con los avances en su formalización, su tratamiento en contextos infinitesimales y las comparaciones con conceptos geométricos finalmente llevaron a ver los logaritmos como función en el siglo XVIII.

Si se plantea en el contexto educativo, los estudiantes similarmente requieren de esfuerzo para la apropiación del concepto de logaritmo y de función logarítmica. Sin duda hay diversas razones por las que aparecen tropiezos para su entendimiento, pero el papel del profesor como mediador entre el conocimiento y el estudiante es sumamente importante. Los recursos utilizados por el docente y la forma cómo exponga y maneje los objetos matemáticos afectarán la visión de los estudiantes sobre las Matemáticas.

Actualmente, la función logarítmica es muy importante para la modelación de situaciones empíricas, y para ciencias tales como Biología, Astronomía, Geografía, Economía, entre otras; en contextos concretos como la medición de la magnitud de sismos, y comportamientos en general que indiquen crecimiento o decrecimiento poblacional bien sea de humanos, animales, ventas, temperatura, etc. Viéndose necesario su aprendizaje, los estudiantes deben manejar la función logarítmica apropiadamente para encuentrar sentido al desarrollo de su pensamiento matemático. Esto depende en gran medida de una intervención significativa del docente en donde caracterice y analice la naturaleza epistemológica de las Matemáticas, y en este caso, de la función logarítmica.

Planteamiento y justificación del problema

El aprendizaje de las Matemáticas abarca grados de dificultad propia. De lo más básico a lo más complejo, se producen errores y confusiones no muy fáciles de corregir. En la escuela e incluso, en la Educación Superior se hallan varios problemas concernientes a la comprensión del concepto, al abordaje realizado por los libros de texto u otros recursos didácticos, su interpretación y aplicación en otros campos del conocimiento o contextos reales, etc., algunas identificadas y caracterizadas en la presente investigación. Esto no solo depende del esfuerzo del estudiante, también cómo el docente enseñalos conceptos, su exposición posiblemente significativa y cómo sus concepciones influyen en las adoptadas por el alumnado. Esta función aparentemente la presentan de tres formas:

1. *Como algoritmo.* Por definición el logaritmo de un número x con una determinada base a ($\log_a x = y$) es el exponente y al cual se eleva la base para obtener el argumento x. Sin embargo, el concepto se reduce a un proceso algorítmico al hallar y a través de un sucesivo cálculo de potencias aleatorio y repetido mecánicamente en ejercicios propuestos por el docente, tomando como dominio de a, x ey,sobretodo los números enteros positivos y el cero ($a, x, y \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$) pero pocas veces los enteros negativos ($a, x, y \in \mathbb{Z}^-$).

Esta práctica olvida el contexto donde pueden utilizarse los logaritmos, su relación con otras ramas de la Matemática, ciencias, o las operaciones básicas de su origen.

2. *Como función* $f(x) = \log_a x$.Suele definirse como función inversa de la función exponencial $g(x) = a^x$ previo estudio de la misma, y/o a partir de la construcción de la gráfica con base en la tabulación de números enteros o racionales, postulando de antemano que su dominio son los números reales positivos ($x \in \mathbb{R}^+$) y su rango, todos los números reales ($y \in \mathbb{R}$).

La anterior definición no aborda de manera general la naturaleza del logaritmo como función, solo se vincula a la idea de función inversa. Puede ser más significativo definirla así: Dado un número$x$ real positivo llamado *argumento*, la función logaritmo asigna el exponente $y \in \mathbb{R}$ al cual se eleva un número fijo a llamado *base* para obtener el argumento; pudiéndose hacer énfasis en la doble implicación lógica vinculada a la definición de función exponencial.

3. *En forma algebraica.* El argumento x del logaritmo es la incógnita, inmersa en una ecuación que podría escribirse de manera general como:

$$p \cdot \log_a(hx^m * r)^k * q \cdot \log_b(jx^n * s)^{k'} * \ldots * u(x) * v(x) * \ldots * z(x) = 0,$$

tal que $p, q, a, b, h, j, m, n, r, s, k, k' \in \mathbb{Z}$ y $u(x), v(x), z(x)$ son polinomios aunque generalmente de grado cero, y "$*$" es cualquier operación aritmética$(+, -, \times, \div)$.

No obstante, se remite frecuentemente a la función logaritmo natural $ln\, x$, al ser más manipulable como inversa de la función exponencial e^x, limitando en gran parte el manejo general de la función $\log_a x$ en contextos algebraicos: ¿qué sucedería si el estudiante se encuentra con funciones logarítmicas con bases distintas de 10 o e, para su análisis geométrico y algebraico?

Esta investigación exploró si realmente se profundiza la enseñanza de los logaritmos en estas tres fases, pues pareciese se estudiara muy superficialmente a comparación de otras funciones; no se hace un tratamiento detallado de sus propiedades o su gráfica, las variaciones de ésta según sus valores numéricos, ni de sus aplicaciones, como sucede con la función lineal, cuadrática, trigonométrica, exponencial o radical.

Una hipótesis manejada al respecto es la falta de formación del profesor sobre el origen, desarrollo y métodos involucrados en su estudio, prefiriendo evadirla por inseguridad al ocasionarle las mismas dificultades de comprensión que a los estudiantes. Otro factor podría ser los tiempos programados en el curso y el año lectivo, siendo un obstáculo adicional pero esta vez, por cuestiones institucionales y curriculares.

Por otra parte, se nota que en nuestras realidades escolares no hay una apropiación didáctica[2] de la Historia de las Matemáticas, es decir, aún no es asimilada como recurso mediador para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Situación preocupante porque ella contribuye a entender la naturaleza epistemológica de los objetos matemáticos y la dimensión social y cultural de la actividad humana conducentes a su formación, motivo por el cual, en este trabajo se la considera línea fundamental para identificar grandes aportes en el estudio y enseñanza de esta función en el aula de clase.

La preocupación por la situación presentada es el fundamento, para que a través de esta investigación, se realice un estudio histórico buscando elementos que aporten a la enseñanza de los logaritmos de una manera más simple y significativa, especialmente en su presentación funcional. Así, se desarrolla la siguiente pregunta problema: *¿Bajo qué condiciones conceptuales y metodológicas la Historia de las Matemáticas puede ser utilizada por el docente en el diseño de estrategias didácticas para el mejoramiento de la enseñanza de la función logarítmica en la Educación Básica?*

Marco histórico

La siguiente es una reseña de la Historia de los logaritmos y su consolidación como función resaltando sus etapas más significativas, para una mejor comprensión del análisis histórico posterior:

Primeramente, los mesopotámicos o babilonios (2000 a. C – 600 a. C) realizaban tablas de cálculo similares a las tablas de lo actualmente llamado antilogaritmos, las cuales contenían potencias sucesivas de un número dado. También se cuestionaban por lo que hoy se interpreta como el número y al que debían elevar a un número $a$para que les diera como resultado, un número dado x, es decir, el logaritmo $\log_a x = y$. Estos razonamientos se realizaban con el objetivo de resolver problemas concretos de su entorno.

En segundo lugar, Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.) en su reto por calcular el número de granos de arena que cabrían en el universo, introdujo la estimación de números muy grandes y con ello, el principio de la relación entre las progresiones geométricas y aritméticas se empieza a notar. Por la misma línea, Nicolas Chuquet (1455 – 1488 aproximadamente) construyó una tabla de sucesivas potencias con base 2 con la que hizo notar que la suma de los exponentes era igual a su producto (cuestión que ya había hecho apreciar Arquímedes) y, sin tomar en cuenta el tamaño de los intervalos que separan un valor del otro, se puede interpretar como una tabla de logaritmos.

El escocés John Napier (1550–1617) fue quien en realidad inventó los logaritmos hacia 1594, realizando tablas de cálculo donde relacionaba progresiones aritméticas con geométricas, estableciendo una expresión numérica cercana a 1 $(1 - 10^{-7} = 0{,}9999999)$ para que los intervalos de separación entre los números calculados fueran próximos entre sí. La importancia de los logaritmos radica en la intención de reducir los dispendiosos cálculos de multiplicaciones y divisiones con números muy grandes para reducirlos a simples sumas y restas. Cálculos que se necesitaban en la astronomía y la navegación, pero que con las tablas logarítmicas se volvieron mucho más manejables hasta

[2]El término "apropiación didáctica" no alude a un concepto teórico del campo de la Didáctica de las Matemáticas.

el punto de ayudar sustancialmente al desarrollo y culminación de la tercera ley del movimiento planetario de Kepler, quien era contemporáneo de Napier.

En el siglo XVI, el movimiento físico era la única base utilizable para consideraciones cuantitativas de variación numérica, posición que influyó en Napier para su definición de logaritmo sustentada desde el punto de vista geométrico del movimiento continuo de puntos sobre un segmento de recta. Por otro lado, la denominación de *"logaritmos"* a los números hallados en sus tablas, fue exclusivamente suya combinando dos palabras griegas: *logos* (razón) y *arithmos* (número), y gracias a su permanente utilización de la notación para los números decimales en sus trabajos, la comunidad matemática de los años 1600 la adoptó de modo general.

A partir de la publicación de las tablas logarítmicas en 1614, Henry Briggs (1561-1631) y Napier acordaron perfeccionar el método de cálculo e instauraron las identidades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$. Después de la muerte de Napier, Briggs elaboró más tablas deduciéndolas por una vía distinta a la anterior, usando las identidades convenidas. Simultáneamente, Jobst Bürgi (1552-1632) desarrolló el cálculo de logaritmos de manera independiente de Napier, aunque con algunas diferencias en su tratamiento de terminología y valores numéricos escogidos, el principio fundamental de los logaritmos es el mismo.

Otros matemáticos interesados en los logaritmos fueron el italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) quien calculó tablas para funciones trigonométricas como senos, tangentes y secantes, y sus logaritmos respectivos; y Nicolaus Mercator (1620-1687) quien además de elaborar tablas logarítmicas, dedujo fórmulas de aproximación para el cálculo de logaritmos entre las cuales está la serie infinita que lleva su nombre, convirtiéndolo en el primero en establecer una relación entre los logaritmos y las series infinitas.

Sin embargo, el escocés James Gregory (1638-1675) fue el primero en identificar la asociación del área bajo una curva con los logaritmos, específicamente, con la curva hiperbólica rectangular pues su área satisface la ley de la suma de los logaritmos $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$, descubrimiento de gran importancia para el desarrollo del Cálculo implicando una conexión entre la función logaritmo natural y la hipérbola rectangular.

