Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 24, nº49 - pp. 1–18
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

INFÂNCIA E MATURIDADE DO CONCEITO DE FUNÇÃO[1]

Circe Mary Silva da Silva
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) - Pelotas, RS - Brasil

(aceito para publicação em novembro de 2023)

Resumo

O objetivo deste estudo é historicizar e problematizar as diferentes definições do conceito de função formuladas por matemáticos e autores de livros didáticos do século XVIII até o século XX, a partir da primeira delas, proposta por Johann Bernoulli, passando pela definição formalista do grupo Bourbaki. O método utilizado foi o bibliográfico-analítico, com a análise de dados apoiada no modelo das estruturas semióticas, desenvolvido por Richard (2004). Os documentos selecionados e analisados são recortes de obras originais de matemáticos, livros e artigos de história da matemática. A partir das unidades significantes encontradas nas definições, foram identificadas as seguintes categorias: relação entre quantidades variáveis; relação de dependência; relação com domínio ampliado; relação entre conjuntos. Concluiu-se que a definição do conceito de função transformou-se, de uma formulação intuitiva e empírica, em uma formulação abstrata e extremamente formalizada.

Palavras Chave: história da matemática, relação, livros didáticos.

[CHILDHOOD AND MATURITY OF THE FUNCTION CONCEPT]

Abstract

The objective of this study is to historicize and problematize the different definitions of the concept of function formulated by mathematicians and authors of textbooks from the 18th to the 20th century, starting with the first one, proposed by Johann Bernoulli (1667–1748), ending with the formalist definition of the Bourbaki group. The method used was bibliographic-analytical, with data analysis supported by the model of semiotic structures, developed by Richard (2004). The documents selected and analyzed are excerpts from original works by mathematicians, books and articles on the history of mathematics. Starting

---

[1] Esta pesquisa contou com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

from the significant units found in the definitions, the following categories were identified: relationship between variable quantities; dependency relationship; relationship with extended domain; relationship between sets. It was concluded that the definition of the concept of function was transformed, from an intuitive and empirical formulation, into an abstract and extremely formalized formulation.

Keywords: history of mathematics, relationship, textbooks.

Introdução

Historicamente, a palavra “função”, na matemática, demorou alguns séculos para florescer. Com a ideia de variáveis – variabilidade –, o solo foi germinado no âmbito do cálculo infinitesimal e abriu-se um espaço livre para o aparecimento do conceito de função. Inicialmente, surgiu a palavra – função; depois, uma definição um tanto vaga e dois séculos decorreram até que os matemáticos estivessem satisfeitos com uma definição rigorosa para esse conceito.

Os conceitos matemáticos não surgem do acaso, nem nascem prontos: ao contrário, como dizia Bento de Jesus Caraça (1998), eles surgem quando o homem se defronta com problemas de interesse prático ou teórico. Assim, o número natural surgiu da necessidade de contagem, o número racional, da medida; e assim por diante. No presente estudo, pretende-se chegar à gênese do conceito de função.

Esse conceito foi escolhido como foco de análise por ser um objeto fundamental da matemática ensinada desde o ensino secundário até o superior há mais de dois séculos. Conforme Silva e Paulo (1958, p. 131), “São pois (sic) os conceitos matemáticos de variável e de função que permitem à razão humana interpretar o movimento e, dum modo geral, os fenômenos naturais”.

O conceito de função, do ponto de vista da matemática, é um conceito científico. Para Lev Vygostki (1896–1934), os conceitos (significado das palavras) cotidiano, assim como os conceitos científicos, se desenvolvem, não são assimilados já acabados. Entretanto, segundo es psicólogo, a construção de conceitos científicos segue um caminho particular, diferente da dos conceitos cotidianos, pois aqueles são incorporados mediante a mediação sistemática do professor. Os conceitos científicos têm, portanto, um caráter social de produção. Vygostki afirma que o conceito não é “[…] simplesmente um conjunto de conexões associativas que se assimila com a ajuda da memória, não é um hábito mental automático, mas um autêntico e complexo ato do pensamento” (Vygostki, 1982, p. 184). Do ponto de vista psicológico, o conceito é um ato de generalização. No caminho de formação do conceito para a compreensão da nova palavra, há o desenvolvimento paulatino a partir de uma ideia vaga. Quando o aluno penetra no significado da nova palavra, para ele o processo do desenvolvimento do conceito não termina, mas apenas começa.

Sfard (1989) afirma que, diferente dos objetos materiais, os objetos matemáticos são totalmente inacessíveis pelos nossos sentidos, mas, se a mente tivesse olhos, poder-se-ia dizer que eles são vistos com os “olhos da mente”. Assim, quando fazemos um desenho representando uma função no papel, estamos realizando uma possível representação de um objeto abstrato. Esta autora problematiza o conceito de função, considerando que este tem uma natureza dual: uma concepção estrutural e uma concepção operacional, ou seja, pode-se olhar para a função como um objeto – portanto, como sendo de natureza estrutural -, assim como pode-se olhá-la como o produto de um processo – portanto, como sendo de natureza operacional. Segundo Sfard, a natureza operacional precedeu a estrutural. O quadro 1 ilustra essa concepção.

	Estrutural	Operacional
função	Conjunto de pares ordenados, como a definição de Bourbaki	Processo computacional

Quadro 1: Função numa concepção dual

Fonte: Reelaborado a partir de Sfard, (1989, p. 5)

O conceito de função não teve lugar na Matemática grega. Até o século XVII, as curvas eram definidas por suas propriedades geométricas, e o conceito de função estava ausente deste estudo. A partir do momento em que o conceito de variação começou a ser melhor aplicado e os fenômenos naturais identificados por leis que os regem, um passo decisivo foi dado para o surgimento do conceito de função.

