Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 296–371
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

AS *CONTRIBUIÇÕES* DE BERNARD BOLZANO (1810): TRADUÇÃO COM NOTAS E ENSAIO INTRODUTÓRIO

Tiago Tranjan
Universidade federal de São Paulo – UNIFESP – Brasil

(aceito para publicação em janeiro)

Resumo

As *Contribuições a uma Exposição mais Bem Fundamentada da Matemática* foram publicadas por Bernard Bolzano (1781–1848) em 1810. Elas constituem parte importante do esforço, manifestado desde cedo em sua obra e nunca abandonado, de atingir clareza a respeito da ciência que tamanha admiração lhe despertava. Em aberta oposição às posições kantianas, ele logra formular uma concepção da matemática como ciência formal geral. O presente artigo traz a tradução inédita da primeira metade da obra, acrescida de notas e de um ensaio introdutório.

Palavras-chave: Matemática, História, Bolzano, Definição de Matemática.

[BERNARD BOLZANO *CONTRIBUTIONS* (1810): PORTUGUESE TRANSLATION, NOTES AND INTRODUCTORY ESSAY]

Abstract

The *Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics* were published by Bernard Bolzano (1781–1848) in 1810. They are a relevant part of his efforts, soon manifested in his philosophical works, and never abandoned, to reach clarity regarding the science that commanded on him such a great admiration. In open conflict with Kantian views, Bolzano proposes a conception of Mathematics as a general formal science. The present article contains the first Portuguese translation of the first half of this text, alongside notes and an introductory essay.

Keywords: Mathematics, History, Bolzano, Definition of Mathematics.

1. Apresentação

Bernard Bolzano (1781–1848) é uma daquelas raras figuras que, na ilustre companhia de Descartes e de Leibniz, podem alegar para si, além de um pensamento filosófico relevante, resultados importantes no âmbito da matemática. Como seria de se esperar nesses casos, tais resultados costumam vir na esteira de reflexões epistemológicas abrangentes, a respeito da ciência em geral e da matemática em particular. A obra *Contribuições a uma Exposição mais bem Fundamentada da Matemática* contém reflexões desse tipo. Ela foi publicada em Praga, no ano de 1810, e ainda pode ser considerada um escrito de juventude do autor. Antecede em sete anos a demonstração pioneira dada por Bolzano para aquele que viria a ficar conhecido como Teorema de Bolzano-Weierstrass, cuja importância para a história da análise real dispensa comentários. Ao todo, a obra possui as seguintes quatro partes:

Prefácio

I. Do conceito de matemática e suas Subdivisões.

II. Do método matemático

Apêndice: Da teoria kantiana a respeito da construção dos conceitos por meio da intuição.

Apresento aqui, acompanhadas de breve ensaio introdutório, as duas primeiras partes da obra. Em outra oportunidade, espero poder trazer ao público o restante da tradução.

2. Ensaio introdutório: Bolzano e a concepção de uma ciência formal geral

O mérito essencial do texto de Bolzano, cuja tradução parcial oferecemos aqui, consiste em buscar uma definição de matemática que seja ao mesmo tempo clara e abrangente. Dessa definição deve seguir-se, além disso, uma subdivisão rigorosa da disciplina, que nada deixe de fora, nem inclua nada que não pertença a ela. A meta é certamente ambiciosa, e hoje nutrimos certa tendência a desconfiar de um projeto como esse. Afinal, a matemática parece ter se revelado, ao longo da história, um campo tão vasto e tão diverso, tão dinâmico em sua evolução, que melhor seria condenar como insensata qualquer tentativa de delimitá-la em seu método ou escopo – como faz qualquer definição –, ou de ordená-la segundo uma concepção prévia. Nesse caso, a história e a sociologia restariam como nossa única régua, constatando *ad hoc* as múltiplas faces daquilo que, no decurso do tempo e das civilizações, foi estudado como matemática.

Não foi assim, porém, que boa parte da tradição pensou. Ao contrário: por muitos séculos, sempre pareceu não apenas sensato, mas necessário, obter uma compreensão abrangente e rigorosa da matemática, capaz de distingui-la de outras empreitadas intelectuais humanas, particularmente de outras formas de cognição da *physis* mais atadas à empiria. Com efeito, aqui se revela um dos centros nervosos da discussão que, desde os gregos, emergiu com surpreendente autoconsciência: a distinção que se anuncia entre, de um lado, investigações empíricas da natureza, que necessitam para seu desenvolvimento das informações colhidas pelos sentidos; e, de outro lado, esse estranho ramo do conhecimento, a matemática, que foi assumindo um grau cada vez maior de autonomia justamente por meio de uma progressiva libertação da empiria, mais precisamente, por meio da progressiva ênfase em procedimentos demonstrativos, bem como na generalização e na sistematização de resultados capazes de serem articulados em um discurso coerente, dotado de regras internas de validade.

É a esse problema – profundamente enraizado, portanto, na própria história da disciplina – que Bolzano se dirige. É para esse problema que ele oferece uma solução radical, levando às últimas consequências aquela percepção que está na base da constituição da matemática como disciplina: sua distinção em relação às formas empíricas de cognição do mundo. E a proposta que ele formula, embora possa parecer estranha, merece nossa atenção.

Alguns esclarecimentos são, desde logo, necessários. Bolzano nasceu no mesmo ano (1781) em que Kant publicava a *Crítica da Razão Pura*. Como sabemos, daquele momento em diante nada mais poderia continuar como estava, tanto no âmbito das reflexões filosóficas como no âmbito das reflexões científicas. A partir dali, era possível ser kantiano, antikantiano, ou ainda qualquer coisa no meio do caminho. O que não era possível, para nenhum pensador sério, era continuar pré-kantiano. Para o entendimento da obra de Bolzano, portanto, eis o primeiro ponto que devemos manter em vista: a referência constante de suas investigações são as doutrinas elaboradas pelo filósofo de Königsberg. Não à toa, a pequena obra que estamos parcialmente traduzindo termina com um apêndice (ver apresentação acima) em que o autor discute a "teoria kantiana a respeito da construção dos conceitos por meio da intuição", ou seja, a teoria kantiana da matemática.

O segundo ponto que precisamos ter presente, porém, é este: a relação de Bolzano com a filosofia kantiana não é simples. Pelo contrário. Ao longo de seu percurso intelectual, Bolzano foi desenvolvendo uma concepção filosófica – em todos os seus aspectos, aí incluída a filosofia da matemática – sempre crítica, e em muitos sentidos até mesmo oposta, à de Kant. Sua afinidade intelectual, pode-se dizer, é bem outra. Bolzano pode ser mais bem compreendido, nesse sentido, como um elo de ligação entre as tradições lógicas de Leibniz (ele chegou a ser chamado de "o Leibniz da Boêmia") e de Frege.

Essas simples indicações, sumárias como possam ser, bastam para que cheguemos à segunda questão central. O outro ponto que está em jogo, para além da distinção entre matemática e ciência empírica, é a relação entre matemática e lógica. A ligação entre as duas questões não é difícil de perceber. Com efeito, a lógica é o outro grande ramo de investigação que almeja subtrair-se ao domínio da empiria. Mas se é assim, então deveríamos indagar: o que distingue a matemática da lógica, como conhecimento não-empírico? Seria a matemática parte da lógica, ou a lógica parte da matemática? Ou será ainda que ambas coincidem? Esse tema, já anunciado com clareza por Leibniz, viria a ocupar lugar de grande destaque nas reflexões filosófico-matemáticas a partir de Frege ou, mais geralmente, a partir do momento em que começou a assumir feições claras, na segunda metade do século XIX, algo que se convencionou chamar de "lógica matemática", termo que testemunha não apenas a proximidade das duas investigações, mas anuncia também uma possível inversão na relação entre elas.

Situados entre Leibniz e Frege, tanto Kant como Bolzano se dirigem a essas mesmas duas perguntas. As respostas de Kant, como sabemos, são inequívocas: a matemática é um conhecimento *a priori* (não-empírico) que, ao contrário do que desejava Leibniz, não pode ser visto como meramente lógico. Isso porque, segundo o fundador da filosofia crítica, a matemática envolve, para além da execução de operações lógicas, o uso essencial da intuição. Seus resultados somente podem ser obtidos por meio da construção de conceitos nas formas *a priori* da intuição, que são o espaço e o tempo. Vale lembrar que, no sistema kantiano, tanto intuições como conceitos são representações (singulares no primeiro caso; gerais no segundo). Isso significa que a matemática é, em um sentido relevante, um estudo da estrutura das nossas representações.