Gracias a este hallazgo, se fomentaron investigaciones queriendo precisar tal relación, desembocando en el surgimiento de las series infinitas y métodos de cálculo de los logaritmos. Tal es el caso de Isaac Newton (1641-1727) quien produjo la serie infinita de la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$, concluyendo que el área bajo la curva es igual al logaritmo, y cumple las leyes de adición (mostrada anteriormente) y sustracción $\log(x) - \log(y) = \log\left(\frac{x}{y}\right)$. Con esto, realizó tablas de cálculo de logaritmos de números enteros. No obstante, Newton no se refirió al área como logaritmo pero se nota que reconoció indirectamente su carácter logarítmico. Igualmente, Mercator en 1668 mediante el método de los indivisibles de Cavalieri produjo su serie infinita.

Hacia el siglo XVIII, los hermanos Bernoulli también realizaron su aporte. Jacques Bernoulli (1654-1705) trabajó en la curva *"espiral logarítmica"* mencionada antes por Descartes y Torricelli, pero Jacques mostró cuatro propiedades de esta curva, empezando a concebir la relación de los logaritmos con la parte gráfica. Por su parte, Jean Bernoulli (1667-1748) se interesó por la correspondencia entre las funciones trigonométricas inversas y los logaritmos de números imaginarios que en aquel tiempo también estaban en desarrollo desde la perspectiva analítica, llevándolo a esbozar un primer concepto de función y su notación. Adicionalmente, se enmarcó en la discusión junto a Leibniz, sobre los logaritmos de los números negativos.

Por último, el suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue quien contribuyó enormemente a la consolidación de los logaritmos como función pues fue el primero en introducir el concepto de manera formal, además de insertar mucha de la notación utilizada actualmente. En 1748, investigó el vínculo entre las funciones logarítmica y exponencial, obtuvo la función exponencial a^x a partir de la expansión de una serie infinita teniendo en cuenta la existencia de números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. De estas series infiere el caso particular de la función e^x y el número e, calculando su valor numérico y estableciéndolo definitivamente como la base del logaritmo natural, pues en años anteriores ya se comprendía la existencia de los logaritmos naturales pero no se habían formalizado como tal. Por consiguiente, es el primero en interpretar los logaritmos (que él denotaba como "lx") como exponentes, es decir: $\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$.

Igualmente, desarrolla las diferenciales de las funciones exponencial y logarítmica, y aplica todos los anteriores resultados a la teoría de los números complejos en donde la función e^x es fundamental y, una vez más, tiene correspondencia con la función logarítmica, también concluyó que cualquier número $x \in \mathbb{C}$ puede tener muchos logaritmos.

Como puede verse *grosso modo*, el camino del desarrollo de los logaritmos y la función logarítmica, ha sido muy largo y dispendioso como cualquier otro objeto matemático. Para el desarrollo del análisis de la investigación se trabajará sobre seis de los anteriores autores considerados claves en cada etapa de evolución del objeto en cuestión. Para ello, se presentan en una dimensión epistemológica y una dimensión histórico-cultural.

En la primera, desde tres perspectivas: la representación algorítmica, la analítica del concepto, y la modelación o aplicación a situaciones de la vida real (navegación, astronomía, crecimiento poblacional, entre otras). Y en la segunda dimensión, se pretende abordar la historia identificando dos aspectos: la red de conceptos relacionados con los logaritmos para su desarrollo tal como las progresiones geométricas y aritméticas, las series infinitas, etc.; y la extrapolación al infinito, que es eje transversal en todo su proceso, a pesar de notarse más formalmente desde el siglo XVII con el caso de las series infinitas.

A continuación se presenta una rejilla en dónde se relaciona cada autor y los ítems expuestos con el fin de identificar la ubicación según sus aportes, para tener enfoques definidos en el análisis histórico:

REJILLA ANALÍTICA DE LOS MOMENTOS SIGNIFICATIVOS EN LA HISTORIA DE LA FUNCIÓN LOGARITMICA PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA							
Momentos significativos / Personaje		ARQUÍMEDES (287 a.C-212 a.C)	JOHN NAPIER (1550-1617)	NICOLAUS MERCATOR (1620-1687)	JAMES GREGORY (1638-1675)	BERNOULLI (1654-1705/ 1667-1748)	LEONHARD EULER (1707-1783)
Descripción epistemológica	Representación algorítmica del concepto		X	X			
	Representación analítica del concepto			X	X	X	X
	Modelación en la formación del concepto	X	X				
Descripción Histórico-cultural	Red de conceptos fundamentadores	X	X	X	X	X	X
	Modelación, extrapolación de infinito	X	X	X	X		X

Tabla 1.
Rejilla analítica principales momentos de la historia de la función logarítmica.

Diseño, aplicación y sistematización de la entrevista.

Este trabajo se enfocó en estudiar la mirada del docente sobre varios aspectos influyentes en la enseñanza de la función logarítmica por lo cual se diseñó y aplicó una entrevista, con la estructura abajo indicada. Para tener una visión más global del proceso de enseñanza, habría sido importante conocer la opinión del estudiantado frente al ejercicio de su educador. Sin embargo, no se les realizó alguna entrevista, conversación informal o taller escrito, al considerar incorporaría un nivel mayor de complejidad que desborda el propósito del trabajo de enfocarse estrictamente en la actividad docente.

El cuestionario de la entrevista tuvo 30 interrogantes, distribuidos en tres bloques: Experiencia docente, Historia de las Matemáticas, y Condiciones Institucionales. El primero con 16 preguntas, además indagaba sobre el conocimiento matemático y didáctico de la función logarítmica del docente, su metodología de enseñanza, sus estrategias, sus dificultades, entre otros; el segundo con 8 preguntas, trataba de indagar el conocimiento sobre la Historia de las Matemáticas y su utilización como recurso didáctico; y el último con 6 preguntas, losaspectos referentes a la parte administrativa, factores institucionales y curriculares (positivos o negativos) influyentes en la profundización de la función logarítmica, y la relación con los Estándares Básicos de Competencias colombianos.Las preguntas del cuestionario apuntabanresponder a la pregunta del problema, hipótesis y objetivos de la investigación, gracias al testimonio que cada profesor y su análisis posterior.

Una vez diseñado el cuestionario, se pasó a estudiar las condiciones más favorables a su aplicación, de tal manera se obtuviera variedad de casos donde se extrajeran datos significativos para un análisis enriquecedor. Los criterios fueron los siguientes:

Criterios de selección de la institución:

Carácter. Institución de carácter oficial o privado;
Comuna. Localización distribuida por los puntos cardinales de la ciudad;
Estrato socioeconómico. Instituciones de todos los niveles socioeconómicos;
Filosofía. Instituciones con filosofía o prácticas culturales específicas.
Estrictamente, una debía ser de carácter religioso y otra, de carácter étnico.
Género. El género manejado por la institución: Femenino, Masculino, Mixto. Estrictamente, una institución debía manejar en su totalidad, población femenina, otra, masculina, y las demás, mixtas.[3]

Criterios de selección del docente:

Grado(s) en el o los que enseña. Docente de grados 8°, 9°, 10° u 11°.
Formación académica en pregrado y postgrado. Profesional o estudiante de Educación Superior de Licenciatura, y solo en un caso, de una profesión no afín;
Experiencia laboral. Mínimo 2 años;
Años lectivos enseñando Función Logarítmica. Mínimo 1 año;
Edad. Desde los 20 años en adelante.

La elección preliminar de las instituciones, se hizo con base en el mapa por comunas del municipio agrupándolas de acuerdo a los puntos cardinales. Cuatro de las diez instituciones elegidas serían de carácter oficial ubicadas en puntos opuestos de la ciudad. Los demás colegios serían privados, de variados estratos socio-económicosy zonas de Cali.

La información suministrada por los testimonios, en un primer momento se clasificó en siete categorías referentes a concepciones de los profesores sobre lo curricular, su enseñanza, los estudiantes, la función logarítmica, la Historia de las Matemáticas, los contenidos de los grados superiores, y su profesionalización, aspectos percibidos como importantes para examinar desde todo punto de vista la situación de enseñanza de la función. Se vio la necesidad de decantar más detalladamente la información. Para ello, se establecieron subcategorías en cada tópico con base en las ideas inmersas en las preguntas y ejes del cuestionario, las hipótesis planteadas desde el inicio, y los temas comunes surgidos de la revisión exhaustiva de cada entrevista, arrojando finalmente seis categorías macro: Concepción sobre la función logarítmica, su enseñanza, los estudiantes, la Historia de las Matemáticas, el currículo, y las condiciones institucionales.

Las seis tablas describen cada categoría con sus respectivas subcategorías. En algunas de las tablas se repiten subcategorías, debido a su transversalidad. Cada tabla es

[3] No se pudo conseguir una institución donde su población estudiantil fuera totalmente masculina, el caso más cercano fue la Academia Militar Joaquín Caycedo y Cuero.

comparativa: se encabeza por el nombre de la categoría y el número de las preguntas asociadas; en la columna izquierda, de manera vertical, se halla el nombre de la subcategoría; y en la parte superior en dirección horizontal, se señala el número correspondiente a cada profesor indagado. Los espacios vacios en algunos cuadros se deben a información no capturada.

La categoría *"Concepción sobre las condiciones institucionales"* está compuesta de las subcategorías: condiciones externas; condiciones administrativas; condiciones académicas; otros. La categoría *"Concepción del currículo"*, se conforma por: relegamiento de la enseñanza de la función; relación con los estándares; profundización durante el avance de los grados; importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas; importancia de la enseñanza de la función logarítmica; opinión sobre el currículo de la institución; relación de los contenidos de secundaria y universitarios.

En la categoría *"Concepción sobre la función logarítmica"* se encuentra: conocimiento sobre campos de aplicación; conceptos previos, ideas básicas al terminar el tema; percepción de las propiedades o ecuaciones logarítmicas; reconocimiento de las tres fases; faceta profundizada; características (numérica y geométrica) de la función; comparación entre $\log_a x$ y $\ln x$; razones de la definición como inversa.

En la categoría *"Concepción sobre la enseñanza"* se tiene: forma de presentación de la función; método de enseñanza; relación enseñanza-realidad; importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas; importancia de la enseñanza de la función; enseñanza superficial de la función; relegamiento de la enseñanza de la función; manipulación de la calculadora; relación con los estándares; insumos a su enseñanza.

La categoría *"Concepción sobre la Historia de las Matemáticas"* está integrada por: concepto de Historia de la Matemática; la Historia de la Matemática como mediadora en la enseñanza; condiciones para ser utilizada; propuesta de formas de utilizarla; temas en que ha usado la Historia de las Matemáticas; agrado por conocer la Historia de las Matemáticas; conocimiento sobre la Historia de la función logarítmica. Y por último, en la categoría *"Concepción sobre los estudiantes"* aparecen: apatía/desmotivación; estudiantes temerosos; estudiantes capaces; dificultades; soluciones para superar las dificultades. La tabla 2, es un ejemplo de una de los cuadros comparativos (siguiente página).