A escolha dos matemáticos que definiram função apoiou-se em dois critérios: 1º) aqueles já consagrados pelos historiadores da matemática, como Boyer (1974), Monna (1972), Wussing (1998); 2º) matemáticos que trouxeram uma visão sui generis para abordar o conceito, como Cournot (1841). A análise dos dados apoia-se, parcialmente, na abordagem de Richard (2004), que considera necessário, para uma descrição da linguagem, uma identificação das unidades significantes, das formas e regras de conexão dessas unidades, assim como a realização dos objetivos dessa conexão. A identificação dessas unidades significantes permitiu a classificação das definições em quatro categorias: 1) relação entre quantidades; 2) relação de dependência; 3) relação com domínio ampliado; 4) relação entre conjuntos.

O objetivo da presente pesquisa é historicizar e problematizar as diferentes definições do conceito de função formuladas por matemáticos, partindo daquela já conhecida proposta por Johann Bernoulli no século XVIII até chegar ao século XX, com a definição formalista do grupo Bourbaki.

A forma como a Matemática tem sido apresentada em sala de aula reforça a crença de que ela é uma coleção de símbolos, fórmulas, teoremas e definições formalmente estruturadas. A história dessa construção não é mencionada e, na maioria das vezes, o próprio professor a desconhece. Espera-se que este texto, apresentando aspectos históricos do conceito de função, sirva de estímulo ao professor para pesquisar mais sobre a história dos conceitos matemáticos e compreender a sua importância na educação matemática.

Surgimento da palavra e primeiras definições de função

Um nome (palavra) não é jamais um conceito, é apenas o nome do conceito. “Nenhuma definição é teoricamente indispensável, se bem que ela possa ser útil e cômoda” (Couturat, 1905, p. 30). Em 1905, assim se manifestava o lógico Louis Couturat (1868–1914), na revista *L’Enseignement Mathématique,* a respeito das definições em matemática. Por não ser uma proposição, ela não é nem verdadeira nem falsa. As definições, segundo esse autor, são abreviações de ideias.

O conceito de função surgiu no contexto da Análise Infinitesimal (Cálculo Diferencial e Integral) e desempenhou um papel importante na consolidação dessa área de investigação. Segundo Lorenzo (1987), no final do século XVII, Leibniz começou a identificar uma curva com uma equação (num sentido semelhante àquele de Descartes); assim a curva faz um papel de “função”, ela é a representação geométrica da equação. Para Monna (1972, p.59), “a ideia de função estava conectada com o estudo analítico de curvas”. A existência de parâmetros constantes, que não são diferenciáveis, e de outros, como a abscissa, e ordenada relacionam-se por uma expressão analítica. A expressão que relaciona estas variáveis é uma equação ou relação funcional. Em 1694, Leibniz (1646-1716) escreveu: “Chamo de função a porção de uma reta que é cortada por retas traçadas apenas com o auxílio de um ponto fixo e o ponto da curva dado com sua curvatura” (Probst, apud Leibniz, p. 216).

O Marquês de L’Hospital (1661-1704), que foi aluno de Leibniz, publicou, em 1696, a importante obra *Analyse des infiniment petits*[2] e nela não utilizou o conceito de função. Ao apresentar as regras para o cálculo infinitesimal, ele começou introduzindo o conceito de variável, seguido daquele de diferença:

Chama-se quantidades variáveis aquelas que aumentam e diminuem constantemente e, pelo contrário, quantidades constantes aquelas que permanecem as mesmas enquanto as outras mudam. Assim, em uma parábola, as aplicadas e os pares são de quantidades variáveis, em vez do parâmetro que é uma quantidade constante. A porção infinitamente pequena cuja quantidade variável aumenta ou diminui continuamente é chamada **diferença** (L’Hospital, 1696, p. 1, grifos nossos).

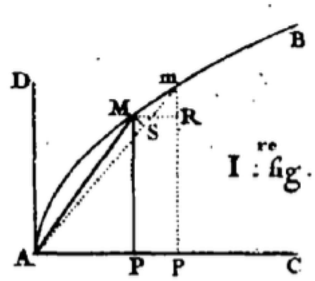

Figura 1: Curva AMB

Fonte: Marques de L’Hospital, 1696, p. 25

[2] Obra consultada on-line na biblioteca digital Gallica (BNF).

A figura 1 é a primeira no livro de 1696. O autor a descreve como uma curva qualquer AMB, que tem por eixo AC e por uma aplicada MP e pm uma outra aplicada, infinitamente próxima da primeira, esta tem MR paralela a AC, as cordas AM, Am que saem do centro A, [...] Pp será a diferença de Ap, Rm aquela de PM, Sm aquela de AM e Mm aquela do arco AM. A partir daí, ele deduziu as regras de derivação, sem mencionar o conceito de função. Entretanto, a variável e diferença podem ser interpretadas como "funções".

Em 1697, Johann Bernoulli tomou o mesmo enfoque e adotou a frase de Leibniz "função de x" para designar uma quantidade formada por constantes e variáveis. Mas foi em 1718 que ele deu uma definição para esse termo. O termo variável é importante para a compreensão de função, pois sem sua explicitação fica difícil entender o conceito intuitivo de função. Primitivamente, esta palavra era aplicada às grandezas físicas que variavam com o tempo como, por exemplo, a pressão de um gás. Quando os matemáticos começaram a falar em variáveis e funções, eles estavam, de fato, interessados nos padrões presentes em algumas leis físicas ou geométricas. Assim, a definição matemática mais antiga de função que se conhece foi dada por Johann Bernoulli. Ele coloca a ideia de função como associada a uma variável; "Chama-se uma função de uma magnitude variável uma quantidade composta de alguma maneira daquela magnitude e de constantes*"* (Bernoulli, apud Monna, p. 58).

