Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 24, nº49 - pp. 50–65
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

CARDANO SOBRE A REGRA DOS SINAIS NA *ALIZA*

John A. Fossa
Depto. de Matemática (aposentado) – UFRN – Brasil

(aceito para publicação em novembro de 2023)

Resumo

Apresenta-se no presente trabalho uma análise minuciosa do Capítulo XXII do tratado *De regula aliza libellus* de Girolamo Cardano, onde consta a sua reformulação e putativa demonstração da regra dos sinais. Mostra-se que, embora seu resultado é pontualmente interessante, é globalmente inconsistente, sendo a raiz da invalidez do argumento centrada na atribuição de valores negativos a comprimentos e áreas. Mostra-se também como o seu argumento depende de dois princípios gerais extra-matemáticos.

Palavras-chave: História da Álgebra, Resolução de equações, Girolamo Cardano, Regra dos sinais.

[CARDANO ON THE SIGN RULE IN THE *ALIZA*]

Abstract

Herein a thorough analysis of Chapter XXII of Girolamo Cardano's *De regula aliza libellus* is presented. This chapter contains Cardano's reformulation and putative demonstration of his alternative to the Sign Rule. It is shown that, although his results are locally interesting, they are nevertheless globally inconsistent and that the root of the argument's invalidity is centered on his attribution of negative values to lengths and areas. It is also shown how his argument depends on two extra-mathematical principles.

Keywords: History of Algebra, Equation solving, Girolamo Cardano, Rule of Signs.

Em apresentações informais, a regra dos sinais, incluindo “menos vezes menos dá mais”, é geralmente estipulada (para garantir a distribuitividade da multiplicação). Em apresentações mais formais, ao invés, a referida regra pode ser deduzida dos axiomas de anéis, onde, claramente, o elemento $-a$ é a inversa aditiva do elemento a. Embora saiba-se que Girolamo Cardano (1501–1576) havia “experimentado” com uma alternativa à referida regra nas suas tentativas de resolver equações do terceiro grau, poderá nos surpreender descobrir que ele até propôs uma *demonstração* para a regra alternativa “menos vezes menos dá menos”. Acontece no Capítulo XXII do seu tratado cujo título quilométrico é geralmente abreviado para *De regula aliza libellus* (*Sobre a regra aliza em um livrinho*), publicado em 1570. Usamos a versão incluída na sua *Opera omnia* Cardano (1663b). Como é de praxe, abreviaremos a abreviação do título do mencionado tratado por *Aliza*.

Uma pequena apresentação de Cardano

Para os leitores do presente *Revista*, provavelmente não seja necessária uma apresentação maior de Cardano e da sua época. Assim, faremos apenas algumas observações.[1]

Cardano nasceu bastardo numa sociedade que foi seletivamente preconceituosa e, de fato, apesar da sua genialidade, o fato foi usado para o barrar de várias posições que ele cobiçava. A sua predileção para fazer inimizades, a dificuldade de convivência com ele e a inveja das suas habilidades, no entanto, foram provavelmente as verdadeiras razões para as suas desventuras. Apesar dos entraves encontrados, porém, conseguiu se destacar tanto na medicina, efetuando várias curas de personagens importantes, quanto na matemática, através do seu livro Practica arithmetice, um guia compreensivo de procedimentos aritméticos. Esse livro foi bem aceito, o que o ajudou a vencer certas barreiras.

Talvez Cardano seja mais conhecido pela obra *Ars magna*[2] (1545), o majestoso tratado que finalmente havia dado uma resolução a equações do terceiro grau, um dos principais focos de pesquisa em álgebra da época. Para obter a solução completa, porém, ele precisava de utilizar um método que havia apreendido de Niccolò Fontana (1500–1557), o “Tartaglia”, sob juramento de sigilo. Assim, Cardano foi vilificado tanto por Tartaglia, quanto por vários historiadores da matemática, por quebrar o seu juramento. Os seus contemporâneos, porém, deram razão ao Cardano porque o método foi de fato originário de Scipione del Ferro (1465–1526), ao quem Cardano deu o crédito, ainda esclarecendo que ele obteve o mesmo através dos bons ofícios de Tartaglia.

Observamos ainda que Cardano era um verdadeiro polímata, pois também fez contribuições importantes à física, à filosofia, à teologia e à música. Além disso, se interessava nas ciências ocultas de astrologia e magia e usou os seus conhecimentos da probabilidade para sobressair bem nos jogos de azar. Perto ao fim da sua vida, foi acusado de heresia e preso pela Inquisição. Mais uma vez, a razão ostensiva da sua tribulação escondia o verdadeiro motivo da sua prisão: ele havia se atrevido a fazer um horóscopo para Jesus Cristo, o que foi visto pela Igreja como um sacrilégio. Só foi mantido preso alguns meses,

[1] Para mais detalhes sobre Cardano, o leitor poderá consultar Fossa (2008b) e, sobre a sua época, Fossa (2008a). Observamos ainda que o mesmo volume contém capítulos sobre os logaritmos e sobre a trigonometria do século XVI.

[2] Isto é, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*.

mas deve ter feito algum acordo com a Inquisição de limitar a natureza das suas investigações, pois (pelo menos aparentemente) passou o resto da sua vida só praticando a medicina enquanto desfruía de uma pensão concedido pelo Papa Gregório XIII (Ugo Boncompagni, 1502–1585).