Se buscaron referentes teóricos sobre temas y problemas relacionados a lo anterior, con el fin de realizar un análisis objetivo y enriquecedor para el lector. Se optó por manejar estudios sobre el concepto general de función, aplicables a este caso específico. Se encontró sobre todo tópicos concernientes a las representaciones de una función, la variabilidad, el desarrollo algebraico, la relación entre progresiones y el comportamiento de ciertos tipos de funciones, la importancia de distinguir la naturaleza de cada una, la aplicabilidad, el uso de la tecnología, el conocimiento del profesor, y las dificultades posiblemente presentadas por los estudiantes, etc. Finalmente, se concretan los siguientes grandes problemas:

1. La intervención del desarrollo histórico en el proceso de enseñanza de la función logarítmica.
2. Relación entre las progresiones aritmética y geométrica para el reconocimiento del proceso algorítmico del logaritmo.
3. Contextualización de dicha relación en las representaciones de la función logarítmica.

4. La concepción sobre las ecuaciones logarítmicas.
5. La relevancia de la enseñanza de la función en todas sus fases.

Cabe recordar, los anteriores ítems a analizar son producto del entrelace de las hipótesis, objetivos y pregunta problema del proyecto, los testimonios de los profesores, la bibliografía y las nuevas inquietudes durante el proceso. Concretamente, la primera proposición se relaciona con la pregunta problema; la segunda y tercera, con la epistemología de la función; la cuarta y quinta, con lo curricular, todo transversalizado por las concepciones de enseñanza y de Historia de las Matemáticas registradas en las entrevistas.

CONCEPCIÓN SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS (18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)					
	1	2	3	4	5
Condiciones para ser utilizada.	--	--	--	Tal vez el tiempo y el currículo no dejan ahondar en la HM en clase. Hay poca información en internet y libros. Profundizar en HM requiere de-dicación. Todos los profesores a-bordan superfici-almente la HM.	--
Propuesta de Formas de utilizarla.	Le gustaría tener en los salones la biografía y aportes de los matemáticos ilustres; lectura de reseñas, Investigación a cambio de nota adicional y aportes en clase.	--	--	--	--
Temas en que ha usado la HM.	Hace recuento histórico completo en cada tema nuevo. Comenta anécdotas o biografías, el proceso del Sistema de Numeración.	Introduce lecturas o comentarios de anécdotas.	Solo conoce el proceso multipli-cativo de los Números Roma-nos (lo enseña), y sabe que los árabes introduje-ron lo que es la Matemática actual.	Ocasionalmente introduce la HM en clase, hablando de matemáticos. Depende del tema.	Solo ha comen-tado algo sobre sucesiones o sumatorias al ser importantes para la ciencia y la aplicabilidad. Les comenta historias agradables y poco confusas en cuanto a su contenido matemático.

	6	7	8	9	10
Condiciones para ser utilizada.	--	--	Más tiempo.	--	--
Propuesta de Formas de utilizarla.	--	Al hacer recuentos, los estudiantes se interesan y se resultan discusiones enriquecedoras.	Se podría involucrar con una actividad didáctica donde apliquen los conocimientos previos para instaurar el concepto de función logarítmica, y hacerlos pensar en la forma desarrollada por los matemáticos, el contexto, quiénes lo hicieron, etc.	--	En el colegio donde trabajaba antes, tenía a los filósofos matem con sus principales contribuciones matemátcas y geométricas. Debe inducirse al estudiante a la lectura, leerles para que se acostumbren, proponerles investigaciones por internet, que lleven recortes o lecturas a clase, pues las Matem también se leen.
Temas en que ha usado la HM.	Comenta información muy básica y sobresaliente de HM, como la vida de Pitágoras. Generalmente no la usa.	Introduce una guía con lecturas sobre Historia, o reseñas de textos, y consulta sobre términos, como para ir ambientando y con eso se fomenta interés. Les comenta: cuando el hombre empezó a organizar y contar, empezó la HM.	Solo la ha involucrado al hablar de la cuadratura del círculo en grado 3°.	La coloca como consulta. En grado 6° hace recuento de los Conjuntos Numéricos, por qué surge el cero, la razón de los números negativos, etc.	A partir de su conocimiento sobre la Historia de los logaritmos no ha introducido nada. Le gusta hablar de los Números Naturales, por qué se llaman así.

Agrado por conocer la HM.	Le agrada conocer la HM	Le agrada.	--	Lee algunos textos de HM. Quien conoce la HM conoce la Matemática en sí; el docente de matemáticas debe conocer mínimamente el origen de los conceptos, y la estructura de las matemáticas.	Lee mucho sobre HM. Le gusta mucho las obras de Euclides; no le gustan las traducciones de los españoles.
Conocimiento sobre la Historia de la función logarítmica.	Ninguno.	Ninguno.	Ninguno.	Ninguno.	No ha leído la H de los logaritmos, pero el trabajo de quienes contribuyeron a su desarrollo le parece muy bueno.

Agrado por conocer la HM.	De HM solo lee lo expuesto en libros de texto. Le agrada conocer sobre HM, y recuerda haberse leído 5 tomos en la universidad, de esa experiencia reconoce los avances de los procesos matemáticos a través del tiempo. No tiene la costumbre de revisar la Historia.	Para sus lecturas en HM usa la enciclopedia Sigma. Le gusta conocer de HM aunque se considera poca conocedora del tema, pero trata de introducirla en clase (1/2 o 1 hora, le parece poco). Al leer sobre historia se da cuenta que debe leer mucho más.	Le agrada conocer sobre HM, pues sin epistemología no hay nada, aunque poco se imparte en las universidades.	Poco lee sobre HM. Solo indaga de Historia cuando le surgen dudas. Como se enfoca en la parte práctica no le bota corriente a esta parte.	Le gusta leer HM, leer a Sócrates, Arquímedes, Pitágoras, Galieo.
Conocimiento sobre la Historia de la función logarítmica.	Ninguno. Conocer su Historia no aporta a la enseñanza.	Ninguno.	No conoce nada sobre la Historia de los logaritmos, pero ha leído sobre variaciones de la serie de Euler	Ninguno.	Conoce el trabajo de Copernico en el espacio y la gravedad, el precursor de los logaritmos, es el escoses John Neper, dice haber leído mucho sobre él y cómo llegó al número neperiano.

Tabla 2.

Cuadro comparativo de la Categoría “Historia de las Matemáticas” y sus subcategorías deducidas de las entrevistas.

Análisis de resultados

Como se ha dicho, en este apartado se analizan las concepciones de los entrevistados a la luz de la teoría didáctica, histórica, y las reflexiones personales. Concretamente se abarcarán cinco ejes: condiciones institucionales, curriculares, caracterización de la función logarítmica desde la Historia, la enseñanza y la Historia de las Matemáticas, y una perspectiva sobre los estudiantes.

Mirada sobre las Condiciones Institucionales.

Las condiciones de las instituciones oficiales y privadas son bien distintas. Los educadores de las públicas señalan la falta de apoyo económico para las salidas académicas y dotación en materiales didácticos, mientras en las privadas sí hay respaldo, incluso para la formación pedagógica de los maestros. Los colegios privados también poseen diferencias, por ejemplo, para el uso de los recursos tecnológicos y didácticos.

La gran mayoría de docentes coincide en que la intensidad horaria para la enseñanza de las Matemáticas, y específicamente de la función logarítmica, es reducida. Se evidencia la asfixia presupuestal de la educación oficial debido a las políticas gubernamentales, un desfinanciamiento que incide en los programas de apoyo pedagógico y tecnológico, instalaciones físicas, dotación material de maestros y estudiantes, y aspectos intangibles pero fundamentales como el tiempo, pues en estas instituciones se redujeron las horas de clase según testimonio de los entrevistados, situación limitante para la implementación de actividades innovadoras, profundización o abordaje de temas que mejorarían el rendimiento académico escolar.

Por otro lado, factores nominados como externos pero incidentes en las condiciones académicas de estudiantes y docentes, son el nivel escolar de los padres de familia, la comuna, el estrato socioeconómico de los estudiantes, y en algunos casos, la condición de desplazamiento. En los colegios públicos, súmese el número de estudiantes por aula (40), lo cual, como lo menciona un profesor, es problemático atender y verificar el proceso de aprendizaje de todos.

Es sabido que los colegios públicos generalmente aguardan estudiantes de barrios populares, personas socialmente excluidas de los elementos básicos para formarse integralmente, como una educación de sobresaliente nivel. Es distinta la calidad educativa de colegios de clase alta y baja, aunque todos sean privados, las bases conceptuales son enseñadas con exigencias y enfoques diferentes (la formación del profesor contratado, la jornada horaria, la disposición de material didáctico, las expectativas profesionales promovidas en los estudiantes, etc.) implicando costumbres de estudio distintas y generación de vacíos conceptuales más grandes que otros. En consecuencia, en los estudiantes de barrios populares se fomenta (no en todos) directa o indirectamente, un trabajo académico tendiente a ser muy básico, más no avanzado. Añádase, estas instituciones públicas y privadas acogen estudiantes desplazados que, en general, también llevan una formación inferior, dada la desigualdad entre lo urbano y lo rural.

Los maestros consideran que también influye la poca preparación académica de los profesores de Primaria. Ellos deben proveer a los estudiantes de elementos básicos para un buen desempeño en Secundaria, pero han hallado lo contrario: estudiantes que no manejan la aritmética de Números Naturales o Racionales, las propiedades de las igualdades, y han interiorizado erróneas ideas, conceptos o procedimientos de cálculo, produciendo un choque entre la metodología de enseñanza y sus concepciones cuando llegan al Bachillerato. No obstante, una docente precisa: todo el cuerpo profesoral de Secundaria debe promover la abstracción, el refuerzo de los conceptos básicos; y en el tema de funciones, el profesor de Matemáticas debe asegurar el aprendizaje por lo menos del concepto de función para poder tener un mejor proceso en la Educación Media.

Esto deja ver una ruptura en el sistema educativo, dada la inconsistencia en el proceso interno escolar: Primaria - Básica Secundaria - Educación Media, originada tal vez, por fallas en la formación docente en general, o por la carencia de un currículo generador de un proceso de verdadera formación, transversal a todos los ciclos escolares. Las falencias del educador de Primaria evidencian posibles rupturas en los programas de formación universitarios donde igualmente se presentan desigualdades en la calidad, se instruyen enfoques o metodologías más o menos significativas, resultando, en ocasiones, actitudes negativas y de superficialidad ante su enseñanza produciendo vacíos epistemológicos a impactar en el Bachillerato.