Ele utilizou a notação øx, que se aproxima da moderna ø(x). Assim, a função é definida como uma quantidade composta de variáveis e constantes. Seu entendimento é que função era uma quantidade, portanto um objeto numérico.

O passo decisivo foi dado por Leonard Euler (1707–1783). Enquanto seus antecessores como Leibniz e L'Hospital, tomaram o conceito de "diferença" como central no cálculo infinitesimal, Euler considerou o conceito de função como base para a análise. Assim, trinta anos após a definição de Johann Bernoulli, surgiu, em 1748, aquela que se tornou um marco e que serviu de modelo para muitos matemáticos. No primeiro volume do *Introduction à l'analyse infinitésimale,* ele explicitou o que entendia por uma quantidade variável, noção que serviu de apoio a sua definição de função:

> "*Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados. Um valor determinado qualquer pode ser expresso em número, daí segue-se que uma quantidade variável compreende todos os números de qualquer natureza que sejam"* (Euler, 1988, v. 1, p. 2).

Para Euler, "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de qualquer maneira que seja, desta mesma quantidade ou de quantidades constantes" (Euler, 1988, p. 3). Mas, o que é uma expressão analítica? Ele não apresentou seu entendimento sobre este conceito no texto. Atualmente, entendemos por expressão analítica as expressões que se obtêm ligando entre si variáveis e símbolos numéricos por sinais das operações fundamentais de análise. Ainda permanecia a ideia de que função era uma quantidade.

Uma função era, então, uma expressão composta pelo uso da adição, subtração, divisão, extração de raízes, operações trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Félix Klein, criticando a definição de Euler, afirmava que, embora ele falasse em função como uma expressão composta de potências, logaritmos, funções trigonométricas, ele não expressava claramente quais poderiam ser essas combinações.

Outro matemático que se destacou no século XVIII foi Joseph Louis Lagrange (1736-1813), sucessor de Euler na Academia de Ciências de Berlim. Em 1798, publicou o livro *Leçons de Calcul de Fonctions*[3], em que estendeu um pouco mais a definição de função de Euler.

> "*Denomina-se função de uma ou mais grandezas toda expressão de cálculo na qual essas grandezas estiverem presentes de algum modo, estejam elas separadas ou ligadas a outras grandezas, que são consideradas como dadas ou invariáveis, ao passo que as grandezas das funções podem adquirir todos os valores possíveis*" (Lagrange, 1798, p.1).

Em lugar de falar de expressão analítica, Lagrange preferiu "expressão de cálculo", provavelmente com o mesmo significado.

Até então, as definições apresentadas para o conceito de função são discursivas no sentido de Richard (2004). O conceito de função, durante o século XVIII, foi entendido como uma expressão analítica, ou seja, uma expressão contendo operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potências e raízes, operações trigonométricas e logarítmica. Com o nascimento do conceito de função matemática, surge a ela associada a simbologia **øx** e, posteriormente, f(x).

As unidades significantes identificadas nas definições desses autores estão no quadro 2.

Johann Bernoulli	**Leonard Euler**	**Joseph Lagrange**
Quantidade; variável; constante	Quantidade; variável; expressão analítica	Grandeza, expressão de cálculo

Quadro 2: Síntese das unidades significantes segundo cada matemático

Fonte: elaborado pela autora

[3] Obra consultada on-line na biblioteca digital Gallica (BNF).

O conceito de função no século XIX

Os autores de livros didáticos, por outro lado, precisavam popularizar os conceitos formulados pelos matemáticos para que fossem transmitidos nos cursos de matemática dos colégios secundários e universidades. Assim, esses livros constituem-se boa fonte de análise para entender o desenvolvimento histórico dos conceitos fundamentais na Matemática. Um bom exemplo disso, são os livros de Sylvestre Lacroix (1765-1843), na França.

Sylvestre Lacroix, um matemático francês e autor de livros-texto, se popularizou na França no século XIX. Em seu livro *Traité élémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, de 1806, incluiu a definição do conceito de função e o faz nos seguintes termos:

> "*Para exprimir que uma quantidade depende de uma ou de várias outras, seja por operações quaisquer, seja mesmo pelas relações impossíveis de assinalar algebricamente, mas cuja existência é determinada por certas condições, diz-se que a primeira é função das outras. O uso dessa palavra esclarecerá o seu significado. Emprega-se somente uma letra como sinal ou característica da palavra função, assim os símbolos u=f(x), v=F(x), z=□(x) exprimem que u, v e z são diversas funções de x*" (Lacroix, 1806, p.1).

Percebe-se que, na definição de Lacroix, ele a trata como dependência entre variáveis e não como expressão analítica.

Em 1822, em seu livro Cours de Analysis[4], Augustin Cauchy (1789–1857) trouxe contribuições significativas para o conceito de função contínua. Todavia, a definição dada para o conceito de função assemelha-se àquelas do século anterior.

> "*Se grandezas variáveis se interrelacionam de tal maneira que se pode deduzir do valor dado de uma variável os valores de todas as outras, é comum pensar que essas diferentes grandezas são expressas por meio daquelas. Aquelas recebem o nome de variáveis independentes, ao passo que as outras, as grandezas expressas através das variáveis independentes, são as chamadas funções daquela variável*" (Cauchy, 1885, p. 13).