A *Aliza*

Lembramos que Cardano, no Capítulo XII da *Ars magna*, havia resolvido equações da forma "*De Cubo aequali rebus & numero*", ou seja, as da forma $x^3 = ax + b$, pelo método que ele aprendeu de Tartaglia:

> "*Regula igitur eſt, cum cubus tertiæ partis numeri rerum; maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, auferes ipſum ex eodem, & reſidui radicem adde dimidio numeri æquationis, atque iterum minue ab eodem dimidio, habebiſque vt dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum R. cubicæ iunctæ rem ipſam conſtituunt*" (CARDANO, 1663a, p, 251.).[3]

Em termos algébricos modernos, temos:

$$(\tfrac{b}{2})^2 \geq \left(\frac{a}{3}\right)^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{(\tfrac{b}{2})^2 - (\tfrac{a}{3})^3}}.$$

A condição é dada para evitar o surgimento de raízes quadradas de números negativos — os nossos números imaginários. Desta forma, Cardano tem de enfrentar um dilema: ou seu método não resolve todos os casos da equação $x^3 = ax + b$, ou ele precisa legitimizar os negativos e suas raízes. Visto que, na edição de 1663 da *Ars magna,* Cardano nos remete para a *Aliza* quando a condição não estiver satisfeita, podemos concluir que o referido tratado contém a solução do dilema. Claramente, não a contém se por "solução" entendemos a resolução desse tipo de equação sem o uso de números imaginários. Mas, a *Aliza* aborda sim equações do terceiro grau em geral, embora a sua organização é bastante caótica e a sua exposição obscura. Confalonieri (2013) tenta faz sentido do texto por identificar certos "*threads*" espalhados de forma aparentemente arbitrária no texto.[4]

Para nossos propósitos, talvez seja mais interessante determinar o significado da palavra *aliza*. Não é uma palavra comum, nem consta nos dicionários consultados. O Cardano não faz esclarecimento algum dela e, ainda pior, aparentemente, não há nenhuma passagem

---

[3] "Assim a regra è: sendo a terceira parte do cubo da quantidade das coisas não maior que o quadrado de metade do número da equação, retire aquele deste e soma a raiz da diferença à metade do número da equação. Então subtrai a mesma da mesma metade. Terás, como se diz, um *binomium* e *apotomen*, cujas raízes cúbicas, sendo juntadas, constituem a coisa." Observe: "coisa" significa x; "quantidade das coisas" significa o coeficiente de x; "número da equação" significa o termo independente; *binomium* e *apotomen* são linhas irracionais compostos, sendo a primeira a soma de duas partes e a segunda a diferença de duas partes (ver *Os Elementos* de Euclides, X36 e X73).

[4] Para um resumo dos resultados dela, pode-se consultar Confalonieri [s.d.].

na *Aliza* que identifica qualquer regra como sendo a/uma “regra aliza”. Confalonieri (2013) relata que há um certo consenso de que a palavra remonta, por via tortuosa, à palavra grega ἀλυθεῖα e, portanto, significa algo como “irresolúvel”. A sugestão foi dada por Cossali (1799, v. 2, p. 441), que apenas diz, em passagem, “*De Regula Aliza*, cioè *De Regula Irresolubili*”, sem maiores explicações. Ela cita uma comunicação particular de Paolo D’Alessandro[5] que confirma a etimologia.

A tradução, porém, mesmo se for correta, não parece muito útil, pois o que significaria uma “regra irresolúvel”? Talvez seria interessante umas lucubrações mais poéticas. Observamos que *aliza* é parecida com *alis*, uma forma mais velho de *alius*, “outro”, “diferente”. Ainda mais, em Capítulo XXII da *Aliza*, Cardano usa as palavras *minus* (“número negativo”) e *alienum* (“alheio”) como sinônimos. Ora, *alienus*, segundo Vaan (2008) se deriva de *alius*, outrora *alis*, e significa “belonging to others”. Assim, os números negativos são alheios aos números própriamente ditos que consistem, para Cardano, nos inteiros não negativos e o que pode ser obtido deles pelas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radicação, com as restrições apropriadas no uso de zero e a condição de que subtraímos sempre o menor do maior (ou igual).[6] Assim, “regra *aliza*” provavelmente se refere à(s) regra(s) usada(s) para resolver equações que são irresolúveis no conjunto de números propriamente ditos.

Podemos especular ainda sobre como Cardano iria conceber o estranho mundo alheio de *aliza* em termos metafóricos, pois essas considerações, embora não sejam parte integral da matemática, informam as intuições informais que o matemático utiliza nas suas investigações. De fato, na regra dos sinais “correta” — isto é, a que é consistente com os axiomas de anéis —, há, conforme Fossa (2003a), uma analogia estrita entre a função menos na aritmética e a partícula de negação em lógica: ambos representam uma mudança de estado num contexto bivalente. A nova proposta de Cardano, esquematizada na caixa ao lado, em contraste, é estruturalmente semelhante ao que chamaríamos, hoje em dia, de “tabu”, pois se uma pessoa vem em contato com um tabu, ela mesma vira tabu e passa a participar no estranho mundo — alheio ao mundo normal — que o tabu representa.[7] O mesmo acontece com o sinal menos na regra alternativa de Cardano, pois, sempre que multiplicamos por um número negativa, o resultado passa a participar no estranho mundo alheio de *aliza*. Lembramos ainda que Cardano, como já observamos na seção anterior, foi um estudioso da magia e, portanto, embora provavelmente não conhecesse o conceito de tabu como uma instituição social, estava completamente familiarizado com as regras do oculto em que o tabu se situa.[8]

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} + & \times & + & = & + \\ + & \times & - & = & - \\ - & \times & + & = & - \\ - & \times & - & = & - \end{array}}$$

Ainda há outra razão para prosseguir os estudos que levaria para a *Aliza*. Considere, por exemplo, a equação $x^3 = 15x + 4$. A fórmula de Cardano dá:

[5] Professor de Filologia Clássica do Depto. de Estudos Humanísticas da Università di Roma Tre.