Mirada sobre el Currículo.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas recomiendan la enseñanza de la función logarítmica en el ciclo de grados 8° - 9°, para enfocarla en el siguiente de 10º - 11º, hacia el Cálculo. Parte de los entrevistados lo hacen en el último ciclo, otros comienzan el proceso desde grado 9°. La mayoría de ellos la aborda aumentando gradualmente la complejidad. No obstante, la función pasa a tener un papel secundario, siendo una de las razones la falta de tiempo, implicando el recorte de contenidos “no prioritarios” o el dar un barrido superficial por sus principales características a modo de información. A esta situación puede contribuir el orden dispuesto por los libros de textos utilizados por los docentes para este tema, como ellos lo afirman. Aunque los Estándares y los currículos de muchas de las instituciones visitadas, resaltan la aplicabilidad de las Matemáticas, en el caso de esta función, varios de los docentes desconocen sus campos de modelación.

A esta función no se le dedica buena parte de la programación como a otras temáticas, a pesar de ser uno de los conocimientos básicos del currículo colombiano en el que existen varios elementos de los últimos ciclos de escolaridad donde es importante trabajarla detalladamente en los contextos numérico, geométrico y algebraico, por su conexión con los conceptos fundamentadores del Cálculo. Parece no haber conciencia de estas relaciones epistemológicas (pudiéndose indagar desde la Historia) y por ello, la conciben como un tema aislado, sin utilidad y de menos dedicación.

Paralelamente, los docentes de colegios oficiales, consideran su PEI insuficiente para las necesidades de formación requeridas por el sistema laboral o de Educación Superior. Notan un fraccionamiento en el proceso de formación, específicamente en la relación de los contenidos de la Educación Escolar con la Superior. Los conocimientos matemáticos parecen ser poco comprendidos por los estudiantes para tener un buen desempeño en la Universidad, creándose cursos de pre-Cálculo o Matemática Fundamental.

Esta es una realidad que hace percibir un bajo nivel en la educación impartida por los colegios públicos, además de una desarticulación total entre el sistema de educación en general, pues se supone que cada etapa escolar debe dar los elementos suficientes para avanzar en la siguiente. También cabe resaltar, la importancia de la formación de pensamiento matemático frente a los contenidos matemáticos en el currículo, pues como lo decía una entrevistada, estos contenidos no sirven por sí solos si no hay una interiorización de los conceptos y se incentiva al estudiante a pensar matemáticamente, con lo cual se les estaría dando competencias para su desarrollo académico (escolar, universitario), y en la vida cotidiana y laboral.Se reitera la necesidad de una articulación entre los niveles de formación en el currículo institucional, generador de un proceso constante y coherente incluso con la Educación Superior.

Caracterización de la función logarítmica e intervención de la Historia en su enseñanza.

Dentro de las hipótesis iniciales de la investigación estaba el que la presentación de los Logaritmos en clase, fuese en tres etapas: algorítmica, función, y ecuaciones. Efectivamente, los profesores interrogados abordan las tres fases aunque con variaciones en algunos tópicos en cuanto al orden o forma de enseñanza.El análisis en esta parte seguirá el orden de las etapas mencionadas, con las respectivas claridades epistemológicas y propuesta para la enseñanza desde la Historia de las Matemáticas, teniendo como apoyo la rejilla de los momentos significativos de la Historia de la función logarítmica (tabla 1) siendo guía en cada fase, aludiendo a investigaciones de teóricos comoEdwars, Hairer y Wanner, Sierpinska, Socas, Farfán y Ferrari, entre otros.

Una de las intensiones del análisis por fases, es en primer lugar, diferenciar entre el concepto de Logaritmo y Función Logarítmica, pues algunos entrevistados los representan igual. Recuérdese que las concepciones del docente influyen en el aprendizaje de los estudiantes, por ello son importantes las aclaraciones.

<u>Presentación del logaritmo como algoritmo.</u> Los maestros entendieron esta fase como la definición primaria de Logaritmo, más no se ahondó en la identificación de las prácticas que inducían a la mecanización de su proceso algorítmico como se deseaba. Sin embargo, se pretende reconstruir el desarrollo histórico del concepto para una posible reformulación de su enseñanza como operación aritmética.

Como se decía en el marco teórico, Arquímedes (287 a.C. – 212 a.C.) fue quien empezó a indagar la relación entre la progresión aritmética y geométrica, pero fue John Napier (1550-1617) quien la consolidó como método esencial para el cálculo de logaritmos, incorporando términos numéricos para precisar sus cómputos, siempre teniendo como base la relación entre las progresiones. Este aspecto de la definición no fue mencionado por ninguno de los educadores entrevistados, tal vez por desconocimiento, pero debe resaltarse su constitución como principales conceptos fundamentadores del nacimiento de los logaritmos, a lo que se refiere la rejilla (tabla 1) en su Dimensión histórico-cultural.

Éste comúnmente se define como: el exponente al que se eleva una base a positiva y distinta de 1, para obtener el número positivo m dado: $\log_a m = z \leftrightarrow m = a^z$, y se plantean ejercicios del siguiente estilo: *Hallar el logaritmo de* $\log_2 32$; $\log_5 125$; $\log_3 81$.Esta definición empezó a remitirse frecuentemente luego de la relación con la potenciación establecida por Euler (1707-1783), la cual fue una manera de simplificar el concepto y el procedimiento, pero debe dotarse de sentido en la enseñanza dando a los estudiantes una idea básica del proceso originario conllevando al actual. En primer lugar, se definen las progresiones:

Progresión Aritmética. Es una sucesión en la cual cada término, exceptuando el primero, se obtiene de sumar al término anterior el mismo número real constante d, llamada diferencia. La expresión general es: $a_n = a_1 + (n-1)d$;a_1 es el primer término de la sucesión.

Progresión geométrica. Es una sucesión en la que todo elemento después del primero se puede obtener multiplicando el elemento que le precede por la constante r denominada *razón*. La expresión general es: $a_n = a_1 r^{(n-1)}$; a_1 es el primer término de la sucesión.

Supóngase las progresiones con Números Naturales incluido el cero, una diferencia $d = 1$ y una razón $r = 2$, respectivamente. La relación existente entre las expresiones es el número n, el cual indica el lugar de cada término:

	Progresión Aritmética.	***Progresión geométrica.***
$n = 0$	$a_1 = 1 + (0-1)\cdot(1) = 0$	$a_0 = 2\cdot(2)^{(0-1)} = 2\cdot 2^{-1} = 1 = 1$
$n = 1$	$a_1 = 1 + (1-1)\cdot(1) = 1$	$a_1 = 2\cdot(2)^{(1-1)} = 2\cdot 2^{0} = 2^1 = 2$
$n = 2$	$a_2 = 1 + (2-1)\cdot(1) = 2$	$a_2 = 2\cdot(2)^{(2-1)} = 2\cdot 2 = 2^2 = 4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n = 10$	$a_{10} = 1 + (10-1)\cdot(1) = 10$	$a_{10} = 2\cdot(2)^{(10-1)} = 2\cdot 2^9 = 2^{10} = 1024$

Al tabular los valores se tiene claramente lo actualmente conocido como las potencias de 2:

P. Aritm.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P. Geom.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Tabla 3.
Tabulación de valores de Progresiones Aritmética y Geométrica.

Si bien, calcular potencias directamente puede ser un proceso relativamente corto, se trata de retomar, reconocer y significar el procedimiento numérico de los logaritmos. La gran mayoría de los docentes entrevistados, considera a la potenciación un concepto previo importante, pues a través de ella deducen los logaritmos, aunque históricamente ocurrió lo contrario. Esta operación debería utilizarse en las progresiones, como se ilustró.

A partir de la definición actual de logaritmo, varios maestros lo conciben como la *forma de escribir* que debe hallarse un exponente. Usualmente, luego de la potenciación, enseñan radicación, logaritmación, y posteriormente hacen un ejercicio de comparación de los lugares de los parámetros en cada caso:

Potenciación	***Radicación***	***Logaritmación***
$a^z = m$	$\sqrt[z]{m} = a$	$\log_a m = z$

El logaritmo se ha venido concibiendo como una notación para indicar la carencia de un valor, más no una operación aritmética que provee un método propio de cálculo, necesario en la Historia de la humanidad para resolver muchos problemas prácticos. La representación de los maestros sobre los logaritmos es que consiste en hallar, por medio de ensayo y error, el exponente que satisfaga la potencia dada en el argumento.

La notación logarítmica, por sí sola no resuelve el ejercicio. El hecho de tener $3^x = 27$ y escribir $\log_3 27 = x$, no promueve la realización de algúnprocedimiento propia, como sucede con la suma, resta, multiplicación o división. En este caso, se dan valores consecutivos a x hasta encontrar el número con el cual la potencia resulte 27, como se haría sin anotar logaritmo. Es decir, dado el ejercicio:

Hallar $\log_3 27 = x$, el procedimiento común es:

$$3^1 = 3;\ 3^2 = 3 \times 3 = 9;\ 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27\ \rightarrow \log_3 27 = 3.$$

Con esta práctica, el logaritmo carece de sentido operatorio y existencial. Esta podría ser la razón de fondo de pensar en la irrelevancia de los logaritmos. Aunque otra sea, el impacto del auge de las calculadoras pues la gran importancia de su enseñanza años atrás radicaba en la utilización de las tablas logarítmicas (Abrate y Pochulu, 2007), como lo señaló uno de los entrevistados.

Por lo anterior, se desea formular un procedimiento a partir del significado no solo de la relación entre progresiones sino con la notación logarítmica. Si se observa detenidamente la Tabla 3, el argumento de un logaritmo es cualquiera de los valores de la progresión geométrica, y la razón r es la base: $\log_r(a_n)$, relación general por lo menos para los Números Naturales, que promueve una operación propia aludiendo a la raíz de la palabra *logaritmo*: *logos* (razón) y *arithmos* (número), es decir, su eje fundamental es el valor de la *razón* r. Como la razón es un concepto asociado a la división, entonces dado un argumento y la base, puede dividirse el primero con el segundo sucesivamente hasta llegar al menor valor del cociente. Los cocientes serán los valores de la progresión geométrica que le anteceden al argumento dado.

Por ejemplo: Hallar $\log_2 64$, entonces: $64 \div 2 = 32$; $32 \div 2 = 16$; $16 \div 2 = 8$; $8 \div 2 = 4$; $4 \div 2 = 2$; $2 \div 2 = 1$. El logaritmo es el número correspondiente a la cantidad de cocientes obtenidos, en esta ocasión 6, pudiéndose verificar el resultado al calcular la progresión aritmética y compararla con la geométrica. Por lo tanto $\log_2 64 = 6$. Si se tomara los valores de la progresión aritmética desde uno (1), el logaritmo sería el número de cocientes adicionado el argumento: de nuevo, seis (6). Un docente decía: "la logaritmación debería llamarse *exponenciación"*, pero como se mostró, no necesariamente se requiere de tal operación.