Segue-se daí uma primeira consequência importante. Como estudo da construção de conceitos nas formas puras da intuição, a matemática não está preocupada com a existência dos objetos espaço-temporais, mas apenas – como é característico da investigação transcendental – com certas condições de possiblidade desses objetos. Ela não pergunta nunca quais objetos espaço-temporais efetivamente existem, vale dizer, quais representações sensíveis são efetivamente dadas. Ela investiga, em vez disso, a estrutura da intuição *a priori* do espaço e do tempo. Consequentemente, investiga também a organização, no espaço e no tempo, de qualquer representação *possível*.

É interessante notar como, apesar de anunciar, já nas seções 5 e 6 das *Contribuições*, sua discordância em relação à teoria da matemática apresentada na *Crítica da Razão Pura*, Bolzano parece estar, ao menos quanto a esse ponto, em perfeito acordo com Kant. A seção 8, que contém sua definição de matemática e utiliza largamente o vocabulário kantiano, traz a seguinte afirmação:

> "*Se digo ainda que a matemática trata das leis pelas quais se regulam essas coisas em sua existência, então quero indicar com isso que nossa ciência não se preocupa com a demonstração da existência dessas coisas, mas tão-somente com as condições de sua possibilidade. E ao dizer que essas leis são gerais, dou a entender que nunca ligo a matemática a uma única coisa como indivíduo, mas sempre a conjuntos de coisas de certo gênero.*" (BOLZANO, 1810, §8)

A formulação, como se vê, é amplamente kantiana. Nela se expressa, vale repetir, a seguinte posição fundamental: a matemática não é uma ciência do real, mas sim uma ciência da possibilidade do real; e como tal, não é uma ciência empírica, mas sim uma ciência *a priori*.

O que Bolzano claramente rejeita, porém, é a teoria kantiana da matemática como tendo sua origem na intuição pura do espaço e do tempo. Tal explicação não lhe parece convincente:

> "*Eu, de minha parte, gostaria apenas de reconhecer, com o coração aberto, que até o presente momento não consegui me convencer, não só a respeito da verdade de muitos outros ensinamentos da filosofia crítica, mas particularmente também a respeito da correção das afirmações kantianas acerca da intuição pura e da construção de conceitos por meio dela. Não deixo de acreditar que já no conceito de uma intuição pura (isto é,* a priori*) resida uma contradição interna; e muito menos consigo me convencer de que o conceito de número deva ser necessariamente*

> *construído no tempo e, nesse sentido, de que a intuição do tempo pertença realmente à aritmética.*" (BOLZANO, 1810, §6)

Temos então a seguinte situação: Bolzano mantém a ideia kantiana de que a matemática é uma ciência da *possibilidade* do real, sem atrelá-la, contudo, a uma teoria a respeito da forma como esse real pode ser dado na experiência, em particular na experiência sensível. O resultado é uma concepção que amplia imensamente o campo do que deve ser considerado como pertencente à matemática. A matemática passa a ser, com efeito, uma ciência das leis gerais de *tudo*:

> "*Penso, portanto, que se pode definir a matemática da melhor maneira como uma ciência que trata das leis (formas) gerais pelas quais se devem regular as coisas em sua existência. Por meio da palavra coisas desejo compreender não somente aquelas que possuem um ser objetivo, independente da nossa consciência, mas também aquelas que existem meramente em nossa representação, e essas, por sua vez, tanto na condição de indivíduos (ou seja, intuições) como na de conceitos gerais. Em uma palavra: tudo o que de qualquer maneira puder ser objeto de nossa faculdade de representação.*" (BOLZANO, 1810, §8)

Não à toa, dessa definição superlativamente abrangente, resulta uma subdivisão da matemática que inclui, talvez para nossa surpresa, áreas como a "etiologia" – estudo das "condições gerais pelas quais se deve regular, em seu devir ou em sua existência, tudo o que é efetuado por uma causa (esteja ela dentro ou fora do tempo)" (§13) –, a "cronometria" – estudo que visa "desenvolver e ordenar cientificamente as propriedades abstratas do tempo" (§14) – e até mesmo toda a "ciência natural pura" (§15).

Devemos indagar, então: o que está por trás de uma definição como essa? Como compreendê-la adequadamente? E será que podemos simplesmente descartá-la?

Não julgo necessário defender, neste breve ensaio introdutório, a ideia de que a matemática é *a priori*, ou seja, de que a validade de seus resultados é essencialmente independente da empiria. Apesar de certas recaídas no "empirismo matemático" encontráveis na filosofia contemporânea, largamente tributárias do uso cada vez mais frequente de métodos computacionais na matemática atual (e de uma interpretação errada de seu significado), partirei do pressuposto de que essa é uma questão razoavelmente clara. Meu objetivo, aqui, é simplesmente examinar o seguinte: seria possível, nesse caso, distinguir a matemática de outros conhecimentos *a priori*?

Nas *Contribuições*, Bolzano admite somente uma distinção no âmbito do conhecimento *a priori*, e ela se dá entre matemática e metafísica. Eis como ele formula a questão:

> "*Em outras palavras, aquela* [a matemática] *lidaria com a pergunta: de que modo as coisas precisam ser, para que sejam possíveis? Esta* [a metafísica] *proporia a pergunta: quais coisas são reais e, ainda por cima (pois deve fornecer uma resposta* a priori*), necessariamente reais? Ou de*

> *maneira ainda mais curta: a matemática trataria da necessidade hipotética, a metafísica da necessidade absoluta.*" (BOLZANO, 1810, §9)

Deixando de lado a ideia de um suposto conhecimento metafísico, tal como definido acima, podemos nos concentrar no verdadeiro problema que nos interessa. Ele pode ser formulado assim: se aceitamos uma ciência das "leis (formas) gerais pelas quais se devem regular as coisas em sua existência", como então seria possível traçar qualquer fronteira, em seu interior, entre aquilo que é matemático e aquilo que não é matemático, ou entre aquilo que vale a pena ser considerado como matemático e aquilo que não vale? Em primeiro lugar, note-se que a hipótese de partida – a existência de uma tal ciência – é algo fácil de admitir. Com efeito, qualquer conhecimento *a priori* deve ser compreendido como uma ciência exatamente desse tipo. Temos aqui, justamente, uma das grandes contribuições kantianas: o conhecimento que antecede a experiência só pode ser um conhecimento a respeito daquilo que estrutura a experiência; ele não é um conhecimento do real (dado *na* experiência), mas sim da possibilidade do real, ou seja, das formas sob as quais conseguimos conceber o real, e para além das quais tudo se perderia em uma bruma de indistinção. Trata-se, no fundo, de um conhecimento reflexivo a respeito do próprio conhecimento, capaz de investigar suas formas.

Se indagamos agora pela possibilidade de traçar fronteiras dentro *desse tipo* de investigação, temos três opções. Uma, já sabemos, é aquela sugerida por Kant: identificar, como resultado dessa investigação *a priori*, certo número de formas puras a que se sujeitam quaisquer cognições. Nesse caso, haveria um conhecimento *a priori* distinto para cada uma dessas formas (bem como, possivelmente, um conhecimento *a priori* de caráter geral). Na filosofia kantiana essas formas são o espaço e o tempo, dando origem à geometria e à aritmética, às quais se acrescenta ainda o exame das categorias, na chamada lógica transcendental. Mais uma vez, não cabe no escopo deste ensaio realizar uma crítica detida do caminho trilhado por Kant. Basta dizer que Bolzano recusa a análise kantiana, considerando duvidosa a noção de uma intuição pura *a priori* e rejeitando a possibilidade de obter resultados matemáticos a partir dela. Não é outro, aliás, o significado do teorema de Bolzano-Weierstrass, cujo grande mérito reside em exigir – e encontrar – uma demonstração lógica ali onde a intuição espacial parecia "exibir" uma obviedade. (A consequência nada desprezível dessa postura é que, a partir de agora, será necessário articular um discurso a respeito do espaço para além de qualquer intuição espacial, ou seja, será necessário reconstruir o espaço como tema de um discurso lógico regrado cujos critérios, mais públicos e menos subjetivos, possam ir além de uma suposta "intuição espacial".)