[6] Ainda tem restrições, especialmente em contextos geométricos, de não operar com números de espécies diferentes, como “linhas” e “planos”.

[7] Para mais detalhes veja Fossa (2003b) p. 36-38.

[8] Cardano também era médico e, portanto, outra metáfora natural para ele seria a de doença contagiosa. Neste caso, porém, ele provavelmente teria usado tais palavras como *aeger*, *infirmus* ou *pestilens* (!), em vez de *alienus*.

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - (\frac{15}{3})^3}},$$

o que se simplifica ao

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

aparentemente uma expressão sem sentido, como é de esperar visto que $4 = (\frac{4}{2})^2 < \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 125$. Mesmo assim, a expressão em destaque se reduz à equação *x* = 4, embora isto não seja evidente[9] e, de fato, 4 é uma raiz de $x^3 = 15x + 4$. Assim, Cardano teria procurado uma outra fórmula para esse caso, posteriormente rotulado de *casus irreducibilis*, ou teria procurado quebrar esse caso em subcasos particulares que poderiam ser abordados de forma mais eficaz. Parece que havia tentado todos os dois caminhos em partes diversos da *Aliza* e o seu tratamento da regra dos sinais faz parte dessas tentativas.

Capítulo VI da *Aliza*

O pequeno Capítulo VI da *Aliza* contém uma exposição da regra dos sinais como é geralmente entendida. Aborda, logo na primeira sentença do capítulo, a multiplicação e a divisão:

> "*IN multiplicatione & diuiſione p. fit ſemper ex ſimilibus m. ex contrariis, ...*" (CARDANO, 1663b, p, 384.).[10]

Em seguida, explica a adição e subtração, destacando a subtração de números negativos com o exemplo de que, ao diminuir –4 de –6, a diferença é –2.

Procedendo, afirma que a raiz quadrada de um número positivo é positivo, mas a de um número negativo é, segundo o conceito contemporáneo, sem sentido. Cardano, no entanto, remete o leitor para o Capítulo XXII. Ainda menciona que raízes cubicas não são problemáticas.

Finalmente, mostra como dividir $8 + 2 + \sqrt{6}$ por $\sqrt{6} + 2$. Provavelmente porque supõe certo nível de sofisticação algébrica da parte do leitor, sua exposição é sintética e parcial, se limitando a dividir 8 por $\sqrt{6} + 2$ por um processo equivalente à racionalização do denominador. Faz o processo, no entanto, em duas maneiras, uma tomando o *recisum* (*apotomen*) como $\sqrt{6} - 2$ e uma o tomando como $2 - \sqrt{6}$. Em todos os dois cálculos, obedece à regra usual dos sinais.

[9] Para uma exposição dos métodos usados por Raffaelle Bombelli (1526-1572) para obter esse resultado, ver, por exemplo, Bashmakova & Smirnova (2000).
[10] Em multiplicação e divisão, mais é sempre feito de [sinais] semelhantes, menos de [sinais] opostos.

Observação referente à notação

No que segue, especialmente ao analizar as figuras, a expressão ab significa, geometricamente, o segmento com extemidades a e b, ou, aritmeticamente, a medida (comprimento) do mesmo. A expressão ab^2 significa, geometricamente, o quadrado com lado *ab*, ou, aritmeticamente, sua medida (área), dada por *ab*×*ab*. Geralmente, ab^2 corresponde a alguma frase como "o quadrado sobre *ab*" (geometricamente) ou "*ab* (multiplicado) por si mesmo" (aritmeticamente).

Capítulo XXII da *Aliza*

Primeiro parágrafo. O primeiro parágrafo do Capítulo XXII da *Aliza* inicia com a constatação de que 8 = 6+2 = 10–2 = 8 e, portanto, tanto o quadrado de 6+2, quanto o de 10–2 é igual a 64, conforme as tabuadas aritméticas. Quando consideramos 8 geometricamente como uma linha[11] dividida em duas partes, seja ela 6+2 ou 10–2, no entanto, e procuramos o quadrado sobre a linha, é necessário utilizar Euclides II.4:

> "*Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos*" (EUCLIDES, 2009, p. 137).

Aplicando a referida proposição, ao colocar *ab* = 6 e *bc* = 2 em Figura 1(i.)[12], obtemos $6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2^2 = 64$, que conforme com o resultado aritmético $8^2 = 64$.

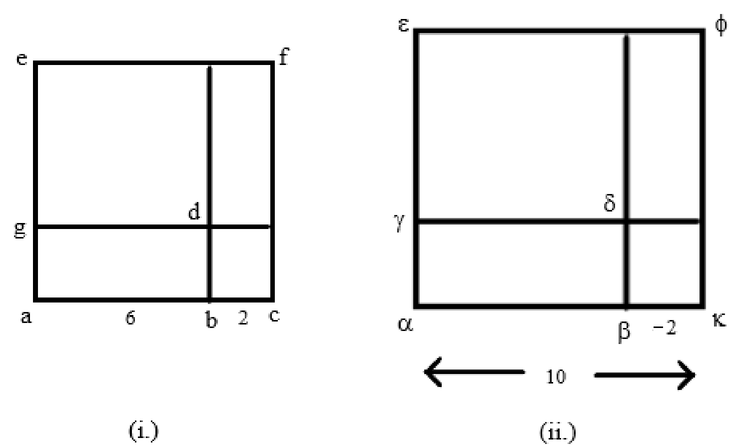

Figura 1.