Para los números negativos, bastan las propiedades de suma y resta. Con los Racionales e Irracionales, los métodos son tan dispendiosos como los usados por Napier, pues la diferencia d en la progresión aritmética debe ser cada vez más pequeña para ir abarcando todos los números reales, estando al final dada por: n, y la progresión geométrica por ar^n con $a, r > 0$. Se insiste en la importancia de dar a los estudiantes, ideas básicas del desarrollo y proceso operatorio del concepto, dada la complejidad del tema.

El motivo principal para la creación de los logaritmos fue la necesidad de reducir largas multiplicaciones y divisiones a sencillas sumas y restas, incluso el manejo de las potencias y raíces. La construcción de las tablas logarítmicas precisamente ayuda a visualizar la simplificación de los cálculos. Para hallar el producto de dos términos de la progresión geométrica, se suman sus términos correspondientes en la progresión aritmética, el número de la geométrica relacionado con el resultado de la suma, es el producto, por ejemplo: 16×32 corresponde a $4 + 5 = 9$ y éste corresponde a 512. Para realizar una división, se procede igual pero restando.

Para calcular la potencia n-ésima de un término de la progresión geométrica, se multiplica el término correspondiente en la aritmética por n: 32^2 corresponde a $5 \times 2 = 10$, el cual corresponde a 1024 (aquí se ve explícitamente que del logaritmo resulta la potenciación). Para extraer la raíz n-ésima exacta de un número de la progresión geométrica, se divide el término correspondiente en la aritmética con el índice de la raíz: $\sqrt[4]{256}$ corresponde a $8 \div 4 = 2$, que equivale a 4. En su expresión general, estas operaciones se constituyen en las propiedades logarítmicas, tema que abordaremos más adelante.

Presentación del logaritmo como Función. La mayoría de maestros entrevistados consideran el concepto de función como imprescindible para la enseñanza de la función logarítmica. Lo resaltan como concepto previo necesario para comprender toda clase de funciones, y suficiente cuando se trata de recortar temas debido a la baja intensidad horaria, considerando innecesario ahondar en esta función.

No es cuestionable considerar al concepto de función como previo para el estudio de las funciones, pero sí lo es pensar que basta entenderlo para desenvolverse bien con las clases de funciones. Ferrari dice (2008, p. 314): "(…) reconocer la naturaleza de cada función es necesario para enriquecer el universo gráfico de los estudiantes, lenguaje que puede discutirse desde las operaciones gráficas." La particularidad de cada función produce un manejo distinto en el análisis de la variabilidad, los procesos infinitos, y las restricciones algebraicas. No es lo mismo manipular una función lineal y una cúbica, o una trigonométrica y una logarítmica, su origen y naturaleza es diferente, y por lo tanto generan distintas dificultades que el concepto de función por sí solo no puede solucionar.

Históricamente, el concepto de función surgió hacia el siglo XVII con las apreciaciones de Descartes, los trabajos sobre series infinitas de Newton, Leibniz acuñó el término "función" en la ciencia Matemática, y Euler le dio el papel principal en el desarrollo del Análisis Infinitesimal, convirtiéndolo en el concepto revelador de la Matemática moderna. Luego, Euler dotó del sentido de función a, por ejemplo, la potencia y los logaritmos. Él consolidó lo actualmente llamado Función Exponencial y Función Logarítmica.

Existen por lo menos dos aspectos esenciales de diferencia entre el logaritmo como operación aritmética (algoritmo), y como función: variabilidad y continuidad. La función logarítmica encierra obviamente el concepto de función, es decir, la correspondencia entre dos conjuntos de elementos bajo una regla, en donde se da el cambio entre dos variables, y la continuidad viene dada por los procesos infinitesimales. En este aparte, se analizarán ítems concernientes a la noción de función en el logaritmo: parte numérica, geométrica, variabilidad, continuidad e infinitud, partiendo de la forma usual de su enseñanza. Recuérdese, se aluden elementos de una apropiación didáctica de la Historia para una mejor presentación y comprensión de la epistemología de la función logarítmica.

Al detallar la forma de cada docente entrevistado de introducir y desarrollar la función logarítmica en clase, en general tienen el esquema: definición, gráfica, inversalidad y propiedades.La gran mayoría toma la función exponencial como tema introductorio. Ningún educador describió la definición presentada pero se podría inferir su relación con el tema antecedente, enunciándola así:

Si a es un número real positivo distinto de 1 $(a \in \mathbb{R}^{+} \wedge a \neq 1)$, y x es cualquier número real positivo dado $(x \in \mathbb{R}^{+})$, existe un número real único y tal que:$\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y$; como lo planteó Euler por primera vez en 1748.

De aquí se desprenden representaciones que expresan el mismo concepto: fórmulas, tablas, gráficas. Según Even, en primer lugar:

> *(...) los profesores tienen queentender los conceptosendiferentes representaciones, y ser capaces de traduciry formarvínculosentre todos. Diferentes representacionesdan ideasdiferentes que permitenuna mejor comprensión, más profunda, más potentey más completade un concepto.* (EVEN, 1990, p. 524)

Estas representaciones se enmarcan en un carácter numérico y geométrico. Los profesores conciben al numérico, como la tabulación de valores, identificación del dominio, rango, variable dependiente e independiente, procedimientos algorítmicos, y relación numérica con la radicación y potenciación. En la parte geométrica, la exposición y ubicación de la parte algebraica en un plano y sus coordenadas, donde se muestra el comportamiento de la función, la variación al cambiar la base del logaritmo: la gráfica siempre se extiende hacia la derecha, si la base $a > 1$ la gráfica es creciente, si $0 < a < 1$ es decreciente, además de la expansión, contracción, rotación, y traslación.

Entrando en la caracterización numérica, se vio que el logaritmo viene dado por la relación entre la progresión geométrica y aritmética, relación esencial también en su faceta como función. Primeramente determínese el dominio y el rango. En la Tabla 3, el argumento x del logaritmo son los valores de la progresión geométrica, los cuales nunca toman valores negativos pues al asignar un n negativo en la progresión, el exponente negativo corresponde a una fracción positiva. El dominio de la función logarítmica entonces está integrado por la progresión geométrica.

Napier comenzó sus cálculos con números naturales, pero con el fin de reducir los espacios entre cada número, hizo gran uso de los números decimales tanto que la comunidad matemática de la época aceptó definitivamente dicho sistema. Sin embargo, él siguió observando muchos espacios para lo cual desarrolló un método que permitía reducirlos aún más y calcular los logaritmos, inclusive de expresiones trigonométricas: *la interpolación lineal*. Es así como se expande el dominio de la función, abarcando lo actualmente llamado Sistema de Números Reales, tomando valores racionales e irracionales positivos. Retomando la relación entre progresiones, en consecuencia el rango está dado por la progresión aritmética, es decir, todos los Números Reales.

Los logaritmos de números negativos también existen, siendo su rango los Números Complejos como lo estableció Euler mediante la expresión: $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta$, donde cualquier número positivo o negativo tiene infinitos logaritmos debido a la variedad de ángulos que puede tomar θ. En este aspecto ya habían trabajado Jean Bernoulli (1667-1748) y Leibniz (1646-1716), pero este tema se deja a investigación del lector.

Uno de los obstáculos epistemológicos presentes en la enseñanza del concepto de función, enunciado por Sierpinska (1992, p. 9) es: "*Las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no son un objeto digno de estudio en Matemáticas*". La tabulación parece tomarse como un instrumento sin mayor trascendencia donde se ubican números de acuerdo a una fórmula, el llamado es a reconocer la importancia de enseñar las relaciones precedidas a la construcción de tablas para significar su existencia.

Identificado el dominio como la progresión geométrica y el rango como la aritmética, ahora se entiende por qué x (que generalmente representa la variable independiente) aparece en el argumento de la función, e $y = f(x)$ como logaritmo es la variable dependiente, pues efectivamente depende del número n determinado por la progresión geométrica. Esto conduce a la representación gráfica de la función, la cual para los entrevistados parece ser un instrumento necesario para explicar su comportamiento y características. Al respecto, Ponte afirma:

> *La interpretación de lascaracterísticas importantesde las funcionesy susgráficas cartesianassin duda mereceun lugar bienestablecido en elcurrículo de matemáticas. Ideas relacionadas con lavariación, talescomoaumentar, disminuir, la constancia, el máximo y mínimo,y con variacionesen la variación, como la variación rápida y lenta,la tasa de cambio, la suavidad, la continuidad y discontinuidad,es mejorcomprendidoa partir derepresentaciones gráficas*. (PONTE, 1992, p. 7)

La parte geométrica fue un elemento esencial en la evolución de la noción de función, concepto utilizado para designar las relaciones entre las entidades geométricas. No obstante, debe distinguirse el papel de la Geometría en el ámbito matemático y didáctico. Si bien, el uso de la Geometría para modelar, visualizar y ejemplificar expresiones formales y generalizadas es una herramienta didáctica importante dada la necesidad del estudiante de relacionar una imagen con las propiedades del concepto para lograr entenderlo, debe tenerse en cuenta que la representación gráfica no guarda necesariamente la misma indispensabilidad en algunos campos de la Matemática, como el Análisis Infinitesimal.

Aunque las gráficas sean un recurso para la enseñanza, en el aula de clase se presenta una situación particular, Socas (1997, p. 137) señala:

> *… para bastantes alumnos de secundaria las representaciones gráficas de las funciones parecen haber perdido su valor de representación de la función (…) El concepto de función se reduce, en cierta manera, a la imagen visual que su curva genera; la expresión analítica $y = f(x)$ sirve únicamente para designar esta curva y para identificarla entre otras formas distintas: de esta manera, la coordenada $(x, f(x))$ sería el nombre de tal o cual punto particular de la curva, esto genera errores; entre otros, el suponer que las gráficas son siempre continuas debido a que las situaciones manejadas por los estudiantes siempre tienen esta propiedad.* (SOCAS, 1997, p. 137)

Lo anterior no solamente ocurre en los estudiantes, los docentes también podrían concebirla así. Si bien, al ver una curva en el plano cartesiano se piensa inmediatamente en una función, debe concientizarse del significado de los ejes, los puntos y el plano en general, de acuerdo a su naturaleza. En la función logarítmica, el eje x representa la progresión geométrica, y el eje y la progresión aritmética, deducido el dominio y el rango como antes, las coordenadas no necesariamente se expresan como: $(x, \log_a x)$ sino como $(x = ar^n, y = n)$, pero teniendo en cuenta la definición actual del logaritmo, las coordenadas serían $(x = r^n, y = n)$ donde $a = 1$.