Cauchy avançou ao apresentar uma definição analítica para o conceito de continuidade, ampliando o entendimento que se tinha até então desse conceito. Por exemplo, para Euler a expressão analítica $f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$ não era considerada uma função porque tinha duas leis de formação. Sua concepção de função contínua também era restrita.

No início do século XIX, lentamente, começou-se a perceber que os fundamentos da análise ainda não estavam suficientemente justificados; faltava especialmente uma precisão dos conceitos de função, continuidade e convergência. Além disso, só em meados

[4] Obra consultada on-line na biblioteca digital Gallica (BNF).

do século, é que ficou claro que também o conceito de número necessitava ser melhor fundamentado.

Assim, a concepção de função de Euler sofreu seu primeiro impacto em 1807, quando Joseph Fourier (1768-1830) apresentou pela primeira vez à Academia de Ciências de Paris seu trabalho com as séries trigonométricas, conhecidas atualmente como séries de Fourier. Em 1822, sua obra *Teoria do calor*[5] não fez restrição quanto ao desenvolvimento de funções em séries trigonométricas: “[...] podemos desenvolver em séries convergentes ou expressar por integrais definidas as funções que não estejam sujeitas a uma lei constante e que representem as ordenadas de linhas irregulares ou descontínuas” (Fourier, 1822, p. 12).

Uma função arbitrária para Fourier era uma função que não precisava estar submetida a uma única lei, podendo cumprir uma lei apenas para um pedaço da função.

O trabalho de Fourier foi revolucionário: representar, por meio de séries trigonométricas, funções totalmente arbitrárias, que obedeciam em diferentes intervalos a condições que eram diferentes, foi algo totalmente novo para os matemáticos à época, como diz Klein (2011), embora, Daniel Bernoulli (1700–1782) tenha usado séries trigonométricas para o problema do movimento sonoro de uma corda vibrante. Para Thomas Hawkins (2002, p. 6.), “[...] a palavra função para Fourier significava que, para um número finito de valores x num intervalo finito, uma função representada por uma série trigonométrica poderia tornar-se descontínua ou poderia não ser derivável”.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), em 1829, apresentou um exemplo de função distinta das utilizados até então: $f(x) = \begin{cases} c, se\ x\ \text{é}\ um\ número\ racional \\ d, se\ x\ \text{é}\ um\ número\ irracional \end{cases}$, com c≠d. Essa função é descontínua em todos os seus pontos. Sua contribuição foi dupla: além de estender o conceito de função, que só se aplicava para as funções contínuas, ele apresentou condições necessárias e suficientes para que uma função pudesse ser desenvolvida em uma série de Fourier.

A definição de função, segundo Dirichlet (1829, p. 157–159), é a seguinte:

> “[…] *se uma variável* ***y*** *está relacionada com uma variável* ***x*** *de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a* ***x****, existe uma regra segundo a qual um valor único de* ***y*** *fica determinado, então diz-se que y é uma função da variável independente x* […]”.

Essa é uma definição mais ampla que aquela de Euler, que só englobava funções contínuas. Além disso, ele deixou claro que a cada valor de x corresponde, por alguma regra, um único valor de y. Por sua clareza, essa definição foi adotada por muitos autores de livros didáticos.

Em 1830, Auguste Comte (1798–1856) escreveu o primeiro volume da *Filosofia Positiva* e deu destaque ao conceito de função, distinguindo a função abstrata da concreta. Para a função abstrata ele deu a seguinte definição:

[5] Obra consultada on-line na biblioteca digital Gallica (BNF).

> "*Eu denomino de abstratas as funções que exprimem um tipo de dependência entre determinadas grandezas que podem ser representadas em números, sem denominar qualquer procedimento onde ocorra esse tipo de dependência*" (Silva, 2023, p. 92).

Em 1843, no livro didático sobre Geometria Analítica intitulado *Traité Élémentaire de Géométrie Analtyque a deux et a trois dimensions*, Comte deu muito destaque ao termo função. Ele tratou do movimento geométrico de pontos descrevendo uma curva. Quando um ponto se desloca arbitrariamente sobre um plano, as duas coordenadas mudam independentemente uma da outra, mas se o movimento segue uma trajetória rigorosamente determinada, essas duas variáveis não podem mais ser consideradas como independentes uma da outra. Assim, uma delas é suficiente para determinar o ponto e os valores ficam subordinados à primeira coordenada. Dessa forma, ela se torna assim analiticamente uma verdadeira função, que é caracterizada por uma equação (Comte, 1843).

O matemático russo Lobachevskiy (1792–1856), em 1834, chamou atenção para o mesmo problema que Dirichlet, afirmando a possibilidade de extensão do conceito:

> "*O conceito geral sugere que, como função de* ***x,*** *se denomine um número que está dado para todo o* ***x*** *e que varia progressivamente com* ***x****. O valor da função se pode dar tanto por meio de uma* ***expressão analítica****, como mediante uma condição que ofereça um meio de examinar todos os números e de escolher um deles, e, por último, que possa existir a* ***dependência*** *mas esta permanecer desconhecida*" (Lobachevsky apud Wussing, 1998, p. 204).

Lobachevsky e Dirichlet apontam para uma amplitude do conceito de função, que não se restringe a funções contínuas e que não tem a obrigação de ter uma única lei de formação.

As unidades de significado identificadas nas definições desses matemáticos são as apresentadas no Quadro 3.