[11] Cardano usa linguagem euclidiana. Por "linha", entende-se "segmento".
[12] Nessa figura, bem como nas que seguirão, a indicação das medidas dadas não é feita no texto de Cardano; as incluímos para a nossa conveniência.

Agora considere, prossegue Cardano, o caso em que *ac* = 10 e *bc* = –2. Para nossa conveniência, fiz um novo diagrama com letras gregas (Figura 1(ii.)). Assim, temos ακ = 10 e βκ = –2. Nesse caso, segundo Cardano, o quadrado de ακ também será 64, presumivelmente porque os quadrados de 6+2 e 10–2 são iguais. Claramente, porém, mesmo por suas próprias luzes, Cardano está equivocado, pois ao tratar do quadrado da linha dividida 10+(–2) é necessário proceder geometricamente, usando Euclides II.4. (*Sed quod ad modum operandi, quia 8. eſt diuiſum in 6. p. 2. ſeu in 10. m. 2. oportet operari per quartam ſecundi Euclidis.* CARDANO, 1663b. p. 398.) Ao fazer isto, obtemos $10^2 + 2 \cdot 10 \cdot (-2) + (-2)^2$. Avaliando isto pela regra *aliza* dos sinais obtemos 100–40–4 = 56. Avaliando o mesmo pela regra dos sinais usual, obtemos 100–40+4 = 64, o que é, de fato, a área do quadrado (com diagonal) δε, pois, ao subtrair –40, subtraímos o retângulo κγ e o retângulo βφ e, portanto, subtraímos o quadrado κδ duas vezes, um dos quais precisa ser reposto. Assim, o quadrado δε tem a mesma área de todo o quadrado *af*. Claramente, a área de αφ é 100, pois seu lado ακ é 10, o que mostra que o modelo usado por Cardano não é apropriado à situação modelada.

Deve ser claro que o problema com a análise de Cardano é que pôs βκ = –2. Há um conceito de distância direcionada que é muito útil, por exemplo, em certas aplicações do cálculo. Aqui, porém, não se trata de distância direcionada, mas do *comprimento* de um segmento e, portanto, os negativos não são aplicáveis, o que fica evidente pelo seguinte raciocínio: 10 = ακ = αβ+βκ = 8+(–2) = 6, o que é impossível.

Cardano ainda finaliza o parágrafo com uma curiosa aplicação, supondo que αφ é um pedaço de terra e que o quadrado δε pertence a uma pessoa, enquanto o *gnômon*[13] γβφ pertence a uma segunda pessoa, então seus pertences medirão, respectivamente, 64 e 36, o que é obviamente correto. Mas, como é que calculou a área do gnômon? Pela maneira em que o especificou, parece que a área de γβφ = a área de γβ + a área de βφ = γδ×βδ + βκ×κφ = 8×(–2) + (–2)×10 = –36. Assim, ou Cardano tacitamente transformou βκ em 2, em vez de –2, ou ajeitou o resultado, o interpretando como 36 na dada situação física.

Segundo parágrafo. Quando os termos de um binômio são da mesma natureza, como 6+2 ou até $2\sqrt{6} - \sqrt{6}$, o binômio pode obviamente ser reduzido a um monômio, o que geralmente será muito mais eficaz ao fazer cálculos.[14] Ainda acontece que expressões mais complexas se reduzem a um simples número. Temos, por exemplo, que[15]

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = 2.$$

Então, Cardano pergunta, precisamos mesmo de binômios (*binomia* e/ou *recisa*)?

[13] Isto é, a figura de forma L, ao redor de um quadrado que forma, com o quadrado original, um novo quadrado maior.

[14] O segundo não é dado no texto de Cardano, mas seu tipo é implícito, visto que ele afirma que o resultado pode ser ou racional (*rhete*, do Grego ῥητός, "exprimível") ou irracional (*alogum*, do grego ἄλογος, "sem razão").

[15] Ponha, por exemplo, $(\sqrt{a} + b)^3 = \sqrt{108} + 10$. Então, iguale os coeficientes correspondentes e considere o sistema de equações resultante. Assim, o primeiro raiz cúbica é $\sqrt{3} + 1$. Analogamente, a segunda é $\sqrt{3} - 1$. Finalmente, fazendo a subtração indicado, obtemos 2.

Sua resposta é que os precisamos por duas razões. A primeira é quando os dois termos são de naturezas diferentes. Assim, $6+\sqrt{2}$, por exemplo, não pode ser um número, nem a raiz de um número, como foi mostrado por Euclides. Cardano não cita qualquer proposição, mas podemos indicar, para o *binomium*, a proposição X.66:

> "*A comensurável com a binomial em comprimento, tanto é ela uma binomial quanto a mesma na ordem*" (EUCLIDES, 2009, p. 422).

e, para o *recisum*, a proposição X.103:

> "*A comensurável com o apótomo, em comprimento, é um apótomo, e o mesmo, na ordem*" (EUCLIDES, 2009, p. 467).