Ahora considérese otra problemática relevante reflejada en las entrevistas relacionada con el pensamiento variacional en la enseñanza de la función logarítmica. En primer lugar considérese el acto de comprensión para el concepto de función, planteado por Sierpinska (1992, p. 17): "*Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, el otro en términos de cantidades variables y constantes*". El docente debe tener claridad sobre los modos de pensamiento, para poder inducirlos en sus estudiantes y efectivamente sea un acto de comprensión. El primer modo se abordará en la próxima sección; para el segundo, Sierpinska cita a Euler para diferenciar "constante" de "variable":

> *'Una cantidad constante es una cantidad determinada que conserva siempre su valor… Es verdad que, en el Análisis ordinario (Álgebra) que no posee más objetos que las cantidades determinadas, se designa ordinariamente aquellas que son conocidas por las primeras letras del alfabeto, y aquellas que no lo son, por las últimas; pero es una distinción que se atiende menos en la alta geometría; allí se consideran las cantidades bajo otro aspecto, las unas son consideradas como constantes y las otras como variables (Introduction à l'Analyse Infinitésimale, par Leonard Euler).'*[4] (SIERPINSKA, 1992)

Al revisar los conceptos previos estimados por los profesores para la enseñanza de la función logarítmica, explícitamente un caso resalta el concepto de variable dependiente e independiente, pero al preguntárseles por lo comprendido al finalizar el tema, varios esperan el entendimiento de ese concepto, además de reconocer las situaciones donde se utiliza la función. Este aspecto sobre el pensamiento variacional, es necesario para abordar cualquier función y especialmente la logarítmica, pues goza de un parámetro adicional que las tradicionalmente enseñadas: la base. Las variables también tienen su naturaleza, por lo que debe hacerse de la "*Discriminación entre las variables independientes y dependientes*", otro acto de comprensión (Sierpinska, 1992).

Como se ha dicho, x representa la variable independiente, en este caso es cualquier valor positivo de una progresión geométrica, escrito en el argumento del logaritmo, e y, la dependiente dada por al comportamiento numérico de la base y el argumento frente a la progresión geométrica. La base a es un parámetro que particulariza la función, como sucedía con la inclinación de los planos determinadores de las cónicas estudiadas por Apolonio (262 a.C. 190 a.C.) y cuya inclinación, en la Geometría Analítica de Descartes, representaba un parámetro.

Al dar inicio en la enseñanza del pensamiento variacional de esta función, debe hacerse énfasis en que existen tantas funciones logarítmicas como valores pueda tomar la base (recuérdese que la base siempre será positiva pues la razón r nunca es negativa o cero), en cada función la base es fija (es decir que no varía al mismo tiempo que x e y) y si ésta cambia, entonces se hablaría de una función logarítmica distinta.

Es importante hacer estas aclaraciones. Aunque no se manifestó en las entrevistas, según Sierpinska:

> *los estudiantes tienen dificultad para identificar qué está cambiando o cuáles son los objetos que cambian en sus procesos*. (SIERPINSKA, 1992, p. 11)

Además, los Estándares Básicos (2005, p. 87) establecen la necesidad de identificar "*la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan*".

[4]Traducido del Latín al Francés por J. B. Labey. Impreso en 1797 en Paris Chez Bachelier.

Pasando a la problemática del infinito en la función logarítmica: uno de los aspectos más importantes de su enseñanza, aunque solamente un maestro lo haya referido. El logaritmo y la función logarítmica tuvieron procesos de infinitud un poco distintos pero cada vez más complejos. En principio, a Arquímedes le preocupaba el manejo de números muy grandes, Napier posicionó la notación decimal con la manipulación de números muy pequeños, y con el novedoso método de interpolación se encontraban números aún más pequeños y cercanos entre sí, mostrando la densidad de los decimales además de la extensión de las cifras significativas plasmadas en sus tablas. Igualmente, dio una definición geométrica involucrando el movimiento de puntos, queriendo ilustrar el comportamiento continuado de los términos arrojados por las progresiones como puede inferirse de la explicación de Boyer:

> *Sea el segmento $\boldsymbol{AB}$ y una semirrecta $\boldsymbol{CDE}$ dados en la figura. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de $\boldsymbol{AB}$ con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta $\boldsymbol{CDE}$ con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable $\boldsymbol{CQ}$ el logaritmo de la distancia $\boldsymbol{PB}$.* (BOYER, 2001)

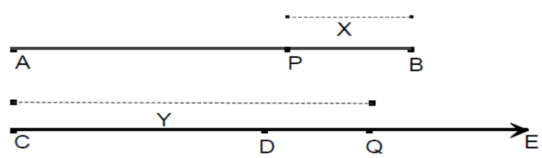

Figura 1.
Representación geométrica del logaritmo, hecha por Napier.

La consolidación como función y objeto de estudio en el Análisis, se logró gracias a las relaciones con el área bajo la hipérbola, y con las series infinitas, las cuales constituyen otra parte de la *Red de conceptos fundamentadores* y de *Representación analítica del concepto*, como se registra en la rejilla (tabla 1). El comienzo del Cálculo Integral se da por el método de los indivisibles de Cavalieri(1598-1647): consistente en calcular el área de una figura plana o sólida mediante su corte en finas rebanadas, y la sumatoria de las áreas de cada trozo correspondía al área de la figura. Esta idea se expandió al caso del área bajo las curvas cartesianas, con la construcción de rectángulos cada vez más delgados que coparan todo el espacio entre la gráfica y el eje x.

Se añade la explicación hecha por Gonzales y Vargas:

> *Él se apoya sobre el hecho de que, cuando se toman abscisas tales que los intervalos que se forman crecen en progresión*

> *geométrica y se levantan las ordenadas correspondientes, entonces el área bajo la curva de dos abscisas sucesivas son iguales. Luego a medida que crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva crece aritméticamente11. Por lo tanto, la función área bajo la hipérbola cumple la propiedad aditiva característica de los logaritmos ($L(xy) = L(x) + L(y)$) ya que:*
> $$A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y}$$
> *por ser iguales las áreas entre abscisas en progresión geométrica, y se puede considerar que 'se parece' a los logaritmos.* (Gonzales & Vargas, 2007, p. 139)

Este descubrimiento produjo un auge en el estudio de los logaritmos, las áreas hiperbólicas y las series infinitas. Al parecer Newton (1641-1727) fue el primero en desarrollar métodos de cálculo de logaritmos a partir de las áreas hiperbólicas. Él trabajó con la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}, (x > -1)$ y su serie $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ Al aplicar, lo actualmente conocido como Integración, se obtiene el área entre $[0, x]$ (Edwards, 1979, p. 158):

$$A(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

De lo cual se deduce:

$$A\big((1+x)(1+y)\big) = A(1+x) + A(1+y) \text{y} A\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = A(1+x) - A(1+y).$$

Newton no relacionó directamente el área bajo la hipérbola con los logaritmos pero con base en esas expresiones indagó nuevos métodos para calcularlos.

Por su parte, Mercator(1620-1687) fue el primero en publicar (1668) una serie infinita relacionada con el *logaritmo natural*. Es la misma serie de Newton, pero él le dio el reconocimiento como $\ln(1+x)$. Entonces, la serie de Mercator es:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cabe aclarar, Mercator infirió este resultado trabajando paralelamente con el método de los indivisibles de Cavalieri. Newton no publicó los suyos anticipadamente por ello se le atribuye a Mercator.

Gregory también aportó una serie para el logaritmo natural (Hairer y Wanner, 2008, p. 36). Se reemplaza x por $-x$ en la serie de Mercator:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

Y relacionándola con la de Mercator, se tiene: $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots)$.

Por su parte, Euler (1707-1783) consolidó las exponenciales y logaritmos como funciones, y les dio un tratamiento mediante series infinitas. Él concebía números infinitamente pequeños e infinitamente grandes. Al primero lo denotaba por ω y al segundo i, pero tiempo después i se adoptó como símbolo de los Números Complejos. Definió a través de series: la exponencial general a^x, el natural e^x, calculó el valor del número irracional e, y dedujo la serie para el logaritmo natural utilizando sus métodos con ω e i. Se expondrán los tres primeros procedimientos como lo hace Edwards (1979, p. 272-273) pues el cuarto ya se ha visto, aunque no con el proceso desarrollado por Euler el cual es un poco más complejo.

Para empezar, renómbrese ω por ϵ, e i por N. Euler establece $a^\epsilon = 1 + k\epsilon$, donde k es una constate dependiente de a. Dado un número (finito) x, Euler introduce el número infinitamente grande $N = \frac{x}{\epsilon}$, entonces:

$$a^x = a^{N\epsilon} = (a^\epsilon)^N = (1 + k\epsilon)^N = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N =$$

$$= 1 + N\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \cdots \quad \text{(series binomiales)}$$

Como N es infinitamente grande, él afirma que: $1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \cdots$

Luego: $a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots$ Sustituyendo $x = 1$, se obtiene: $a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots$

La exponencial natural se da cuando $k = 1$: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Ahora, si $k = x = 1$ resulta el valor del número e: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

A lo que él llama la base del logaritmo natural o hiperbólico, y calcula sus primeros 23 decimales: $e \approx 2.71828182845904523536028$.

Haciendo un breve recorrido por los procesos que involucran el infinito en los logaritmos y la función logarítmica, pueden verse los diferentes contextos matemáticos por los que ha pasado: numérico, geométrico y analítico, cada uno aportando al avance de la siguiente etapa. En la enseñanza, no solo es hacer reconocer su trayectoria sino pensar en la causa de las restricciones de la función en comparación con el dominio y el rango de las demás funciones enseñadas, o el comportamiento creciente o decreciente de la función de acuerdo a la variabilidad de los números infinitamente grandes o pequeños, por qué los extremos toman comportamientos distintos: en determinado intervalo ($0 < x < 1$) la gráfica es decreciente y tiende a cero, mientras en otro es creciente y no se acerca a un valor específico, elementos a analizar sobretodo en grado 11° donde se aborda Cálculo y el concepto de límite permite hacer este tipo de reflexiones que dan significado al aspecto infinito de la función marcado fuertemente en la historia.

En este apartado se trató de brindar elementos para sobrellevar en el aula de clase esa complejidad intrínseca de su naturaleza, y por tanto las dificultades se traten con mayor cuidado, pues encierra particularidades importantes de ser estudiadas con detenimiento. Se recomienda entonces, dejar de considerarla un contenido opcional de la programación curricular y reconocerla como un tema fundamental para trascender a conocimientos de mayor nivel que aportan a una mejor preparación académica de los estudiantes.

Presentación del logaritmo como forma algebraica o ecuación. Para empezar, Ponte afirma:

> *La enseñanza de las funciones necesita articular de manera equilibrada las tres formas más importantes de la representación, es decir, la forma numérica, gráfica y algebraica*. (PONTE, 1992, p. 6)

Es probable que el currículo de las instituciones visitadas no contemple la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas o enfatice en ella, pero los educadores como agentes mediadores entre el conocimiento matemático y el estudiante, y su ineludible superioridad académica, deben reconocer y manejar las representaciones involucradas en el estudio de la función logarítmica, específicamente.