Sylvestre Lacroix	**Lejeune Dirichlet**	**Augustin-Louis Cauchy**	**Auguste Comte**	**Nicolai Lobachevsky**
Quantidade, operações, dependência	Variável, regra, valor único para y	Variável, grandeza, Expressão	Grandeza, números, dependência	Expressão analítica, variação;

Quadro 3: Síntese das unidades significantes segundo cada matemático

Fonte: elaborado pela autora

Dirichlet foi o primeiro autor, que se conhece, a inserir na definição a exigência de que, a cada x exista um valor único para y, e Lobachevsky deixou clara a ideia de que função exprime uma variação.

Outro passo decisivo foi dado pelo matemático alemão Hermann Hankel (1839–1873), que definiu-a em um intervalo e ampliou para operações não matemáticas:

> "*Uma função se diz **y** de **x** se a cada valor da magnitude variável **x** que se move dentro de um certo intervalo lhe corresponde um determinado valor **y**, não importa se y depende de x em todo o intervalo segundo a mesma lei ou não, se a dependência se pode expressar mediante operações matemáticas ou não*" (Hankel apud Wussing, 1998, p. 205).

De Antoine-Augustine Cournot (1801–1877) é o livro *Traité élementaire des fonctions et du calcul infinitesimal*[6] (1ª ed. 1841), o qual introduz a ideia de funções empíricas. Estas distinguem-se das funções matemáticas por não poderem ser expressas por uma definição matemática, e não poderem ser calculadas com exatidão, ao contrário das funções matemáticas. A sua definição de função é bastante ampla: "Em geral, expressamos que a grandeza y é uma função de x, conhecida ou desconhecida, matemática ou empírica, por meio de notações, tais que: y= f(x), y= F(x), y= φ (x), etc, as letras f, F, φ, ..., que designam não quantidades, mas as características das funções, analogamente em abreviações log, sin" (Cournot, 1857, p. 14). Prossegue argumentando que a função pode depender de mais de uma variável e ainda envolver parâmetros, a, b, c.... As letras a, b, c,...x, y, ... podendo designar grandezas concretas como áreas, volumes, pesos ou números abstratos.

Em 1861, o apelo à ideia de função como um fenômeno aparece nos trabalhos de Richard Dedekind (1831-1916) que, ao introduzir o conceito de função, sugere a ideia de lei da natureza. Percebe-se a preocupação de Dedekind, em suas aulas de Cálculo Diferencial e Integral de 1861/1862, de apresentar didaticamente o conceito apoiado na intuição.

> "*Nós encontramos na natureza muitas variáveis. Consideremos, por exemplo, o crescimento. Em relação a tal fenômeno observamos que o tamanho de uma planta não é sempre o mesmo. Da mesma forma, nós observamos a variabilidade da temperatura. Leva-se em conta para tal variabilidade muitas quantidades, como, por exemplo, no caso da variação da temperatura num tempo t e uma certa quantidade em grau u, que nós podemos medir. Aqui, a temperatura u depende do tempo t. As quantidades u e t ficam em uma certa dependência. Dizemos, neste caso, que duas quantidades têm dependência quando uma quantidade depende da outra, quando uma é função da outra. Então, u é uma função de t, e escrevemos de forma abreviada u=f(t), onde f significa a palavra função e a quantidade*

[6] Obra consultada on-line na biblioteca digital Gallica (BNF).

> *entre parênteses mostra de quem u seria uma função*" (Dedekind, 1985, p. 25).

Dedekind, num trabalho de 1887, chegou a uma concepção mais geral de função, falando sobre a aplicação de um conjunto (não necessariamente numérico) em outro conjunto. Essa mesma questão havia sido contemplada por Georg Cantor em trabalhos de 1878, quando investigava sobre a cardinalidade de conjuntos. No livro *Was sind und was sollen die Zahlen*, de 1887, Dedekind definiu aplicação da seguinte maneira:

> "*Uma aplicação* $\boldsymbol{\varphi}$ *de um sistema S é entendido como* ***uma lei*** *segundo a qual cada elemento específico s de S tem um objeto específico que é chamado imagem de s, é denotado por* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$*; também dizemos que* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$ *corresponde ao elemento s, que* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$ *surge ou é gerado de s pela aplicação* $\boldsymbol{\varphi}$*, que s é transformado em* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$ *pela aplicação* $\boldsymbol{\varphi}$".

Nessa definição, não apenas discursiva, aparece mais a simbologia matemática. O sistema é entendido como conjunto, e os objetos desse conjunto não precisam ser necessariamente números. Entre 1895 e 1897, Cantor introduziu em seus trabalhos uma definição similar em sua generalidade àquela de Dedekind.

Em 1851, o matemático alemão Bertrand Riemann (1826-1866) iniciou sua aula inaugural na Universidade de Göttingen pelo conceito de função e de função contínua, da seguinte maneira:

> "*Se alguém pensa em* **z** *como uma grandeza variável, que pode gradualmente assumir todos os valores reais possíveis, então, se a cada um de seus valores corresponde um único valor de grandeza indefinida* ***w****,* ***w*** *é chamado de função de* ***z****, e se, enquanto* ***z*** *está constantemente passando por todos os valores localizados entre dois valores fixos,* ***w*** *também está mudando constantemente, então esta função é chamada contínua ou contínua dentro deste intervalo. Esta definição obviamente não estabelece nenhuma lei entre os valores individuais da função, na medida em que, se há um certo intervalo para esta função, a natureza de sua continuação fora dela permanece inteiramente até a vontade*" (Riemann, 1851, p.1).

Ele prossegue explicando mais detalhadamente seu entendimento deste conceito tão relevante da seguinte maneira: "A dependência da grandeza **w** de **z** pode ser dada por uma lei matemática, de modo que o **w** correspondente é encontrado para cada valor de **z** por certas operações" (Riemann, 1851, p.1).