A segunda razão acontece quando um dos termos é desconhecido. Assim, 10–*x*, que é múltiplo, não pode ser reduzido a uma única natureza (*niſi per fortunam multiplex poteſt reduci ad vnam naturam* - CARDANO, 1663b. p. 399) enquanto *x* permanece desconhecido, nem quando se torna conhecido, dependendo do valor que assume.

É interessante observar que, no nosso (incluindo Cardano) sistema de numeração, os sinais são ambíguos, pois representam números relativos e operações aritméticas. As considerações de Cardano no presente parágrafo, no entanto, deixa claro que ele pensava em *binomia* e *recisa* como exprimindo números, não operações. Isso é consoante com a descrição dada acima do conjunto numérico de Cardano e a sua época.[16]

Terceiro parágrafo. O binômio 10–2 pode ser realizado geometricamente de duas formas distintas, a saber, a linha βκ (–2) pode ser uma extensão da linha αβ (8), caso que foi abordado no primeiro parágrafo do presente capítulo (Figura 1(ii.)), ou a linha *bc* pode ser marcada sobre a linha *ab* (Figura 2)[17], caso que será considerado agora, de novo utilizando Euclides II.4. Assim, temos *ac* = 10 e *bc* = –2. Isto faz com que *ab* = 8 e o quadrado *ae* = 100. Mas, o quadrado *df* = 64 e, em consequência, o que resta, o gnômon, = 36. O gnômon, porém, é composto dos dois retângulos *ad* e *de*, junto com o quadrado *bd*, ou seja, o gnômon = 2(*ac*×*bc*) mais o quadrado sobre *bc*. No entanto, alega Cardano, os dois retângulos são negativos e são 32 (*a d & d e ſunt m. & ſunt* 32 - CARDANO, 1663b. p. 399). Mas, continua, visto que o gnômon é –36, o quadrado *bd* é –4, presumivelmente porque –32–4 = –36. [Ele não pode argumentar que –36–(–32) = –4, porque isto seria um *petitio principii*.] Em qualquer caso, ele adjunta um argumento *reductio*, supondo que o quadrado *bd* é +4, o que faria o gnômon = – 28 (pois os dois retângulos = –32); logo, o quadrado *df* = o quadrado *ae* – o gnômon = 100–28 = 72 e, em consequência, *ac* não seria 8, mas $\sqrt{72}$.

[16] Ver acima o parágrafo contendo a nota 5.

[17] A Figura 2 é a mesma que Figura 1(ii.) com as letras gregas substituídas por letras romanas e com *b* e *c* cambiadas, bem como *e* e *f* cambiadas, para refletir o caso indicado no texto. Visto que não estaremos agora comparando os quadrados *af* e αφ, voltamos a usar a notação de Cardano.

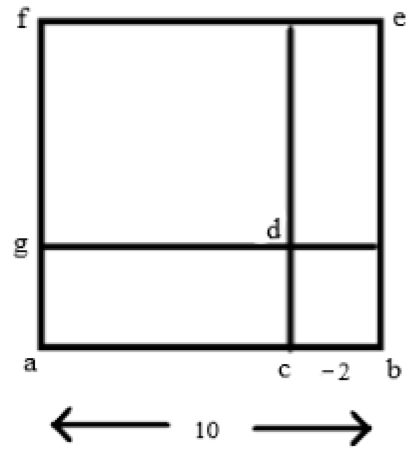

Figura 2.

Uma leitura menos cuidadosa poderá dá a impressão que o argumento de Cardano é grosseiramente inconsistente[18], pois, por exemplo, num lugar ele afirma que o gnômon é 36 e, noutro, que é –36. Precisamos, no entanto, ter o cuidado de não importar as nossas convenções modernas ao texto histórico, pois no primeiro lugar, onde disse que o gnômon = 36, não falou que ele = +36. De fato, dado o já mencionado papel duplo do sinal, é possível que, ao calcular (a área de) o quadrado *df*, (a área de) o gnômon poderá ser ambiguamente 36, mas se torna –36 na equação. Em qualquer caso, parece que o sinal de menos na expressão "o quadrado *ae* – o gnômon" representa a operação de subtração, pois, geometricamente, o gnômon está sendo retirado do quadrado maior (*ae*). Assim, podemos escrever a referida expressão como "o quadrado *ae* – (o gnômon)", que, por sua vez, não define a natureza do gnômon. Desta forma, é necessário investigar a composição do mesmo. Conforme, Euclides II.4, então, o gnômon = 2(ac×bc)+(bc×bc) = 2(8×(–2))+(–2)×(–2). Mas, visto que temos + × – = –, tanto segundo a regra usual dos sinais, quanto segundo a regra alternativa de Cardano, obtemos que o gnômon = –32+(–2)×(–2). Ora, se – × – = +, então o gnômon = –32+4 = –28, exatamente como Cardano afirmava no seu argumento *reductio*! Não obstante, o argumento só parece convincente porque contém uma premissa que não é reconhecida como falsa.[19] A falsidade é, como no primeiro caso, que um comprimento pode ser negativo. É, de fato, falsa em que não é consistente com os princípios aritméticos usadas para modelar a situação, como é mostrado pelo raciocínio, análogo ao citado no primeiro caso, de que 10 = *ab* = *ac*+*bc* = 8–2 = 6.

Em seguida, Cardano faz um exemplo com um retângulo *ae* (Figura 3)[20]. Estipula que *ab* = 10, *bc* = –2, *af* = 4 e *ag* = –1. Assim, *ac* = 8 e *fg* = 3. Isto, claro, acarreta que 4 = *af*

---

[18] Não deixa de ser inconsistente, como veremos, mas a inconsistência é mais subtil.