La forma algebraica de la función, permite entenderla en todas sus dimensiones, capturar sus características numéricas y geométricas, y encerrar en una expresión general gran parte de este contenido, permitiendo abstraer la epistemología del concepto en sí, entender su naturaleza de manera universal. Por ello, se insiste en la importancia de la enseñanza de las ecuaciones logarítmicas.

Según los docentes entrevistados, el instrumento esencial para abordar las ecuaciones son las propiedades logarítmicas de suma, resta y exponente. Hairer & Wanner (2008, p. 29-30) definen la función logarítmica partiendo de sus propiedades:

Una función $\ell(x)$, definida para valores positivos de x, es llamada una función logarítmica si para todo $x, y > 0$:

$$\ell(x \cdot y) = \ell(x) + \ell(y);\ \ell(z/x) = \ell(z) - \ell(x);\ \ell(1) = 0;\ \ell\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}\ell(x)$$

Uno de los profesores afirmaba que al plantear la función en ecuaciones, pierde su naturaleza como función. Con lo anterior se refuta dicha idea, pues precisamente sus propiedades algebraicas se cumplen únicamente en esta función o en otras que se comporten de manera similar, como la hipérbola. Al conectar explícitamente la parte algebraica y la funcional, con esta definición se comprende por qué las condiciones de la función, el comportamiento del dominio, el rango, la restricción de las variables y parámetros, también abarcan el contexto de ecuaciones.

Los maestros entrevistados, en general, consideran las ecuaciones como relevantes para el desarrollo del pensamiento lógico y las destrezas algebraicas de los estudiantes. Se encontró, en la escolaridad no se enseñan ecuaciones polinómicas con logaritmos como se supuso inicialmente, sino ecuaciones donde sus términos son logaritmos y/o exponenciales.

A pesar de reconocer los beneficios intelectuales para los estudiantes, el profesorado no ve muy importante la enseñanza de ecuaciones logarítmicas en la escolaridad por razones como falta de aplicación en la vida real, dependencia de las expectativas académicas de educación superior del estudiante, o el nivel académico manejado en un colegio público y uno privado. Para varios de ellos es prioritaria la aplicabilidad de las Matemáticas. Además Ponte expone:

> *Naturalmente, el trabajo con expresiones analíticas sigue siendo importante. Pero, más fundamental quela habilidad del estudiante para manipular expresiones larga sy complejas correctamente, es que los estudiantes comprendan el significado de estas expresiones en situaciones concretas.* (PONTE, 1992, p. 7)

Sin embargo, percibiendo una baja calidad de la educación en Colombia y sus causas, la enseñanza de las Matemáticas no solo debería enmarcarse en la aplicabilidad sino también en el manejo de procedimientos puramente matemáticos que permitan el acercamiento a temas más complejos para aumentar el nivel académico de los estudiantes y se subsane, en parte, la ruptura del Sistema de Educación Nacional.

En el cuestionario se quiso explorar las posibles diferencias en la manipulación de ecuaciones con las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \ln x$, previa consulta sobre las probables distinciones entre $f(x)$ y $g(x)$. Mayoritariamente se respondió que la diferencia entre las funciones era la base, pero la manipulación en ecuaciones era la misma, tal vez la primera podría generar confusiones debido a la errónea limitación de las variables. Todos tienen concepciones distintas de estas funciones: no se encontraron ideas unificadas, ni la confirmación de otra hipótesis respecto a la preferencia de la función logaritmo natural para el manejo algebraico más sencillo, al ser la inversa de la función exponencial $h(x) = e^x$. Por el contrario se evidenció, la enseñanza se enfatiza en la forma general de la función.

Al mismo tiempo, enseñan el cambio de bases entre logaritmos. Suelen usarse con base 10 y e. La conversión de bases se inició con los cálculos de Briggs (1561-1631), quien trabajó con Napier en sus tablas. Briggs introdujo el logaritmo de base 10, calculando en 1624, treinta mil logaritmos con catorce cifras decimales. Además realizó la conversión de los logaritmos de Napier, pues cabe resaltar su particularidad debido a que la razón r escogida para disminuir los espacios entre los números hallados y los valores de la progresión geométrica correspondían a senos de ángulos. En ese tiempo se realizaba la conversión mediante la extracción de raíces sucesivas de 10, pero actualmente se puede proceder con la expresión (Edwards, 1979, p. 153):

$\log x = \frac{\operatorname{Nog} 1 - \operatorname{Nog} x}{\operatorname{Nog} 1 - \operatorname{Nog} 10}$, donde $\operatorname{Nog} x$ es la notación para los logaritmos de Napier.

Haciendo la conversión resultan las identidades: $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 1$.Los logaritmos con base 10, son denominados logaritmos comunes o de Briggs.

Euler determinó una regla, llamada *La regla de oro*, para realizar el cambio de base en todos los casos, esta es (Hairer&Wanner, 2008, p. 30):

$$\log_b x = y \cdot \log_b a \leftrightarrow y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_a a}.$$

Retomando el primer modo de pensamiento enunciado por Sierpinska, cuando se aborda la fase de ecuaciones, el significado de las cantidades x, y, a cambia. Las primeras dos ya no representan variables, sino cantidades fijas conocidas y otras por conocer a través de la manipulación algebraica, sin perder de vista las restricciones definidas por el comportamiento de la función, pues como se decía arriba, si bien se cambia de contexto, históricamente las expresiones algebraicas y las relaciones funcionales han tenido un vínculo muy estrecho, por ello se resalta la necesidad de "identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas", objetivo dispuesto en los Estándares Básicos (2005, p. 87).

Reflexiones sobre la enseñanza y las concepciones de la Historia de Las Matemáticas.

La gran mayoría de los educadores conciben la Historia como mirar en retroceso los hechos de construcción de las Matemáticas: cómo, dónde, cuándo, quiénes, por qué y para qué se originaron los conceptos. Uno de ellos, además concibe la Historia de las Matemáticas como las acciones relativamente recientes relacionadas indirectamente con las Matemáticas, como la escritura o lectura de un libro de Matemáticas. Otro, señala que el *cómolas hicieron*, ayuda a afinar los métodos de enseñanza, y el *para qué* indica los objetivos y la interpretación de la naturaleza. Particularmente, de la Historia de los logaritmos solamente un maestro describió un poco su origen y precursor. En un contexto más social, la conciben como cultura, herramienta pedagógica, oportunidad de reconocer y valorar lo realizado por otros, no subestimar a los demás por la incomprensión o dificultades en el aprendizaje de los conceptos.

Es importante tomar conciencia de la Historia de las Matemáticas como disciplina no solo que estudia el origen, desarrollo y contexto de los conceptos matemáticos, sino como una herramienta para la enseñanza que permite a estudiantes y docentes acercarse a la naturaleza de las mismas. Para su adopción dentro del aula, es necesario tener un concepto definido de la Matemática como construcción humana, social y cultural, como ciencia de constante cambio donde se entrecruzan diferentes pensamientos, posiciones y elementos de la vida real. Por tal motivo, se resaltan esas ideas primarias relacionadas con la cultura, la pedagogía y los valores humanos expresadas arriba.

Varios de los entrevistados involucran la Historia por medio de lecturas, reseñas, biografías, anécdotas o retratos de los matemáticos más famosos, como objeto introductorio, motivador o informativo. Las lecturas y reseñas se integran como preámbulo a la unidad o a modo de consulta previa, para investigación de los estudiantes. Las biografías y anécdotas se comentan esporádicamente a manera de información, o estímulo para convencerlos de sus capacidades.

Si bien es valioso reconocer a través de relatos, la labor de las personas que han construido la ciencia Matemática durante siglos, su exploración puede ser más significativa si se revive y moldea parte del origen y etapas de desarrollo de los temas dispuestos para la escolaridad. Este artículo, quiere dar idea de un uso alternativo de la Historia en la enseñanza sin inducir a la implementación de secciones o tiempos independientes a la ejecución de las clases, entendiendo que un mismo concepto puede abordarse de diferente manera y el profesorado debe estar familiarizado con diferentes métodos de resolución, como lo afirma Even (1990, p. 525). La intensión es: el maestro entrelace el proceso evolutivo de los conceptos con su propia metodología de enseñanza.

Las anécdotas y narraciones pueden ser una aproximación a la dimensión humana y cotidiana de las Matemáticas, ayudaría a reconocer como personas a quienes aportaron sus conocimientos, las situaciones curiosas en su vida "privada" o su labor diaria (Abrate y Pochulu, 2007, p. 112). Esto contribuiría a romper la creencia sobre la necesaria genialidad y perfección para comprender Matemáticas. Sin embargo, debe tenerse cuidado con el tipo de anécdotas a compartir pues el objetivo es acercarse al lado humano de la Matemática y al mismo tiempo, sea significativa para el aprendizaje del concepto abordado.

Tener los retratos de los matemáticos famosos en el aula de clase, también aportaría a la sensibilización en el carácter humano de las Matemáticas, esta vez en una forma física visual, la imagen de un ser humano de carne y hueso que aportó grandes ideas para todo lo conocido hoy en la Ciencia y la Tecnología. Así mismo, podría indagarse el contexto cultural pues estas personas llevan consigo una vestimenta particular correspondiente a su época, país u oficio. Recuérdese, no todos eran matemáticos de profesión, algunos se dedicaban a otras actividades pero gustaban del desarrollo matemático, como Napier, Fermat, Viète, etc.

Adicionalmente, se darían a conocer las dinámicas de estudio de las Matemáticas a lo largo de la Historia. Una de ellas es la conformación de grupos y comunidades matemáticas, los cuales se constituyen por el interés en el desarrollo de un mismo concepto o con fines pedagógicos como el grupo Bourbaki, comentando sus resultados a través de cartas, reuniones y discusiones para la validación de sus ideas. En cuanto, al ambiente físico del salón de clase, éste sería más situado en Matemáticas y humanizador de las ellas.

Se sugiere dejar de enfocarse solamente en los más *famosos*, dada la existencia de otras personas con valiosos aportes, que directa o indirectamente hicieron sobresalir a los considerados *famosos*. Un ejemplo, son las mujeres matemáticas a quienes la mayoría de veces se omite la divulgación de sus trabajos, tema que da cabida al tratamiento del género en las Matemáticas y en el aula de clase.

Paralelamente, algunos educadores afirmaban: quien conoce la Historia de las Matemáticas conoce las Matemáticas mismas, y su estudio requiere mucha dedicación. Su lectura profunda puede depender del grado de interés de la persona, y su implementación en clase, de la creatividad. A pesar del posible poco interés, es importante tener conocimientos históricos básicos de los temas a enseñar, no solo de fechas y nombres, sino principalmente de lo desarrollado y las características del surgimiento. Se hace el llamado a utilizar fuentes bibliográficas de autores con trayectoria en el tema, para extraer información confiable tanto del recorrido histórico como de las intervenciones anecdotarias.