A segunda opção é tentar circunscrever a matemática a partir de um ou mais conceitos específicos, que lhe fossem característicos e em torno dos quais ela pudesse se organizar. Os candidatos mais óbvios, ao menos do ponto de vista histórico, seriam os conceitos de "número" e de "forma geométrica", os quais serviram como ponto de partida para o desenvolvimento de boa parte daquilo que, no século XIX como ainda hoje, chamamos de matemática. A fórmula seria: "Matemática é a ciência *a priori* que trata do número e da forma geométrica". Está claro que, nesse caso, ainda seria necessário esclarecer o que são “número” e “forma geométrica”. E se buscarmos reunir esses dois conceitos em um único conceito comum, avançando um pouco mais no ideal de uma definição unitária, obteríamos algo como a definição explicitamente criticada por Bolzano nas seções 1, 2 e 3 das *Contribuições*: “A matemática é a ciência das grandezas”. Novamente, tudo giraria em torno da possiblidade de dar uma definição adequada para a noção de “grandeza”. Mas Bolzano considera esse caminho inviável. Toda a discussão proposta por ele nas referidas seções volta-se, justamente, a estabelecer o caráter insatisfatório dessa empreitada.

Resta ainda a terceira opção. Trata-se daquela opção que sempre se oferece em uma situação como essa, na qual se busca averiguar a disponibilidade de um critério de divisão em certo âmbito de investigação: reconhecer que não há tal critério. (O ônus de apresentar novos candidatos, é claro, está com quem insistir em fazer a divisão). Parece ser precisamente essa a postura adotada por Bolzano, e é dela que surge sua concepção tão abrangente de matemática, como ciência (*a priori*) das “leis (formas) gerais pelas quais se devem regular as coisas”, sem qualquer restrição.

Agora estamos em condição de ver, finalmente, que não se trata de proposta absurda. Ela pode ser entendida, segundo compreendo, como a proposta de assumir como pertencente à matemática – reconhecendo sua profunda semelhança com aquilo que historicamente foi estudado sob esse título – todo e qualquer estudo *formal*, vale dizer, todo e qualquer estudo *a priori* relacionado à *forma* possível da experiência. Essa identificação teórica (que é também reconhecimento e legitimação) de uma abordagem formal abrangente, metodicamente vinculada à matemática, tem implicações profundas. Ela implica, por exemplo, que a matemática possa ser vista como a ferramenta adequada para articular uma “lógica formal”, ou mesmo uma “linguagem formal” nos moldes do sonho leibniziano. Ou ainda, em um movimento inverso, mas no fundo muito semelhante, que a matemática possa ser inteiramente assimilada a um âmbito prévio de estudos formais, vistos como estudo geral das estruturas simbólicas regradas (as quais, em última instância, acabarão por ser submetidas a um tratamento matemático). Implica também, de um ponto de vista mais amplo, que a matemática possa servir como modelo e/ou como instrumento privilegiado para uma investigação a respeito da própria constituição do significado linguístico. Como se vê, as possibilidades de desenvolver essa ideia são muitas. Mais do que isso, diversas delas tiveram uma longa e relevante história, não apenas na segunda metade do século XIX, mas também ao longo de todo o século XX – e até hoje.

Bibliografia

BOLZANO, Bernard. 1810. *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Praga: Caspar Widtmann.

Tiago Tranjan
Departamento de Filosofia – EFLCH-Unifesp – Guarulhos – Brasil

E-mail: ttranjan@hotmail.com

3. Tradução

Contribuições a uma Exposição mais Bem Fundamentada da Matemática
(Bernard Bolzano, Praga, 1810)

Multum adhuc restat operis, multumque restabit,
nec ulli nato post mille saecula praecludetur occasio
aliquid adhuc adjuciendi. . . . Multum egerunt, qui ante
nos fuerunt, sed non peregerunt. Suspiciendi tamen sunt,
et ritu deorum colendi. (Sêneca, Epístola 64) [1]

Prefácio

Que a matemática, entre todas as ciências, ainda é aquela que se encontra mais próxima ao ideal de perfeição, eis algo que deve ser reconhecido por qualquer juiz imparcial. Na maioria dos manuais de matemática predomina, efetivamente, maior clareza e precisão de conceitos, maior certeza e convicção nas afirmações do que encontramos, ainda hoje, no mais bem-acabado manual de metafísica. Embora seja isso inegável, também o matemático nunca deveria esquecer-se, por sua vez, de que vale, também em relação à sua ciência, o que lá se encontra escrito acerca de todo conhecimento humano: “que é apenas um trabalho incompleto”. De fato, os maiores conhecedores dessa ciência admitiram, desde sempre, não apenas que o edifício de sua ciência ainda não é um edifício completamente erguido, em si mesmo encerrado; mas também que até mesmo as primeiras pedras fundamentais desse edifício, de resto tão precioso, ainda não estão assentadas de maneira firme e regular; ou, para falar sem metáforas, que até mesmo nas primeiras noções elementares de todas as disciplinas matemáticas encontram-se ainda diversos buracos e imperfeições.

Para comprovar essa afirmação apenas com alguns exemplos: Não reconheceram os maiores matemáticos dos novos tempos que, na aritmética, a teoria das grandezas opostas,[2] juntamente com tudo aquilo que dela depende, ainda não foi passada a limpo? Não se encontra, em quase todo manual de aritmética, uma exposição diferente dessa teoria? Ainda mais vacilante, e neste momento cheia de contradições por todos os lados, é o capítulo das grandezas irracionais e imaginárias. Das deficiências de que padece a álgebra superior, o cálculo diferencial e integral, não desejo aqui nem falar; é bem conhecido que, até agora, ainda não se entrou em acordo nem mesmo a respeito do conceito de um diferencial; e somente no final do ano passado a Sociedade Principesca Jablonovskiana de Ciências,[3] em Leipzig, ofereceu um prêmio para a questão de confrontar as diferentes teorias do cálculo infinitesimal e determinar qual delas merece preeminência.

---

1 *Resta ainda muito trabalho, e muito sempre restará,*
e mesmo a quem nascer dentro de mil séculos não faltará ocasião
de algo acrescentar. ... Muito progrediram os que vieram
antes de nós, embora não até o fim. Merecem, porém, admiração,
e devem ser adorados com rito de deuses.

2 No alemão, “entgegengesezten Grössen”. A expressão refere-se ao tipo de grandeza que admite um oposto, normalmente indicadas pelos sinais + e -. O caso mais simples é o dos números positivos e negativos.

Nem por isso a aritmética deixa de ser, em minha opinião, ainda e de longe a mais bem-acabada das disciplinas matemáticas; pois a geometria possui deficiências muito mais importantes e difíceis de solucionar. Aqui ainda falta, atualmente, uma definição mais precisa dos principais conceitos: linha, superfície, corpos. Nem mesmo a respeito da definição de linha reta (que talvez pudesse ser dada antes do conceito de linha em geral) conseguiu-se atingir um consenso. Alguns anos atrás, o Sr. Grashof[4] presenteou-nos (*Theses sphaereologicae, quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem, omnisque geometricae firmum jaciunt firmamentum,*[5] Berlim, 1806) com uma explicação completamente nova, mas que dificilmente poderia nos satisfazer. A lacuna mais evidente, no entanto, para cuja melhoria se tem trabalhado, até onde sabemos, já desde os tempos de Proclus, e muito provavelmente já bem antes de Euclides, diz respeito à teoria das paralelas. Contudo, por maior que tenha sido o número de tentativas até agora empreendidas, nenhuma ainda conseguiu gozar de aprovação geral.

Na mecânica, o conceito de velocidade e o conceito de força constituem quase a mesma pedra no sapato que o conceito de linha reta na geometria. Há muito tempo também já se compreendeu que os dois principais teoremas dessa ciência – o do paralelogramo de forças e o da alavanca – ainda não foram demonstrados com rigor. Por esse motivo, a Sociedade Real de Ciência, em Copenhague, ofereceu ainda em 1807 um prêmio para a elaboração de uma teoria mais bem fundamentada para o paralelogramo de forças. Como ainda não consegui ter diante dos olhos o trabalho do prof. de Mello, ganhador do prêmio, não posso avaliar se a tentativa, que em tais folhas espero encontrar, constitui algo novo. No que tange à teoria da alavanca, a opinião geral é de que a demonstração de Kästner[6] resolveria todas as dificuldades; contudo, pretendo mostrar o contrário ainda no presente ensaio.