[19] De fato, o argumento de Cardano é um exemplo interessante do princípio lógico de que uma proposição falsa implica em qualquer coisa: P ⟶ (∼P ⟶ Q).

[20] No texto original, falta a sinalização do ponto g.

= *ag*+*fg* = –1+4 = 3, ao que Cardano não está atenta. Desta forma[21], o gnômon = *ae*–*df* = 40–24 = 16, que (visto que é um gnômon) deve ser negativo (–16). De fato, segundo Cardano, o gnômon *gce* = *ac*×*cd* + *bc*×*fg* + *bc*×*cd* = 8×(–1) + (–2)×3 + (–2)×(–1) = –8 –6 –2 = –16, o que comprova a regra – × – = –. O erro, como deve ser evidente, é o mesmo que nos casos anteriores.

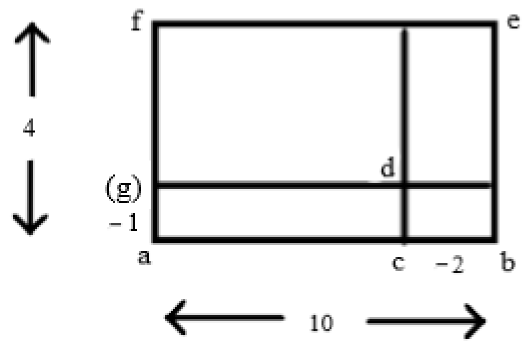

Figura 3.

O restante do parágrafo é dedicado a mostrar a causa para que parece que menos vezes menos seja mais (*docebo caufam huius, quare in operatione m. in m. videatur producere p.* - CARDANO, 1663b. p. 399). A explicação, no entanto, é bastante enrolada, visto que é composta de uma mistura confusa de três exemplos diferentes, introduz a variável *x* para *bc* (que não tem, de fato, um propósito explicativo maior, pois é atribuído a ele um valor) e contém vários erros de redação, até no exemplo numérico. Não emendaremos cada um desses erros, mas um deles será importante para a nossa análise e, portanto, observamos que onde tem, no texto, *bc* 9., deve se entender *bc* p., ou seja, *bc* positivo. Remete-nos, então, à figura (nossa Figura 2) e observa que

$$ab^2 + bc^2 = ac^2 + 2(ab \cdot bc),$$

o que é geometricamente correto, como podemos ver da Figura 4, pois a parte quadrada maior juntada com o retângulo maior na base da figura e ainda juntada com o retângulo maior ao direito da figura produz o todo juntado com o quadrado pequeno.

[21] Lendo *gnomo gce eft* para *gnomo gc eft* e *fuperficies de* para *fuperficies deb*.

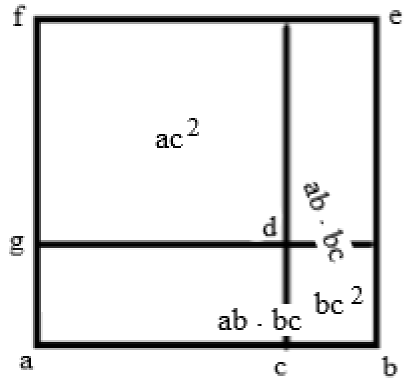

Figura 4.

Assim, ao subtrair $2(ab \cdot bc)$ dos dois lados, obtemos

$$ab^2 + bc^2 - 2(ab \cdot bc) = ac^2,$$

o que é justamente o todo – o gnômon = a parte quadrada maior, visto que $-2(ab \cdot bc) = -2(ac \cdot bc) - 2bc^2$. Isto é, como Cardano observa, ao formar $2(ab \cdot bc)$, o quadrado bc^2 é incluído duas vezes. A sua observação é inteiramente correta, mas sua conclusão — que menos vezes menos parece ser mais — é claramente um *non sequitur*, porque a última equação em destaque nem sequer aparece quando formulamos a equação

$$ab^2 - \Gamma = ac^2,$$

onde Γ é o gnômon.

A última equação merece mais atenção. O sinal – nela contida claramente representa a operação de subtração, pois estamos retirando a área Γ do quadrado ab^2. Mas, Cardano afirma que o gnômon é um número negativo (*cum ſolus gnomo verè ſit m.* - CARDANO, 1663b. p. 399) e, usando a notação do valor absoluto, obtemos a equação equivalente $ab^2 - (-|\Gamma|) = ac^2$. Isto, de fato, não é problemático para Cardano, pois, usando a sua regra alternativa dos sinais $-(-|\Gamma|) = -|\Gamma|$. Ao juntar o quadrado maior com o gnômon para formar o todo, porém, obteríamos, usando, por exemplo, as medidas dadas em Figura 2, $100 = ab^2 = ac^2 + (-|\Gamma|) = 64 - 36 = 28$, o que é impossível. Vemos, portanto, mais uma vez, que o procedimento de Cardano funciona para um aspecto da situação, mas contradiz outro aspecto.

Quarto parágrafo. Agora Cardano propõe mostrar porque é que, sempre que um fator é menos (isto é, um número negativo), o produto é menos. Observa primeiro que, como nós diríamos, mais (os números positivos) é fechado sob multiplicação. Assim, o menos não pode ser produzido pela multiplicação de fatores positivos. Isto quer dizer que o menos é alheio (*alienum*).