Importante observar que Georg Cantor (1845–1918), ao divulgar sua teoria dos conjuntos transfinitos[7], estabeleceu, no final do século XIX, uma definição de função em termos de conjuntos. Esta definição popularizou-se no século seguinte.

---

[7] Obra consultada on-line na biblioteca digital Gallica (BNF).

Dizemos que uma lei que, para cada elemento n de N, faz corresponder a um elemento determinado de M, o mesmo elemento pode ser usado várias vezes; realiza-se uma representação (Belegung) do conjunto N sobre os elementos do conjunto M, ou mais simplesmente uma representação em M. O elemento de M assim associado a n é de certa forma uma função uniforme de n e pode, por exemplo, ser denotada por f(n); f(n) é a função de representação de n; a representação correspondente de N será denotada por f(N) (Cantor, 1899, p. 350).

Foi um grande passo, o fato do matemático alemão Cantor finalmente introduzir os conjuntos na definição de função.

As unidades significantes identificadas nas definições elaboradas por esses matemáticos estão no Quadro 4.

Hermann Hankel	**Antoine-Augustine Cournot**	**Bertrand Riemann**	**Richard Dedekind**	**Georg Cantor**
Variável, dependência, intervalo	Grandeza, função empírica, característica	Grandeza, variável, correspondência	Lei, correspondência, imagem, transformação	Lei, elemento, conjunto

Quadro 4: Síntese das unidades significantes segundo cada matemático

Fonte: elaborado pela autora

Tanto Cournot quanto Dedekind ampliaram o domínio de definição, de forma que esta passou a não necessitar ser formada apenas por números. Hankel, por sua vez, assim como Dirichlet, não exigiu que a relação fosse expressa por uma única fórmula. Cantor ampliou a definição para os conjuntos.

O conceito de função no século XX

> "*Uma boa definição, em matemática, é aquela que satisfaz as regras da lógica; no ensino, uma boa definição é aquela que os alunos compreendem*" (Poincaré, 1904).

Função entendida como uma relação de dependência entre variáveis em que não se explicita o domínio destas, era muito comum no século XIX. Peano (1858–1932), em 1911, recorreu tanto à investigações sobre teoria das funções quanto à lógica matemática. Em 1887, ele já apresentava exemplos de funções de conjuntos com valores vetoriais. A teoria dos conjuntos de Cantor começou a ser amplamente usada no século XX. Em 1918, Constantin Carathéodory (1873–1950) discorreu amplamente em seu livro *Vorlesung über reelle Funktionen* [Lições de Funções Reais] sobre a teoria dos conjuntos, abordando axiomas de ordem e de ligação, conjuntos, intervalos, operações fundamentais num conjunto de pontos. Assim, ele definiu função:

> "*No caso mais simples, uma função real de pontos é aquela que a cada ponto de um conjunto qualquer de pontos A, de um espaço finito ou infinito n-dimensional é denotado por f(P) a fim de destacar a dependência deste ponto P. O conjunto A, o qual pode incluir todos os pontos do espaço* $\mathfrak{R}^n$, *chama-se o domínio da função f(P)*" (Carathéodory, 1918, p. 19).

Felix Klein (1849–1925), partindo da história do conceito de função desde Leibniz e Bernoulli, chegou às considerações de Cantor sobre conjunto. Segundo ele, partindo da moderna formulação de Cantor,

> "[...] *Estão-se a considerar funções que só são definidas para os pontos de x de algum conjunto arbitrário de modo que, em geral, y diz-se uma função de x se quando a todo o elemento de um conjunto de coisas (números ou pontos) corresponde um elemento y de um conjunto*" (Klein, 2011, p. 86).

Klein estabeleceu uma diferença entre as definições de funções anteriores a Cantor e a partir de Cantor - aquelas estavam atreladas a fenômenos da natureza, como por exemplo, a teoria do calor de Fourier, enquanto, a partir de Cantor, não há quaisquer preocupações com aplicações. Funções são objetos matemáticos abstratos.

Todavia, uma definição que, no início do século XX, teve muitas repercussões foi aquela dada pelo grupo Nicolas Bourbaki, em 1939, no livro *Theorie des Ensembles*. O grupo Bourbaki procurou estabelecer a matemática de maneira formalizada, baseada numa axiomática. Os autores, antes de proporem a definição de função, definiram todos os termos que nela aparecem, os quais podem ser consultados na obra original.

> "*Dizemos que um grafo F é um grafo funcional se, para todo x, existe no máximo um objeto correspondente a x por F. Dizemos que uma correspondência f= (F, A, B) é uma função se seu grafo F é um grafo funcional e se seu conjunto de partida A é igual ao seu conjunto de definição por F. Em outras palavras, uma correspondência f=(F, A, B) é uma função se, para todo x pertencente ao conjunto de partida A de f, a relação (x, y) ∈ F é funcional em y; o objeto único correspondente a x por f é chamado o valor de f para o elemento x de a, e se designa por f(x) ou* f_x *(ou F(x) ou* F_x*). Se f é uma função, F seu grafo e x um elemento do conjunto de definição de f, a relação y= f(x) é equivalente à (x, y) ∈ F* " (Bourbaki, 1970, p. 64).