Finalmente, em todos os ramos da matemática – mas principalmente na geometria –, já se reclama, desde os tempos de Ramus,[7] da falta de ordem. E de fato, no livro de Euclides, os teoremas individuais não tratam dos objetos mais díspares? Primeiramente de triângulos, e já então de circunferências que se cortam em certos pontos; logo depois de ângulos complementares e opostos pelo vértice; então da igualdade de triângulos; somente muito depois da semelhança desses mesmos triângulos, e mesmo assim por um desvio inaudito, em que o tema é derivado de considerações acerca das linhas paralelas e até mesmo da área dos triângulos, entre outras coisas! – Consideremos, porém, *ταυθ΄ ὅπως*

[3] A *Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft der Wissenschaften*, ou *Societas Jablonoviana*, havia sido fundada em 1769, com sede na universidade de Leipzig, pelo magnata e príncipe polonês Josef Alexander Jablonowski (1711–1777), com o objetivo de promover o intercâmbio cultural e científico entre Alemanha e Polônia.

[4] Franz Grashof (1826–1893): engenheiro e professor, distinguiu-se amplamente por seu trabalho em mecânica aplicada. Foi um dos fundadores e o primeiro diretor da Associação dos Engenheiros Alemães, dando nome, a partir de 1894, à maior distinção por ela conferida: a medalha de Grashof.

[5] *Teses esferológicas que, a partir da noção de esfera, estabelecem a definição verdadeira de linha reta e põem as bases firmes de toda a geometria*.

[6] Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800): matemático alemão, escreveu *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* (“Princípios fundamentais de matemática aplicada”, Göttingen, 1780). A primeira seção dessa obra é dedicada a problemas de estática, a começar pelo problema da alavanca.

[7] Petrus Ramus (1515–1572): pensador humanista francês, escreveu manuais de lógica que tiveram grande divulgação nos séculos XVI e XVII.

γέγραπται τῷις καιρῷις καὶ τᾶις ἀκριβειαις;[8] e se levarmos em conta como cada sucessiva proposição, na demonstração que Euclides lhes oferece, requer necessariamente aquelas que a antecedem, então chegamos bem a pensar que a razão para tal desordem deve ser mais profunda, e que todo o método de demonstração utilizado por Euclides não deve estar correto.

As presentes páginas têm por objetivo, assim, oferecer uma contribuição para eliminar da matemática, não apenas as deficiências contra as quais atualmente se costuma reclamar, mas também algumas outras, cuja presença só poderá ser demonstrada no que segue. Seria natural que alguém me perguntasse: como cheguei a esse ponto? Muito honestamente, gostaria de acrescentar aqui aquilo que, nesse sentido, sei dizer a meu favor e contra mim.

Já faz cerca de quinze anos – pois não é há mais tempo que eu sei matemática – que essa ciência é um de meus estudos mais queridos; sobretudo em vista de seu aspecto especulativo, como ramo da filosofia e como meio de exercitar o correto pensamento. Já desde os primeiros contatos com a mesma, propiciados pelo excelente manual de Kästner,[9] chamaram-me a atenção uma ou outra falha, cuja superação ocupou minhas horas ociosas, sinceramente não por vaidade, mas pelo interesse intrínseco que encontrava em tais especulações. Quanto mais eu meditava, mais crescia o número de deficiências que acreditava descobrir. E embora aos poucos conseguisse superar algumas, não confiava imediatamente na solução encontrada, por medo de incorrer eu mesmo em erros, e porque amava mais a verdade do que o prazer de uma pretensa descoberta. Somente quando checava minha opinião por todos os lados, e por todos os lados a via confirmada, adquiria mais confiança nela. Ao mesmo tempo, tanto quanto permitiam meus outros estudos e, há cinco anos, minha atividade docente e demais circunstâncias, eu também consultava aqueles livros escritos com o propósito de aperfeiçoar o sistema científico da matemática. Aí encontrei apresentado algo daquilo a que havia sido conduzido por minha própria reflexão; muitas outras coisas, ao contrário, não achei em lugar nenhum. No entanto, como não podia obter um conhecimento completo da literatura matemática, era sempre possível que alguma coisa que eu tomava por nova já houvesse sido dita em algum lugar: isso, porém, certamente não será o caso a respeito de tudo.

Além disso, eu não desconheço, absolutamente, o fato de que é uma empreitada ousada querer alterar ou melhorar alguma coisa nos fundamentos primeiros da matemática. “Todos aqueles que desejaram superar Euclides”, diz Kästner em algum lugar, com acuidade histórica, “trouxeram sobre si mesmo, até hoje, apenas vergonha”. Será que também a mim não aguardará destino semelhante, ainda mais porque bem ali, onde deveria ter a verdade a meu lado, preconceitos e teimosia serão arrojados contra mim? Contudo, do fracasso de muitas tentativas não se segue, está claro, que todas as demais devam fracassar; e o caminho que eu escolhi, além do mais, é diferente de todos os caminhos tentados até hoje. Considero, portanto, como minha obrigação oferecê-lo ao julgamento dos especialistas.

---

[8] Sentença final de uma carta escrita por Isócrates a Filipe da Macedônia: “(...) quão bem foi composto este discurso no que diz respeito à adequação e à precisão”.

[9] Ver nota 6 acima.

Embora eu já tenha publicado, no ano de 1804, sob o título de *Considerações acerca de Alguns Objetos da Geometria Elementar*, uma pequena amostra das mudanças que proponho, a verdade é que o escopo limitado daquele escrito, seu título pouco informativo, o estilo excessivamente lacônico, a falta de renome do autor, bem como diversas outras circunstâncias, nada era propício a atrair atenção sobre ele. Não houve assim nenhuma reação, a não ser pela referência ao escrito em alguns jornais eruditos (por exemplo, no jornal de Leipzig, ano 1805, julho, pág. 95; no jornal de Jena, 1806, fevereiro, n. 29), sem que ninguém tenha apontado erros evidentes na teoria das paralelas ali apresentada. Por outro lado, é imediatamente compreensível que desde aquela época eu tenha revisto algo dos meus conceitos, e que acredite agora expor muitas coisas de modo melhor e mais correto do que antes havia feito. Nestas *Contribuições*, portanto – que deverão aparecer em fascículos tão pequenos quanto o presente, a intervalos indeterminados, e cujo número total eu tampouco posso estabelecer de antemão –, pretendo percorrer uma por uma as disciplinas *a priori* da matemática, segundo a ordem em que são apresentadas na presente parte I, §20. As mudanças mais numerosas e significativas dizem respeito à geometria, para cuja exposição desejo apressar-me tanto quanto possível, de modo que o juízo dos especialistas possa reforçar-me em meus pontos de vista ou esclarecer meus equívocos, e evitar que eu perca mais tempo em tais descaminhos.

— ἀλλ᾽ εἴ τίς μοι ἀνὴρ ἅμ᾽ ἕποιτο καὶ ἄλλος
μᾶλλον θαλπωρὴ καὶ θαρσαλεώτερον ἔσται.
— μοῦνος δ᾽ εἴ πέρ τε νοήσῃ
ἀλλά τέ οἱ βράσσων τε νόος, λεπτὴ δέ τε μῆτις.
(Ilíada, X, 222) [10]

I. Do Conceito de Matemática e suas Subdivisões

§1

O mais antigo e certamente ainda não superado manual de matemática, os *Elementos* de Euclides, não contém, como se sabe, nenhuma definição a respeito da ciência de que trata. Se seu imortal autor fez isso por uma espécie de idiossincrasia, ou por não considerar o tema digno de esforço, ou por não saber fornecer-nos uma definição realmente válida: a esse respeito não ouso decidir. Ao contrário, todos os modernos manuais de matemática apresentam a seguinte definição: "A matemática é a ciência das grandezas".[11]

[10] Abaixo indicamos a passagem completa, em tradução de Frederico Lourenço, com os versos omitidos entre colchetes:

"*(...). Porém se outro homem comigo viesse,*
maior seria o apoio e também a audácia.
[Quando dois se põem a caminho, um discerne antes do outro
o que é mais proveitoso]; ao passo que quando é só um
a discernir, curto é o pensamento e tênue a astúcia."

[11] Em alemão, *Wissenschaft der Größen*. A dificuldade, como será comentado pelo próprio Bolzano logo à frente, está no entendimento do termo "Größe". São de grande valia, aqui, algumas breves considerações históricas.

Tal definição já foi criticada por Kant em sua *Crítica da Razão Pura* (cf. segunda edição, pág. 742), pois por meio dela, segundo Kant, "não é dada nenhuma característica essencial da matemática, além de ser tomado o efeito pela causa".