Cardano adota dois princípios. O primeiro é o de que, enquanto muitas coisas sejam necessárias para construir, basta uma para destruir (*ad conſtruendum oportet aſſumere plura, ad deſtruendum ſufficit vnum* - CARDANO, 1663b. p. 400). Assim, basta um menos para destruir o mais. Isto poderá ser uma analogia, já comentada acima, com a negação em lógica[22], embora seria somente uma analogia parcial com a regra de Cardano, visto que uma dupla negação faz uma afirmação, embora, podemos observar, na literatura latina uma dupla negação é às vezes considerada uma negação reforçada.

O segundo princípio é o de que nada pode exceder seu próprio poder (*a nihil potest vltra vires ſua* - CARDANO, 1663b. p. 400). Isto supostamente justifica o fechamento de o mais sob multiplicação e ainda elucidaria porque o menos (o alheio) também seria fechado sob multiplicação, embora Cardano não diz isso explicitamente, mas o deixa implícito. Talvez haja aqui um tênue eco do argumento de que a criação do mundo exige um ser mais poderoso do que as próprias criaturas.

Os dois princípios, porém, só seriam descritivos — e, portanto, argumentativamente, um *petitio principii* —, a não ser que fossem princípios universais, ou, pelo menos, houvesse razão para acreditar que são aplicáveis à aritmética. Tomados juntos e conjuntamente com o nome "alheio" para os números negativos, no entanto, parecem informados por o que nós chamaríamos de "tabu". Isto é, o alheio (o menos) é um poder "sacro"[23] que contamina o mais quando entra em contato com ele pela multiplicação. Desta forma, o "experimento" de Cardano com uma regra alternativa para os sinais poderia ter sido informado por suas crenças sobre o oculto (imersas, decerto, numa teologia cristã ou quase-cristã).

De qualquer forma, avisa que a partir da regra dos sinais para a multiplicação, podemos deduzir o comportamento dos sinais sob divisão e a extração de raízes.

Quinto parágrafo. O último parágrafo do capítulo especifica o comportamento dos sinais sob divisão. Poderíamos esperar, visto que a divisão é igual a multiplicação pelo recíproco, que a única divisão resultando em mais é mais dividido por mais, todos os outros casos dando menos. No entanto, Cardano elabora outro raciocínio, procurando saber qual sinal do quociente daria o sinal do dividendo quando multiplicado pelo divisor. Podemos resumir seu pensamento da seguinte forma:

1. $\frac{+}{+} = ? \Rightarrow ? = +$ porque $+ \times + = +$
2. $\frac{-}{+} = ? \Rightarrow ? = -$ porque $- \times + = -$
3. $\frac{-}{-} = ? \Rightarrow ? = \mp$ porque $- \times - = -$
   e porque $+ \times - = -$
4. $\frac{+}{-} = ? \Rightarrow ?$ não existe porque $\pm \times - \neq +$.

[22] Compare os nomes das regras lógicas *modus ponens* (método de construção) e *modus tollens* (método de destruição).

[23] Num sentido mágico, não religioso.

O primeiro caso não é dado no texto, mas é inteiramente óbvio. Casos 3 (menos dividido por menos dá ou menos ou mais) e 4 (mais dividido por menos não existe) são inesperados. O pior, porém, é que esse resultado, mais uma vez, causa problemas em outras situações. Os números negativos, por exemplo, não teriam recíprocos e a equação $2x+6 = 0$ não teria solução, nem entre os negativos.[24]

A raiz quadrada de números negativos e equações cúbicas

Cardano afirma que são facilmente deduzidas as consequências da sua nova regra dos sinais para a extração de raízes, embora não os específica. Usando a notação do valor absoluto, observamos que só tem dois casos em que um número pode ser multiplicado por si mesmo:

$$1.\ +|y| \times +|y| = +|x| \ \Rightarrow\ \sqrt{+|x|} = +|y|$$
$$2.\ -|y| \times -|y| = -|x| \ \Rightarrow\ \sqrt{-|x|} = -|y|.$$

Desta forma, os números imaginários — alheios num sentido mais radical até dos próprios negativos — são convenientemente erradicados.

Lembramos que o propósito da inovação de Cardano referente à regra dos sinais era para salvar a sua fórmula para a raiz da equação $x^3 = ax + b$. Assim, voltemos a equação $x^3 = 15x + 4$, para a qual vimos que a fórmula de Cardano dá

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

que, por sua vez, reduz a $x = 4$. Poderemos agora, porém, avaliar o resultado usando a regra dos sinais para a extração de raízes. Obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2-\sqrt{121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{121}} \\ &= 2\sqrt[3]{2-11} \\ &= 2\sqrt[3]{-9} \\ &= -2\sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

[24] Pelo menos não poderíamos calcular a sua solução, embora pudéssemos a encontrar por inspecção (tentativa e erro).

Colocando esse valor na equação, obtemos

$$\begin{aligned} -72 = (-2\sqrt[3]{9})^3 &= 15\left(-2\sqrt[3]{9}\right) + 4 \\ &= -30\sqrt[3]{9} + 4 \\ &> -59, \end{aligned}$$

o que é impossível. Assim, $-2\sqrt[3]{9}$ não é uma raiz da equação $x^3 = 15x + 4$, e a nova regra dos sinais de Cardano não salva a sua fórmula para a raiz da equação $x^3 = ax + b$.