Embora conhecendo a definição formalizada de Bourbaki, o matemático português José Sebastião e Silva (1914–1972) - e também professor de matemática - escreveu um livro didático para o ensino secundário - *Compêndio de Álgebra para o 6º ano dos liceus* - em coautoria com José Silva Paulo, em 1956. Nele, os autores apresentam o conceito de função com uma abordagem intuitiva. Antes de introduzirem uma definição, discorrem longamente, procurando relacionar esse conceito com a sua gênese, uma vez que, segundo eles, “as propriedades dos seres materiais nunca se mantêm rigorosamente constantes: mudam com o tempo, são variáveis” (Silva & Paulo, 1957, p. 67). Essa gênese encontra-se nos fenômenos físicos, que eles chamam de funções empíricas. Estas, que ainda não têm uma representação analítica, são ditas “funções” empíricas, mas não são funções propriamente ditas, uma vez que elas descrevem os fenômenos e são concretizações aproximadas das funções. E assim é, segundo eles, porque “nenhum fenômeno segue à risca uma lei quantitativa. A definição que apresentam para função uniforme é: “y é função uniforme de outra variável x, quando existe um processo pelo qual, a cada valor de x, corresponde um, e um só valor de y” (Silva & Paulo, 1957, p. 73).

As unidades significantes encontradas nas definições citadas acima estão no Quadro 5.

Constantin Caratheodory	**Felix Klein**	**Nicolas Bourbaki**	**José Sebastião e Silva**
Conjunto; Dependência; domínio	Conjunto, coisas, correspondência	Conjunto, correspondência, conjunto de definição	Variável, Correspondên- cia

Quadro 5: Síntese das unidades significantes segundo cada matemático

Fonte: Elaborado pela autora

Os quadros 2, 3, 4 e 5 apresentam uma síntese das unidades significantes, que nos possibilitaram agrupar as diferentes definições segundo as suas características mais marcantes. No quadro 2, embora as definições discursivas contemplem a ideia de que função está relacionada com quantidades variáveis, que estão submetidas a uma lei (expressão analítica ou expressão do cálculo), elas limitam os seus objetos – são quantidades, números. Nesse sentido, podemos enquadrar na categoria relação entre quantidades variáveis. O quadro 3 traz um segundo grupo de definições, que tratam a função numa relação de dependência entre variáveis, só que estas não se limitam necessariamente a quantidades ou não estão condicionadas a uma única lei de formação, podendo incluir funções que não são contínuas. Estas podem ser enquadradas na categoria relação de dependência.

O quadro 4 traz definições que não se enquadram nos dois grupos anteriores, são diversificadas pois o seu domínio de definição tanto pode ser um intervalo (Hankel), ou um domínio de objetos quaisquer (Dedekind e Cournot), segundo uma mesma lei ou várias. O enquadramento dessas definições foi problemático, por isso optamos por enquadrá-las na categoria relação com domínio ampliado.

A partir do momento que os matemáticos começaram a utilizar a linguagem dos conjuntos, as definições de funções tornaram- se mais formalizadas. O quadro 5 de unidades significantes, permitiu enquadrar as definições na categoria relação entre conjuntos.

Relação entre quantidades	Relação de dependência	Relação com domínio ampliado	Relação entre conjuntos
Bernoulli, Euler, Lagrange	Lacroix, Comte, Cauchy, Dirichlet, Lobachewsky Sebastião e Silva	Hankel, Cournot, Dedekind Riemann	Cantor Klein, Caratheodory, Bourbaki

Quadro 6: Categorização das definições

Fonte: elaborado pela autora

O esquema da figura 3 é uma tentativa de mostrar como os conceitos envolvidos nas definições de função, mantiveram sempre presente a ideia de relação.

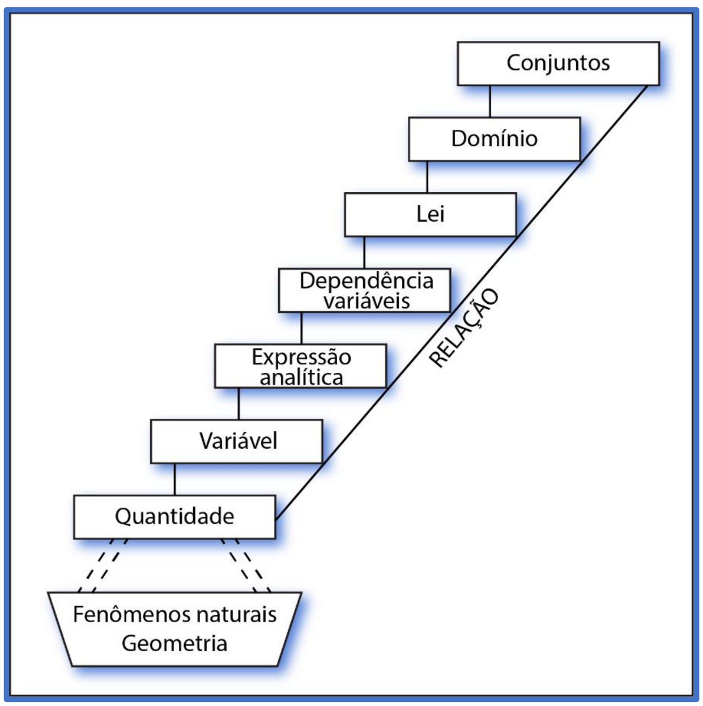

Figura 3: Esquema.

Fonte: Elaborado pela autora.

Conclusões

Durante várias décadas, a definição do conceito de função transformou-se de uma formulação intuitiva e empírica, para uma formulação abstrata e extremamente formalizada, que não faz mais nenhum apelo ao mundo real. Essa última formulação, com algumas variações, é encontrada nos livros-texto de Matemática do ensino fundamental até o nível universitário.