§2

Tudo depende aqui, como se percebe, do que cada um entende pela palavra grandeza. Assim, o autor do livro *Versuch das Studium der Mathematik durch Erläuterung einiger Grundbegriffe und durch zweckmässigere Methoden zu erleichtern* ("Tentativa de facilitar o estudo da matemática por meio da explicação de alguns conceitos fundamentais e por meio de métodos mais adequados")[12] – Bamberg e Würzburg, 1805 (pág. 4) – oferece a seguinte definição de grandeza: "Uma grandeza é algo que existe e que pode ser percebido por meio de algum sentido". Essa definição será necessariamente, ou muito ampla, ou muito restrita. Isso depende de se o autor toma as expressões "existe" e "pode ser percebido" [13] no seu sentido amplo, em que elas significam uma existência meramente ideal e uma possibilidade de ser pensado, ou no sentido mais restrito, no qual valem somente de um objeto sensível, realmente existente. No primeiro caso, grandeza seria qualquer coisa pensável, sem exceção; e ao definir a matemática como ciência das grandezas, estaríamos de fato colocando todas as ciências dentro dessa única. No segundo caso, ao contrário, somente objetos sensíveis seriam grandezas, e o domínio da matemática ficaria, é claro, excessivamente restringido, na medida em que também as coisas suprassensíveis, como por exemplo os espíritos e as forças espirituais, podem ser objetos da matemática, particularmente da aritmética.

§3

Essa definição de grandeza (§2), com efeito, é completamente contrária ao uso linguístico, quer seja interpretada de uma ou de outra maneira. Eu só a mencionei para mostrar, no que segue, que já esse autor vislumbra, ainda que apenas obscuramente, certa

---

O termo "Größe" é aquele termo mais abrangente que, a partir da idade moderna, passou a designar o "assunto" comum aos dois principais ramos da matemática: geometria e aritmética. A esse respeito, diz H. Mehrtens:

> "(...) *A matemática era, segundo a definição mais comum, 'ciência das grandezas'. Esse é o conceito indeterminado; pode se tratar de um número, o qual se pode associar a uma extensão; de uma extensão, cuja medida pode ser dada por um número; ou de qualquer outra coisa passível de medição.* (...) *O conceito de grandeza marca o entrelaçamento de operações simbólicas lógico-algébricas com o esquema de algo representável na intuição, com o qual se opera.*" (Mehrtens, 1990: págs. 42–3).

Adotamos aqui a tradução mais usual para "Größe", como "grandeza". Em português, ele é mais facilmente associado a entidades geométricas ("algo representável na intuição"). No entanto, na língua alemã transita-se com maior facilidade para o significado aritmético, como "quantidade" (vale dizer, "quantidade de coisas contáveis", "quantidade ou conjunto de unidades"). É justamente essa tensão que estará presente na discussão proposta por Bolzano, que privilegia, na tentativa de explicar o que se deve entender por "Größe", essa interpretação aritmética, em detrimento da intenção mais ampla das definições então usuais.

[12] O autor da obra em questão é Franz von Spaun (1753–1826), matemático e polímata austríaco. Além de diversos tratados matemáticos, escreveu também obras acerca de temas jurídicos, políticos e filosóficos.

[13] No original, as duas palavras não vêm entre aspas, recurso que ainda não era comum. (Para ajudar o leitor, Bolzano usa dois pontos antes da primeira expressão.) Para facilidade de leitura, adotamos o modo de escrever mais familiar ao leitor atual.

idéia que me parece correta. Se não desejamos nos afastar muito do uso lingüístico (coisa que, mesmo na ciência, não deveríamos fazer sem necessidade), então precisamos entender por grandeza um todo, na medida em que esse todo consiste de muitas partes iguais, ou de maneira ainda mais geral, algo que pode ser determinado por meio de contagem.[14] Contudo, caso seja pressuposto esse significado para a palavra grandeza, a definição usual da matemática como ciência das grandezas revela-se francamente deficiente, vale dizer, demasiado restrita. Pois a grandeza é considerada isoladamente e em abstrato apenas na *Mathesis*[15] pura geral, ou seja, na logística[16] ou na aritmética, mas não esgota nem mesmo o conteúdo dessas ciências. Nesse sentido, em diversos problemas da teoria das combinações (essa parte tão importante da *Mathesis* geral), o conceito de grandeza ou de número não aparece nenhuma vez, por exemplo, quando alguém propõe a pergunta: quais – (não quantas) – recombinações permitem os objetos a, b, c...? Nos ramos específicos da matemática, cronometria, geometria e outros, aparecem por toda parte, como já indicam seus nomes, ao lado do conceito de grandeza, algum outro objeto ainda (por exemplo: o tempo, o espaço, e assim por diante), sobre o qual o primeiro é, frequentemente, meramente aplicado; de modo que em todas essas disciplinas existem muitos postulados e teoremas nos quais o conceito de grandeza não está nem sequer contido. Assim, na cronometria e na geometria, respectivamente, a proposição segundo a qual todos os instantes são iguais uns aos outros, e todos os pontos são iguais uns aos outros, precisam ser ambas admitidas – proposições nas quais o conceito de grandeza ou de número não está de modo algum contido. Segue daí que tais proposições não deveriam tomar parte na matemática, se esta fosse meramente uma ciência das grandezas.

§4

No entanto, fácil como foi criticar e descartar as definições usuais, não deverá ser colocar uma melhor em seu lugar. Já observamos antes que aqueles objetos específicos que, nos ramos individuais da matemática, aparecem ao lado do conceito de grandeza possuem características tais que esse último pode ser facilmente aplicado a eles. Isso talvez nos conduzisse à idéia de definir a matemática como a ciência daqueles objetos sobre os quais o conceito de grandeza é particularmente aplicável. De fato, parece que mesmo as pessoas que aceitam a explicação introduzida em §1, na verdade, não desejariam compreendê-la de outra maneira. Somente um exame mais rigoroso mostra que também essa definição é inadequada. O conceito de grandeza é aplicável, com efeito, a absolutamente todos os objetos, até mesmo às coisas do pensamento. Quem quiser, portanto, considerar a simples aplicabilidade do conceito de grandeza a um objeto como razão suficiente para incluir a teoria desse objeto entre as disciplinas matemáticas, deverá contar todas as ciências como pertencentes à matemática. Por exemplo, também aquela ciência na qual se demonstra a proposição: existem apenas quatro (ou, como ensina corretamente Platner,[17] apenas duas)

[14] Ver nota 11 acima.

[15] Bolzano usa frequentemente o termo latino "*Mathesis*" para "Matemática".

[16] O termo é aqui utilizado, não no sentido que veio a ganhar no século XX, associado ao projeto de redução da matemática à lógica formal, mas no sentido grego (λογιστική), em que indica o estudo das operações feitas com números (ἀριθμός).

[17] Ernst Platner (1744–1818): médico, antropólogo e filósofo alemão.

figuras silogísticas; igualmente aquela ciência que ensina: não existem nem mais nem menos do que quatro vezes três conceitos simples puros do entendimento (categorias);[18] e assim por diante. Seria necessário então, para salvar essa definição, traçar uma distinção entre aplicabilidade mais ou menos frequente, ou seja, contar como pertencente à matemática somente aqueles objetos sobre os quais o conceito de grandeza se deixasse aplicar de maneira frequente e reiterada. Mas quem não vê que isso resultaria em uma delimitação altamente capenga e nada científica do campo da matemática? Devemos, portanto, buscar uma definição melhor.

§5

A filosofia crítica parece prometer tal definição. Ela acredita ter descoberto, entre as duas classes principais de conhecimento humano *a priori*, o filosófico e o matemático, certa diferença específica e característica no fato de que o conhecimento matemático representa – ou antes constrói – adequadamente todos os seus conceitos em uma intuição pura, e justamente por isso é também capaz de demonstrar seus teoremas. O conhecimento filosófico, ao contrário, carente de toda intuição, necessita contentar-se com conceitos meramente discursivos. Desse modo, a essência da matemática ficaria expressa, no que tem de mais típico, pela seguinte definição: trata-se de uma ciência racional a partir da construção de conceitos (I. Kant, *Crítica da Razão Pura*, pág.712). Essa definição, de fato, foi aceita por muitos matemáticos adeptos da filosofia crítica, entre outros por Schulz[19] – tão renomado no tema da fundamentação da matemática pura – em seu *Anfangsgründen der reinen Mathesis* ("Princípios primeiros da Matemática pura") – Königsberg, 1791.