Uno de los planteamientos de esta investigación ha sido la necesidad de explorar la Historia para involucrarla en la enseñanza, pero se resalta adicionalmente, lo primordial de conocer detalladamente tanto el tema matemático en sí, como el conocimiento pedagógico y didáctico, pues se encontraron casos en que no tienen el hábito de leer sobre temas concernientes a la Educación, y se percibió un poco el desconocimiento sobre la parte matemática de la función logarítmica, concretamente al indagar sobre su caracterización numérica y geométrica, pues no daban una descripción específica.

El manejo del conocimiento matemático es clave para la implementación de una buena enseñanza y obtener el aprendizaje de sus estudiantes, Even (1990, p. 521): "Un maestro que tiene sólidos conocimientos matemáticos para la enseñanza es más capaz de ayudar a su/sus estudiantes a lograr una comprensión significativa dela materia.", aquí influye su formación académica de Educación Superior o capacitaciones, donde debería incentivarse al aprendizaje de Matemáticas para maestros, pues se sabe, el manejo de las Matemáticas puras es distinto al de su enseñanza.

En esta sección se pretendió, además de analizar las concepciones de los entrevistados sobre Historia de las Matemáticas, concientizar sobre la importancia de su implementación en la enseñanza, a partir de las estrategias expresadas en los testimonios. La actividad o comentario más sencillo sobre Historia en clase, está dotado de una complejidad similar a la de las Matemáticas mismas, pues lo rodea un contexto epistemológico, social y cultural del cual se requiere tener buen conocimiento para hacer mucho más significativa su intervención.

Mirada sobre los estudiantes.

Cuatro de los diez profesores entrevistados, mencionaron percibir una actitud de apatía, falta de estudio y motivación, por parte de los estudiantes, particularmente por las Matemáticas, a pesar que el cuestionario no indagaba este aspecto. Algunos estudiantes repelen la función logarítmica al verla como un tema difícil. Al contrario, un maestro resalta la importancia de la enseñanza de este tema para vencer el miedo. Igualmente, algunos profesores, a pesar de esas actitudes, creen a los estudiantes personas tan capaces de manejar las Matemáticas como quienes las desarrollaron.

No solamente la complejidad de las Matemáticas es la causante de las dificultades de los estudiantes. En Didáctica se distinguen tres tipos de procesos respecto al conflicto durante el aprendizaje de las Matemáticas: las dificultades, obstáculos y errores. Socas (1997, p. 126) define detalladamente cada una. Específicamente, clasifica las dificultades en: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas; a los procesos de pensamiento; a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas; a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos; a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Sobre las últimas, Socas menciona:

> *Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc. generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos.* (SOCAS, 1997, p. 158)

También influyen las concepciones de la sociedad: las Matemáticas son para personas inteligentes, son difíciles, requieren agilidad de cálculo, ideas que los maestros están llamados a corregir mediante su forma de enseñanza y actitud.

Adicionalmente, los profesores entrevistados manifestaron una serie de dificultades presentadas por los estudiantes durante el estudio de la función logarítmica y las Matemáticas en general. Lamentablemente, cuando se originan dificultades en un concepto y no se detecta oportunamente, éste puede convertirse en obstáculo y luego en un error, que más tarde se exterioriza más arraigado. Puede ser por esta razón que los maestros de Secundaria perciben dificultades incluso con las operaciones aritméticas.

Conclusiones.

Tomando como primer eje la Historia de las Matemáticas, puede decirse que ella permite identificar los motivos y procesos desarrolladores de la función logarítmica, justificar el sentido y la importancia de la enseñanza. La consulta de documentos concernientes al desarrollo histórico-epistemológico de las Matemáticas, y sobre la intervención de la Historia en la enseñanza, es vital para presentar la función logarítmica resaltando sus procesos originarios que dan cuenta de su naturaleza.

La investigación visibilizó que la Historia de las Matemáticas es concebida como el retroceso en el tiempo, y las situaciones que dieron nacimiento a los conceptos matemáticos (quién, cómo cuándo, en dónde, por qué). Igualmente, como herramienta pedagógica, motivadora, cultural, y de formación de valores humanos. Los métodos de su utilización en clase deben dotarse de significado matemático, pedagógico y cultural para el estudiante. Las anécdotas, reseñas, y retratos de los matemáticos deben visibilizar un sentido epistemológico y de potencialización del pensamiento. Aunque el profesorado reconoce la importancia de involucrar la Historia en el aula y a muchos les agrada leerla, no se utiliza permanente ni con métodos innovadores.

Otro aspecto importante, es que no precisamente se requiere de la extensión de la jornada escolar para involucrar la Historia de las Matemáticas en clase. La propuesta sugerida en esta investigación, permite involucrarla de manera alternativa en el transcurso de su enseñanza. Todo parte de la imaginación, estudio previo y disposición del maestro.

En el eje conceptual, los maestros desconocen la razón de la naturaleza de la función logarítmica: la relación entre progresiones geométrica y aritmética. Los logaritmos se estiman como un concepto dependiente de la potenciación, en su aspecto operacional. La propuesta sugerida resalta la operatividad individual de ellos, y de hecho se resalta el orden del desarrollo de los logaritmos con respecto a la potenciación, pues a partir de la logaritmación se establecieron las potencias, y solo Euler hizo una conexión entre ambas.

Pasando al eje sobre enseñanza de la función, puede decirse que la apropiación didáctica de la Historia de las Matemáticas es muy variada. En este caso, se resaltó la relación entre progresiones, los aspectos sobre pensamiento variacional y analítico, pues estos dieron vida a la función logarítmica. Además, la caracterización de esta función en sus tres facetas, permite tener una visión integral de todas sus representaciones, y una amplia comprensión de su comportamiento en cada una.

La función logarítmica posee una naturaleza particular que amerita ser enseñada detalladamente, no solo por su complejidad sino por su riqueza epistemológica. En el pensamiento variacional y analítico debe tenerse especial cuidado por la incidencia de tres cantidades variables: el argumento (variable independiente), el logaritmo (variable dependiente) y la base (parámetro).

Otra conclusión sobre lo hallado, es que los docentes reconocen la importancia de las ecuaciones logarítmicas para el pensamiento lógico y deductivo de los estudiantes, pero se abstienen de enseñarla detalladamente al percibir su inaplicabilidad en la vida cotidiana. Si bien, para los docentes es muy relevante relacionar las Matemáticas con la realidad para dotarlas de sentido ante los estudiantes, es significativo visibilizar los procesos algebraicos de complejidad que precisamente la distingue de otras ciencias.

En el eje de condiciones institucionales, la enseñanza de la función logarítmica es muy limitada a la intensidad horaria de la asignatura. Usualmente, se presenta superficialmente o se omite, al concebir su poca trascendencia en la vida práctica. En cuanto a la dotación en material didáctico, estructura física, formación pedagógica de maestros, y falta de trabajo colectivo, son aspectos descuidados en varias instituciones privadas, y abandonados en las públicas. Finalmente, en la indagación sobre el currículo, las dificultades de los estudiantes, y las condiciones institucionales, evidencia una ruptura en todo el Sistema de Educación Nacional, un rompimiento del proceso en el currículo de Educación Primaria, Secundaria, Media y Superior.

Bibliografía.

ABRATE, Raquel Susana& POCHULU, Marcel David. 2007. Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de las Matemáticas y las aplicaciones actuales. En:*Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemáticas*, Cap. VI. 111 – 135. Villa María, Universidad Nacional de Villa María.

BARBÍN, Evelyne& BÉNARD, Dominique. 2007. *Histoire etenseignement des mathématiques: rigueurs, erreurs, raisonnements*.Lyon,Editorial InstitutNational de RecherchePédagogique INRP.

BELL, Eric Temple. 2000 (2ª Ed.). *Historia de las Matemáticas*. México D.F., Fondo de Cultura Económica.

BONILLA, Elssy& RODRIGUEZ,Penélope. 2008(3ra Ed.). *Más allá del dilema de los métodos: la investigación en Ciencias Sociales.* Santa Fe de Bogotá, Grupo Editorial Norma.
BOYER, CarlBenjamin. 2001. *Historia de la Matemática*.Madrid, Alianza Editorial S.A.
CAVIEDES, Gilbet, FAYAD, Javier, LARA, Walter, LOPEZ, Henry, & MANZANO, Harold. 2005. *El Maestro en la ciudad.* Santiago de Cali, Universidad del Valle.
CENTENO, Gustavo y Hollman, JIMENES, Nelson, GONZALEZ, Fernando, & ROBAYO, Marco. 1997. *Nueva Matemática Constructiva 9*. Santa Fe de Bogotá, Libros & Libros.
EDWARDS, CharlesHenry. 1979. *The Historial Development of the Calculus*. New York Inc, Springer – Verlag.
EVEN, Ruhama. 1990. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. In: *Educationalstudies in Matematics*, Vol. 21. N°6. 521 – 544.
FERRARI, Marcela& FARFÁN, RosaMaría. 2008. Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. En:*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*,Vo1.11. N°3. 309 – 354.
GONZALES, María Teresa& VARGAS, Jeannette. 2007. Segmentos de la Historia: La función logarítmica. En: *Matemáticas: Enseñanza universitaria*, Vol.15. N° 2. 129 - 144.
HAIRER, Ernst & WANNER, Gerhard. 2008.*Analysis by its History*.New York, Springer.
LEIVAS, José Carlos& CARNEIRO, MariaTereza. 2010. A função logarítmica obtida por simetriada função exponencial: explorando visualização. En:*Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Nº. 23.93 - 106.
Ministerio deEducación Nacional. 2006. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.*Santa Fe de Bogotá, Colombia.
PANAGIOTOU, Evangelos N. 2010. Using history to teach Mathematics: The case of Logarithms.In: *Sciencie& Education*, Vo1. 20. N° 1. 1 – 35.
PONTE, Joao Pedro. 1992. The History of the concept of function and some educational implications.In: *Mathematics Educator*, Vo1.3. N° 2. 1 - 9.
SIERPINSKA, Anna. 1992. On understanding the notion of function, In: E. Dubinsky & G. Harel (Eds.):*The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*.Washington DC, Mathematical Association of America. Vol. 25. 25-58. Traducción al castellano (inédita) de Cesar Delgado.
SOCAS, Martin Manuel.1997. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En:*La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Cap. V. 125 - 154. Barcelona, Editorial Horsori.
TAPIA, Francisco Javier.2003. Historia de los logaritmos. En: *Apuntes de la Historia de las Matemáticas*, Vo1. 2. N° 2. 5 - 22.

Natalia Escobar Villota
Área de Educación Matemática –IEP – Univalle-Cali-Colombia.

E-mail:nataesvi3487@hotmail.com