Conclusão

Ao que tudo indica — pois lembramos da redação confusa da *Aliza* —, Cardano elaborou uma regra alternativa dos sinais para salvar a sua fórmula para a raiz da equação "cubo igual a coisa mais número". Como acabamos de ver, a regra proposta não realiza o *desideratum*. Mesmo assim, ele propõe uma demonstração da referida regra — ou, pelo menos, alega razões para quais devemos aceitá-la. Os raciocínios por ele desenvolvidos às vezes dão resultados pontualmente corretos, mas sempre acarretam resultados errôneos quando aplicados em outros contextos matemáticos. Isto tinha de acontecer, uma vez que a regra usual dos sinais é uma consequência dos axiomas de um anel (o que era, é claro, desconhecido por Cardano). Observamos ainda que seus raciocínios sobre esse assunto foram invalidados pela suposição de que um comprimento (ou área) pode ser negativo.

Cardano tem sido retratado como experimentado com a regra dos sinais e como reconhecendo o aspecto convencional na matemática. Assim, Confalonieri (2013, p. 339), por exemplo, afirma:

> "*Summing up, we have good reasons to believe that Cardano has seriously been questioning about the square roots of negative numbers, and in particular about their sign. Cardano tries out various possibilities.*"

enquanto Pycior (1997, p. 24–25) alega que:

> "De aliza *revealed a Cardano who was so troubled by the imaginary numbers that he considered abandoning the traditional rule of signs to resolve the problem and, in doing so, he implicitly recognized the conventional element of mathematics*."

No contexto do Capítulo XXII da *Aliza*, porém, tais avaliações não parecem muito acertadas. Dizer que Cardano "experimentou" com a regra dos sinais é uma *façon de parler*, pois, embora ele empreenda uma investigação sobre uma regra alternativa, ele nunca diz algo como "vamos ver o que vai acontecer se ...". Muito pelo contrário, ele repete taxativamente, várias vezes, que a regra usual é errada e que a sua alternativa é, de fato, correta. E, longe de ser um aspecto convencional, Cardano propõe demonstrar indubitavelmente a sua validade. Ao fazêlo, até lança mão ao que aparentemente considera dois princípios universais de ordem metafísica, possivelmente oriundos dos seus estudos do oculto.

No contexto maior da *Aliza* como um todo, e até conjuntamente com a *Ars Magna*, parece claro que Cardano estava aceitando (às vezes a contragosto) ampliar o conjunto numérico para incluir os números negativos, os "alheios" aos números usuais da época. Ainda mais, não fez isso de forma meramente implícita, mas explicitamente atribuiu valores negativos, como vimos, a comprimentos e áreas. Também parece muito claro, no entanto, que ele não conseguiu compreender como operar com esses novos números. Mesmo assim, preparou o terreno para os próximos passos, a exemplo da codificação das suas investigações por Bombelli.[25]

Referências

BASHMAKOVA, Isabella, & SMIRNOVA, Galina. *The Beginnings and Evolution of Algebra*. Trad. de Abe Shenitzer. Washington, D.C.: MAA, 2000.

CANFALONIERI, Sara. [s.d.]. Cardano e le equazioni di terzo grado. Disponível em: https://matematica.unibocconi.eu/articoli/cardano-e-le-equazioni-di-terzo-grado.

CANFALONIERI, Sara. 2013. *The telling of the unattainable attempt to avoid the* casus irreducibilis *for cubic equations: Cardano's* De Regula Aliza. *With a compared transcription of the 1570 and 1663 editions and a partial English translation*.

CARDANO, Girolamo. *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*. 1663a. In: *Hieronymi Cardani mediolanensis Opera omnia in decem tomos digesta*. Ed. Charles Spon. Lyon: Ioannis Antonii Huguetan and Marci Antonii Ravaud. Disponível em: https://cardano.unimi.it/wp-content/uploads/opera_omnia/.

CARDANO, Girolamo. *De regula aliza libellus*. 1663b. *Hieronymi Cardani mediolanensis Opera omnia in decem tomos digesta*. Ed. Charles Spon. Lyon: Ioannis Antonii Huguetan and Marci Antonii Ravaud. Disponível em: https://cardano.unimi.it/wp-content/uploads/opera_omnia/.

COSSALI, Pietro. *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita*. Parma: Reale Tipografia, 1799. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_cu1eknYNEPIC/page/n3/mode/2up.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Trad. de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FOSSA, John A. Some Considerations Concerning the Teaching of Negative Numbers. *REMATEC*. Vol. 18, n. 43 (Fluxo Contínuo), p. 1–16, 2023a.

[25] Agradeço a um revisor da RBHM pelas valiosas sugestões.

FOSSA, John A. *The Frenzied Goat-Song and the Steadfast Oak*. Natal: AN CRANN GO MAITH PUBLICATIONS, 2023b. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/371864479_The_Frenzied_Goat-Song_and_The_Steadfast_Oak.

FOSSA, John A. 2008a. O século de Andrea Palladio. In: Iran Abreu Mendes (Org.). *A matemática no século de Andrea Palladio*. Natal: Editora da UFRN.

FOSSA, John A. 2008a. A álgebra de Cardano e Viète. In: Iran Abreu Mendes (Org.). *A matemática no século de Andrea Palladio*. Natal: Editora da UFRN.

PYCIOR, Helena M. *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements*. Cambridge: Cambridge UP, 1997.

VAAN, Michiel. *Etymological Dictionary of Latin and the Other Italic Languages*. Leiden: Brill, 2008. Disponível em: https://archive.org/details/MichielVaanEtymologicalDictionaryOfLatin/page/n2/mode/1up.

John A. Fossa
Departamento de Matemática (aposentado) – UFRN – Natal, RN – Brasil

E-mail: jfossa03@gmail.com