§6

Eu, de minha parte, gostaria apenas de reconhecer, com o coração aberto, que até o presente momento não consegui me convencer, não só a respeito da verdade de muitos outros ensinamentos da filosofia crítica, mas particularmente também a respeito da correção das afirmações kantianas acerca da intuição pura e da construção de conceitos por meio dela. Não deixo de acreditar que já no conceito de uma intuição pura (isto é, *a priori*) resida uma contradição interna; e muito menos consigo me convencer de que o conceito de número deva ser necessariamente construído no tempo e, nesse sentido, de que a intuição do tempo pertença realmente à aritmética. Considerando que no apêndice a este ensaio direi mais acerca do assunto, contento-me em acrescentar, aqui, que existem na Alemanha algumas e até mesmo muitas cabeças pensantes que, em relação a essas afirmações de Kant, discordam tanto quanto eu. Incluindo algumas que, de início, inclinaram-se à definição kantiana, mas que depois sentiram-se forçadas a abandoná-la. A esse grupo pertence, por

---

[18] Referência à teoria kantiana das categorias, tal como exposta na *Crítica da Razão Pura*. Nessa obra, as categorias são tema de demonstração e aparecem em número de 12, agrupadas da seguinte maneira: categorias de quantidade (unidade, pluralidade e totalidade); categorias de qualidade (realidade, negação e limitação); categorias de relação (substância, causalidade e ação recíproca); categorias de modalidade (possibilidade, existência e necessidade).

[19] Johann Friedrich Schulz (1739–1805): lecionou matemática em Königsberg e foi um dos primeiros divulgadores da filosofia crítica. Era amigo pessoal de Kant, que considerava o seu *Erläuterungen über des Herr Immanuel Kants Critik der reinen Vernunft* (Esclarecimentos acerca da Crítica da Razão Pura, do senhor Immanuel Kant), publicado em 1784, a melhor exposição até então escrita da *Crítica da Razão Pura*.

exemplo, o senhor Michelsen,[20] em seu *Beiträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik* ("Contribuições à promoção do estudo da matemática") – Berlim, 1790.

§7

Para mim, no entanto, mais instrutivo do que aquilo que o senhor Michelsen diz nesse ensaio, foi o que encontrei no *Leipziger Literaturzeitung* ("Jornal de literatura de Leipzig") – julho de 1808, pág. 81. O erudito resenhista critica a definição usual da matemática como ciência das grandezas, e acrescenta: "A grandeza somente é objeto da matemática porque é a forma mais geral de se ser finito. A matemática, porém, segundo sua natureza, é uma teoria geral das formas: é aritmética, na medida em que considera a grandeza como forma geral das coisas finitas; geometria, na medida em que considera o espaço como forma geral da natureza; teoria do tempo, na medida em que considera a forma geral da força; teoria do movimento, na medida em que considera a forma geral das forças que agem no espaço". – Não sei se compreendo essas explicações exatamente no sentido desejado por seu autor. Este tanto, contudo, devo reconhecer: elas me ajudaram a estruturar e a desenvolver a definição e as subdivisões da matemática pura que apresentarei a seguir, e que eu já havia elaborado antes em suas linhas principais.

§8

Penso, portanto, que se pode definir a matemática da melhor maneira como uma ciência que trata das leis (formas) gerais pelas quais se devem regular as coisas em sua existência. Por meio da palavra coisas desejo compreender não somente aquelas que possuem um ser objetivo, independente da nossa consciência, mas também aquelas que existem meramente em nossa representação, e essas, por sua vez, tanto na condição de indivíduos (ou seja, intuições) como na de conceitos gerais. Em uma palavra: tudo o que de qualquer maneira puder ser objeto de nossa faculdade de representação. Se digo ainda que a matemática trata das leis pelas quais se regulam essas coisas em sua existência, então quero indicar com isso que nossa ciência não se preocupa com a demonstração da existência dessas coisas, mas tão-somente com as condições de sua possibilidade. E ao dizer que essas leis são gerais, dou a entender que nunca ligo a matemática a uma única coisa como indivíduo, mas sempre a conjuntos de coisas de certo gênero. Tais gêneros podem ser mais elevados ou mais baixos; e é nisso justamente que irá se basear a subdivisão da matemática em disciplinas individuais.

§9

Ninguém achará a definição aqui fornecida excessivamente restrita, pois ela abrange claramente tudo o que até hoje sempre se computou como pertencente ao domínio da matemática. Antes, temo que ela seja considerada um tanto ampla demais, e que a acusem de deixar muito pouco à filosofia (metafísica). De fato, essa ficará limitada, segundo minha definição, à única e exclusiva tarefa de demonstrar a existência real de certos objetos a partir de conceitos *a priori*. Matemática e metafísica, os dois ramos principais de nosso conhecimento *a priori*, estariam postas uma em relação à outra, de

[20] Johann Andreas Christian Michelsen (1749–1797): matemático e pedagogo alemão.

acordo com essa definição, de tal forma que a primeira examinasse as condições gerais sob as quais se torna possível a existência das coisas; e a segunda, ao contrário, tentasse demonstrar *a priori* a realidade de certos objetos (como, por exemplo, a liberdade, Deus e a imortalidade da alma). Em outras palavras, aquela lidaria com a pergunta: de que modo as coisas precisam ser, para que sejam possíveis? Esta proporia a pergunta: quais coisas são reais e, ainda por cima (pois deve fornecer uma resposta *a priori*), necessariamente reais? Ou de maneira ainda mais curta: a matemática trataria da necessidade hipotética,[*] a metafísica da necessidade absoluta.

§10

Quando deparo com qualquer pensamento até então novo para mim, sempre costumo colocar-me a questão, "ninguém antes de mim teve a mesma idéia?". Se descubro que sim, é claro que minha convicção aumenta. No que diz respeito à definição acima, não preciso nem observar o quanto se aproxima de minha exposição aquilo que disse o agudo resenhista (§7), ainda que ambas as opiniões não venham a ser completamente a mesma. Mas também o autor do livro (§2) parece ter vislumbrado essa ideia, embora apenas de maneira obscura. Pois quando define a grandeza, ou o objeto da matemática, como aquilo que existe, ele bem parece ter sentido que a matemática trata de todas as formas das coisas, e não meramente da sua possibilidade de serem compostas de partes iguais (sua possibilidade de serem contadas). Kant define a ciência natural pura (a qual, sob o nome de mecânica, sempre foi considerada como parte da matemática) como uma ciência das leis a que se submete a existência das coisas (dos fenômenos). Por meio dessa definição pode-se facilmente chegar àquela que demos acima. De fato, tempo e espaço são, ambos, duas condições a que se submete a existência das coisas sensíveis. Assim, a cronometria e a geometria, que consideram em abstrato as propriedades dessas duas formas, tratam igualmente, ainda que de modo indireto, das leis a que se submete a existência das coisas (especificamente, das coisas sensíveis). A aritmética, finalmente, que trata das leis daquilo que é contável, elabora por isso mesmo as leis absolutamente mais gerais pelas quais se devem regular as coisas em sua existência, até mesmo em sua existência ideal.

§11

Tentemos agora derivar, dessa definição para a matemática, uma subdivisão lógica dessa ciência em diversas disciplinas individuais. Caso a subdivisão resulte bem-sucedida e absolutamente natural, deveríamos ver aí mais uma confirmação da validade da nossa definição. De acordo com ela, a matemática seria uma ciência das leis pelas quais se devem regular as coisas em sua existência. Essas leis, por sua vez, ou são tão gerais que se aplicam a todas as coisas sem exceção, ou não. As primeiras, portanto, postas em conjunto e cientificamente ordenadas, formarão, entre as partes principais da matemática, o ramo inaugural, a que se pode chamar de *Mathesis* geral; todo o resto, então, será *Mathesis* especial.

[*] Nota do autor: Muito embora nem todas as proposições da matemática possuam essa forma hipotética, pois as condições, principalmente na cronometria e na geometria, quando permanecem as mesmas para todas as proposições, são assumidas de modo implícito.

OBSERVAÇÃO: À *Mathesis* geral pertencem, como veremos abaixo, a aritmética, a teoria das combinações, entre muitas outras. Não se deve, portanto, considerar esse ramo da matemática como coordenado aos demais (cronometria, geometria etc.); estas últimas são antes subordinadas ao conjunto da *Mathesis* geral, como as espécies ao gênero. E justamente porque o conceito de número é um dos conceitos da *Mathesis* geral, ele não é capaz de gerar o conteúdo dos ramos especiais da matemática, embora apareça freqüentemente em todos eles.