A gênese do conceito de função, conforme Klein (1908) e Silva (1956) reside nos fenômenos naturais. São as "funções" empíricas, ainda sem uma representação analítica, que se constituem no germe daquilo que posteriormente, por meio do raciocínio, poderá ser expresso por uma expressão matemática.

A definição do conceito de função, desde o século XVIII até a formalização do grupo Bourbaki, no século XX, sofreu transformações: a princípio entendida como uma relação entre quantidades sujeita a uma lei de formação, passou por uma ampliação, deixando precisos o domínio de definição e as possibilidades das leis de formação, até finalmente, no século XX, chegar a uma formalização tal, que pode ser expressa praticamente apenas por símbolos. A definição do conceito de função é, à princípio, bastante discursiva, mas aos poucos as palavras tornam-se mais precisas e os símbolos integram-se a ela. Torna-se um conjunto de pares ordenados – um objeto matemático.

Cabe mencionar que a definição formalizada do século XX afastou-se completamente de sua gênese, de seu aspecto operacional intuitivo, restando apenas o aspecto estrutural para o conceito de função.

Sierpinska (1992) afirma que a introdução de definições gerais, no ensino secundário, não faz sentido sem antes ter sido desenvolvida uma certa cultura algébrica pelo aluno em que o universo de formas de apresentar, falar sobre e representar funções seja o mais amplo e rico possível com o objetivo de permitir que o aluno adquira familiaridade com as representações de função. Sugere que definições do tipo daquela de Dirichlet são suficientes para o ensino secundário.

A definição do grupo Bourbaki satisfaz as exigências de rigor da matemática contemporânea; entretanto, permanece o desafio de como introduzir e definir esse importante conceito nos diferentes níveis de ensino. As dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem do conceito de função têm razões históricas, filosóficas e cognitivas, conforme explicam pesquisadores como Niss (2014). O objetivo do presente trabalho foi apresentar alguns aspectos históricos de tal conceito a fim de mostrar que os próprios matemáticos foram desafiados ao longo dos últimos séculos com a formulação deste conceito. A história da matemática serve para nos mostrar as relações dos indivíduos com o conhecimento matemático num determinado contexto temporal, social e cultural – neste caso, o conceito de função – que percorreu caminhos em diversos territórios e se deslocou nos tempos até se consolidar, na atualidade, como o objeto central do mundo matemático.

Bibliografia

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher e EDUSP.

Cantor, G. (1899). Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis. Trad. Extraída do extrato de *Memoires de La Société des Sciences physiques et naturelles de Bourdeaux*, T. III (5. Série), p 343-437.

Caraça, B. J. (1998). *Os conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Caratheodory, C. (1918). *Vorlesung über reelle Funktionen*. Leipzig e Berlin: Teubner.

Couturat, L. (1905). Les définitions générales em mathematiques. *L'Enseignement Mathematique*. Band 7, pp. 27–40.

Dedekind, R. (1985). *Vorlesung über Differential-und Integralrechnung 1861/1862.* Braunschweig/Wiesbaden: Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

Dirichlet, L. (1829). Sur la convergence des series trigonometriques qui servent à représenter une founction arbitraire entre des limites données. *Journal für die reine und angewandte mathematik*. (4), pp. 157–169.

Euler, L. (1988). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* Paris: ACL-Editions.

Fourier, J. B. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Chez Firmin Didot, Pére et Fils, Libraires pour les mathématiques, l'Architecture Hydraulique et la Marine.

Hankel, H. (1882). Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. *Mathematische Annalen*. Leipzig, Teubner, (20), p.63–111.

Hawkins, T. (2002). *Lebesgue's theory of integration*. MAS Chelsea Publishing, Providence.

Lacroix, S. (1842). *Elementos de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral*, trad. José Saturnino Pereira. Rio de Janeiro:Tipografia Nacional.

Lagrange, J. (1798). *Theorica das funções analyticas, que contem os principios do Calculo Diferencial*. Traduzido por Manoel Jacinto Nogueira da Gama. Lisboa: Officina de João Procopio Correa da Silva.

L'Hospital, M. (1696). *Analyse des infiniment petits*. Paris: Imprensa Real.

Lorenzo, J. (1987). *Análisis Infinitesimal*: estudio preliminar. Madrid: Editorial Tecnos.

Monna, A. (1972). The concept of Function in the 19. And 20. Centuries, in particular with regard to discussions between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for the Exact Sciences*, p. 57–83.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. Stephan Lerner (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Londres: Springer, p. 238–241.

Poincaré, H. (1904). Les éfinitions générales en mathematiques. *L'enseignement mathematique.* Band 6, pp. 254–283.

Probst, S. (2018). The Calculus. In: Maria Rosa Antognaza (Ed.), *The Oxford handbook of Leibniz.* Oxford: Oxford University University Press.

Riemann, B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine theorie der funktionen einer veränderlichen komplexen grösse*. Inaugural-Dissertation Göttingen. Göttingen, pp. 1–43.

Skemp, R. R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. England: Penguin Books, Harmondsworth.

Sierspinska, A. (1992). On understanding the notion of function: aspects of epistemology and pedagogy. USA: MAA.

Silva, C.M.S. (1994). O desenvolvimento da Geometria Analítica e a influência de Descartes e Euler na obra de Auguste Comte. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*. (14) 1/2 , p. 51–77.

Silva, J. S.; Paulo, J. S. (1957). *Compêndio de álgebra*. 3º ciclo dos liceus, v.1, 6º ano. 2. Ed. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Vygotski, L.S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica, S.A.

Wussing, H. (1998) *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores.

Circe Mary Silva da Silva
Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) - Pelotas,RS – Brasil.

E-mail: cmdynnikov@gmai.com