§12

Para obter, agora, os ramos especiais da matemática, precisamos repartir as próprias coisas, de cuja forma geral a matemática se ocupa, em certas classes. Mas antes ainda que façamos isso, vale a pena chamar a atenção para determinado conceito do nosso entendimento, que embora não seja (até onde vejo) completamente aplicável a todas as coisas, e por isso não devesse ser tomado como pertencente à *Mathesis* geral no sentido mais estrito, por outro lado deixa-se aplicar a coisas de tipos tão distintos que dificilmente se adequaria a uma subdivisão da matemática em disciplinas individuais. Esse é o conceito da oposição. Não creio que haja, para cada coisa, uma que lhe seja oposta; mas o estar antes e depois no tempo, o situar-se deste e daquele lado no espaço, as forças da mecânica que atuam em direções opostas, as entradas e saídas no livro de contabilidade, o agradável e o desagradável das sensações, o bom e o mau nas decisões do livre-arbítrio, e assim por diante – são perfeitos exemplos de oposição, os quais nos demonstram à satisfação a ampla aplicabilidade desse notável conceito. Ao mesmo tempo, e a partir desses mesmos exemplos, percebemos quão pouco adequado esse conceito seria para fundamentar uma divisão das disciplinas matemáticas entre aquelas em que ele é ou não aplicável. Em sentido contrário, as divisões de fato existentes (que nós também não devemos descartar completamente) são feitas segundo um princípio divisório bastante distinto, embora apenas obscuramente pensado; e incluiu-se em cada uma das disciplinas individuais aquilo que resulta da aplicação do conceito de oposição a seus objetos específicos. Contudo, o mais geral que se pode dizer de todas as coisas passíveis de oposição, sem exceção, merece certamente uma consideração à parte. O tema pode ser apresentado (como, em certa medida, já foi feito) em um apêndice especial à *Mathesis* geral.

§13

Tudo o que podemos pensar como existindo, sempre, devemos pensar em uma de duas opções: ou como necessário, ou como livre (isto é, não necessário) em sua existência.[*] Àquilo que, de algum modo, pensamos como livre, não subjaz, justamente por esse motivo, nenhuma condição ou lei em seu devir (ou existência[**]), e não é, portanto, objeto da matemática.[***] Aquilo que pensamos como necessário em sua existência, ou simplesmente é (ou seja, por si mesmo), ou é condicionado (ou seja, pressupõe alguma outra coisa). Aquilo

[*] Nota do autor: Um exemplo do primeiro tipo é a velocidade de um corpo em movimento; um exemplo do segundo, cada uma das decisões da vontade humana.

[**] Nota do autor: Caso não esteja em devir, mas somente seja, como por exemplo a livre ação da deidade, na medida em que não a pensemos no tempo.

que é por si mesmo necessário chama-se – Deus, e é considerado na metafísica como um objeto não meramente possível, mas real. Resta-nos, assim, apenas o necessário hipotético, o qual pensamos como efeito de uma causa. Existem agora certas condições gerais pelas quais se deve regular, em seu devir ou em sua existência, tudo o que é efetuado por uma causa (esteja ela dentro ou fora do tempo). Essas condições, tomadas em conjunto e cientificamente ordenadas, formarão assim a primeira subdivisão da *Mathesis* especial, e que eu chamo, por falta de um nome melhor, de teoria dos fundamentos ou etiologia.

> Observação: Essa parte da matemática contém os teoremas acerca de causa e efeito, alguns dos quais costumavam ser incluídos na ontologia. Por exemplo, que causas semelhantes têm efeitos semelhantes. O mesmo vale para as proposições normalmente acolhidas sob o nome de cálculo das probabilidades, que eu aqui recordo somente para que não se pense que esse importante ramo da matemática tenha sido por nós completamente ignorado. Além disso, em exposições científicas, a etiologia deve vir à frente da cronometria e da geometria, pois essas duas últimas utilizam certos teoremas da primeira, como veremos mais precisamente no momento adequado.

§14

Tudo aquilo que nós pensamos não apenas como real, mas que, como real, temos de perceber por meio da experiência sensível, é necessário que percebamos no tempo, e também – se, além disso, temos de conhecê-la como coisa exterior a nós – no espaço. Em outras palavras: tempo e espaço são as duas condições às quais precisam se submeter todas as coisas sensíveis, ou seja, todas as coisas que nos devem aparecer como reais. Portanto, se desenvolvermos e ordenarmos cientificamente as propriedades abstratas do tempo e do espaço, a ciência que daí resulta deverá ser contada como pertencente à matemática, pois que também ela trata, ainda que de maneira indireta, das condições pelas quais se devem regular as coisas em sua existência. Temos assim o segundo e o terceiro ramo da *Mathesis* especial, a teoria do tempo (cronometria) e a teoria do espaço (geometria).

> Observação: É por si absolutamente indiferente qual dessas duas ciências colocamos à frente da outra em nosso sistema, na medida em que as propriedades do tempo e do espaço são completamente independentes umas das outras. Não obstante, considerando que o conceito de tempo é aplicável a mais objetos do que o conceito de espaço, parece adequado colocar a cronometria à frente da geometria.

§15

Finalmente, se o tempo e o espaço forem considerados não em abstrato, mas como preenchidos por coisas reais e, mais ainda, por coisas que não sejam livres em sua existência, e sim submetidas às leis de causalidade, então duas novas ciências vêm à luz,

[***] Nota do autor: Mas sim objeto da moral, que investiga a questão: como aquilo que acontece (ou é) livremente, deve acontecer (ou ser).

surgidas da composição entre a ciência mencionada no §14 e aquela do §13. Mais especificamente:

a) As leis gerais a que se submetem, em sua existência, as coisas não-livres que se encontram no tempo compõem o conteúdo de uma ciência própria, a qual chamarei, na ausência de terminologia mais segura, de teoria das causas, ou etiologia crônica.[*]

b) As leis gerais a que se submetem as coisas não-livres que se encontram tanto no tempo como no espaço compõem o conteúdo daquela disciplina matemática chamada de ciência natural pura, ou ainda teoria do movimento, ou mecânica.

OBSERVAÇÃO: Ao campo na etiologia crônica pertencem, por exemplo, as proposições: "Todo efeito é simultâneo à sua causa"; "a medida do efeito, produzido por uma causa constante, comporta-se como o produto da intensidade da causa pelo tempo de sua ação"; e outras assim. Tão gerais são essas proposições, como se vê, que valem não somente para coisas materiais no espaço, mas também para as forças da alma, para nossas representações, e em geral para todas as coisas que aparecem no tempo e que estão submetidas à lei de causalidade. – A ciência natural pura é já bem conhecida.

§16

Fala-se também, freqüentemente, em uma ciência na qual deveriam figurar as leis gerais do movimento possível, sem levar em consideração as forças que produzem o movimento – ou seja, uma ciência em que figurassem os conceitos de tempo, espaço e matéria, mas não o de causa. Hermann,[21] Lambert[22] e Kant chamaram essa ciência de foronomia, e o último considerava-a como parte da ciência natural pura, à qual, contudo, segundo nossa definição, ela não pertenceria. O Sr. E. G. Fischer,[23] em seu *Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, nebst einer idealistischen Übersicht der Mathematik und Naturkunde nach ihrem ganzen Umfang* ("Investigação acerca do verdadeiro sentido da análise superior, incluindo uma visão idealista da matemática e das ciências naturais em todo o seu escopo") – Berlim, 1808 –, também introduz essa disciplina, fazendo-a vir, sob o nome de forometria, logo depois da geometria, como segundo grande ramo da matemática do espaço. No entanto, se não estiverem completamente equivocados meus pontos de vista, que pretendo expor a seguir, uma ciência assim não pode de modo nenhum existir; pois todas as proposições que nela até hoje foram estabelecidas podem na verdade ser demonstradas recorrendo-se exclusivamente ao conceito de causa.

---

[*] Nota do autor: Com efeito, eu diferencio as palavras fundamento [*Grund*] e causa [*Ursache*]. A última significa, para mim, um fundamento que atua do tempo.

[21] É difícil identificar a quem Bolzano está se referindo aqui.

[22] Johann Heinrich Lambert (1728–1777): matemático, físico e astrônomo suíço, foi correspondente de Kant e tem importantes contribuições à filosofia da matemática.

[23] Ernst Gottfried Fischer (1754–1831): químico, físico e matemático alemão.

§17

Costuma-se ainda dividir cada uma das disciplinas matemáticas em elementares e superiores. Não conheço, porém, até hoje, nenhum fundamento verdadeiramente científico para essa divisão. Em que medida um fundamento desse tipo pode se aplicar a uma disciplina específica (por exemplo, à geometria), isso examinaremos de modo mais oportuno ao discutir tal disciplina. Aqui devemos tratar somente de fundamentos para uma divisão que possa estender-se a todo o campo da matemática. É o caso de todos aqueles sugeridos para a *Mathesis* geral. Pois, de fato, divisões feitas segundo tais fundamentos têm também de percorrer, por isso mesmo, todos os ramos especiais da matemática. Em seu *Gedanken über den gegenwärtingen Zustand der Mathematik* ("Reflexões acerca do estado atual da matemática") – Berlim, 1789 –, o sr. Michelsen[24] separa a *Mathesis* elementar da *Mathesis* superior tendo em vista que a primeira teria por objeto grandezas (ou coisas em geral) constantes, ao passo que a segunda teria por objeto grandezas variáveis. Creio não poder aceitar essa divisão já pelo simples motivo de que ela parte, implicitamente, de uma pressuposição, incorporada por muitos até mesmo na definição de matemática, de que o único propósito da matemática seria encontrar certas grandezas, que não foram dadas, a partir de outras grandezas dadas. Se isso fosse correto, então todas as proposições da matemática deveriam possuir a forma de exercícios; postulados, teoremas etc. não poderiam, a rigor, nela aparecer. Contudo, antes que alguém possa perguntar o que se segue de determinadas coisas dadas, precisa primeiramente ter demonstrado, ou assumido como exigência, que essas coisas podem ser dadas, ou seja, que são possíveis. – Divisão completamente diferente nos sugere o Sr. M. em suas já mencionadas *Contribuições* (seção 1, pág. 2, *Ueber der Begriff der Mathematik und ihre Theile*: "Acerca do conceito de matemática e suas divisões"). Aqui ele aceita três áreas principais da *Mathesis* geral: 1) a inferior, que considera as grandezas como formadas por componentes iguais; 2) a superior, em que as grandezas são pensadas como compostas em parte de componentes iguais, em parte de componentes desiguais (teoria da subtração e da adição); 3) a transcendental, na qual os componentes da grandeza são propriamente elementos, ou unidades da grandeza em sentido estrito (cálculo diferencial e integral). – Não sei se compreendo corretamente essa divisão. Parece-me que, no mesmo sentido em que se pode dizer da subtração e da adição que elas consideram suas grandezas como compostas em parte de componentes iguais e em parte de componentes desiguais, pode-se dizer que a aritmética elementar já faz a mesma coisa, por exemplo, quando trata 2 + ½ como um todo. Menos ainda consigo perceber como os diferenciais poderiam ser considerados como unidades da grandeza no sentido estrito da palavra, pois que também a eles é atribuída uma grandeza, ao menos intensiva.

Melhor seria, certamente, contar como pertencentes à *Mathesis* superior somente aqueles procedimentos nos quais aparece o conceito de um infinito (tanto o infinitamente pequeno como o infinitamente grande) ou de um diferencial. Acontece, porém, que esse conceito ainda não está, no presente momento, suficientemente esclarecido. Caso venha a ser decidido que o infinito, ou o diferencial, não é nada mais do que uma expressão simbólica, do mesmo modo que $\sqrt{-1}$ e outras semelhantes; e caso se revele, ao mesmo tempo, que o método de demonstrar o verdadeiro por meio de simples abreviações

[24] Ver nota 18.

simbólicas, embora absolutamente singular, é um método demonstrativo perfeitamente correto e logicamente permissível; então, creio, o mais adequado seria colocar no campo da matemática superior, juntamente com o conceito de infinito, todos aqueles que, como ele, sejam simbólicos. A *Mathesis* elementar seria então aquela que utilizasse, em suas exposições, somente conceitos e expressões absolutamente reais; e a *Mathesis* superior, aquela que utilizasse também conceitos e expressões simbólicas.

§18

Também acerca da divisão da matemática em pura e aplicada temos algo a recordar. A saber: caso se entenda por matemática aplicada, como em geral acontece, o mesmo que empírica, então não podemos reconhecer, para não cair em contradição, nem mesmo a existência de tal ciência, pois toda a matemática, em nossa definição, pertence às ciências puras *a priori*. Mas nem por isso é necessário temer que nós, assim fazendo, venhamos a perder uma parte considerável das disciplinas matemáticas. A história da matemática mostra que quanto mais o tempo passa, mais aquilo que, no começo, tomava-se meramente da experiência, depois passou a ser derivado de conceitos, de modo que se aprendeu a tratá-lo como parte da *Mathesis* pura a *priori*. Somente isso já deveria constituir razão suficiente para não permitir nenhuma distinção, do ponto de vista científico, entre matemática pura e empírica. Pois será que, do fato de não sabermos derivar *a priori*, por exemplo, a existência de uma força de atração, bem como a lei segundo a qual ela atua na razão inversa do quadrado da distância, segue-se já que as futuras gerações nunca saberão fazê-lo, e que tal força simplesmente não é derivável *a priori*? Mas há mais: aquilo que, nos assim chamados ramos aplicados da matemática, é tomado da experiência, na realidade não torna essas disciplinas empíricas. Isso porque a matemática absolutamente não lida com aquilo que de fato acontece, mas sim com as condições ou formas que algo precisa ter, caso venha a acontecer. Assim, basta apresentar de modo meramente hipotético aquelas proposições que relatam a experiência, e então derivar, por meio de raciocínios *a priori*, por um lado a possibilidade dessas hipóteses, por outro lado as consequências que dela seguem. Desse modo não aparece, na exposição como um todo, nenhum juízo empírico; a ciência, portanto, é *a priori*. Na exposição da ótica, por exemplo, não é minimamente necessário tomar emprestada da experiência a lei segundo a qual a luz, ao passar do ar para o vidro, refrata na proporção de 3:2; e outras semelhantes. Ao contrário, basta tornar compreensível a mera possibilidade de uma matéria como a luz[25] e de sua refração ao passar por diferentes meios, para então construir a exposição na forma hipotética: “se houver uma matéria, a qual etc.; então devem seguir-se daí tais e tais consequências”. Essa possibilidade, no entanto, não pode nunca ser difícil de provar, pois tudo aquilo que, na experiência, deva ser perceptível como real, já de antemão precisa ser reconhecido como possível.

§19

Na medida em que se deseje entender, por matemática aplicada, uma matemática que se baseie, essencialmente, em proposições extraídas da experiência, então eu não creio que estaria disposto a admitir sua existência. Mas pode-se também entender sob o nome de

[25] Bolzano move-se no quadro da ótica newtoniana, que assumia o caráter corpuscular da luz (ou seja, tratava a luz como composta de partículas).

matemática aplicada algo bem diferente, algo a que eu preferiria chamar de matemática prática ou, de modo ainda mais específico, com uma terminologia emprestada da filosofia crítica, de matemática técnica. Essa consiste em uma exposição das disciplinas matemáticas especialmente voltada para a utilização proveitosa na vida burguesa. Uma exposição desse tipo diferencia-se da exposição científica pura de modo bem claro, devido à diferença de objetivos: na última, o objetivo é a maior perfeição possível da forma científica, e por meio desta o melhor treino possível para o correto pensar – o objetivo da primeira, ao contrário, é a aplicabilidade imediata às necessidades da vida. Segue-se daí, além disso, que na exposição prática todos os pontos de vista excessivamente gerais, que não sejam diretamente necessários à aplicação, são deixados de fora, ao passo que os mais diversos exemplos e relações com casos concretos são compilados. Os autores não se dão ao trabalho de introduzir esses casos concretos como simples possibilidades (como deveria acontecer em uma exposição científica pura), mas os oferecem como fatos reais provados diretamente por meio da experiência. Finalmente, eu nem precisaria dizer que a maioria dos manuais de matemática disponíveis baseiam-se em certo método misto, que propõe unir os dois objetivos, o científico puro e o prático; e acrescento que não desejaria considerar tais manuais, no geral, como equivocados. Um manual realmente adequado, elaborado segundo o método misto, seria uma obra ainda mais valiosa, com efeito, do que uma simples exposição científica. Só que eu penso que algo assim não pode vir à luz antes que se tenha completado o sistema puramente científico. A quem trabalha no aperfeiçoamento desse sistema pode-se permitir, então, que deixe totalmente de lado o segundo objetivo, e dirija sua atenção somente ao primeiro, à perfeição científica.

§20

Resulta de tudo isso, segundo creio, que uma matemática cientificamente ordenada possui somente aqueles ramos indicados nos parágrafos §11-15. A seguinte tabela apresenta, de modo conveniente, uma visão geral. As palavras entre parênteses indicam o objeto de cada disciplina.

A.
Mathesis geral
(coisas em geral)

B.
Disciplinas matemáticas específicas
(coisas específicas)

I.
Etiologia
(coisas não-livres)

II.
(coisas não-livres sensíveis)

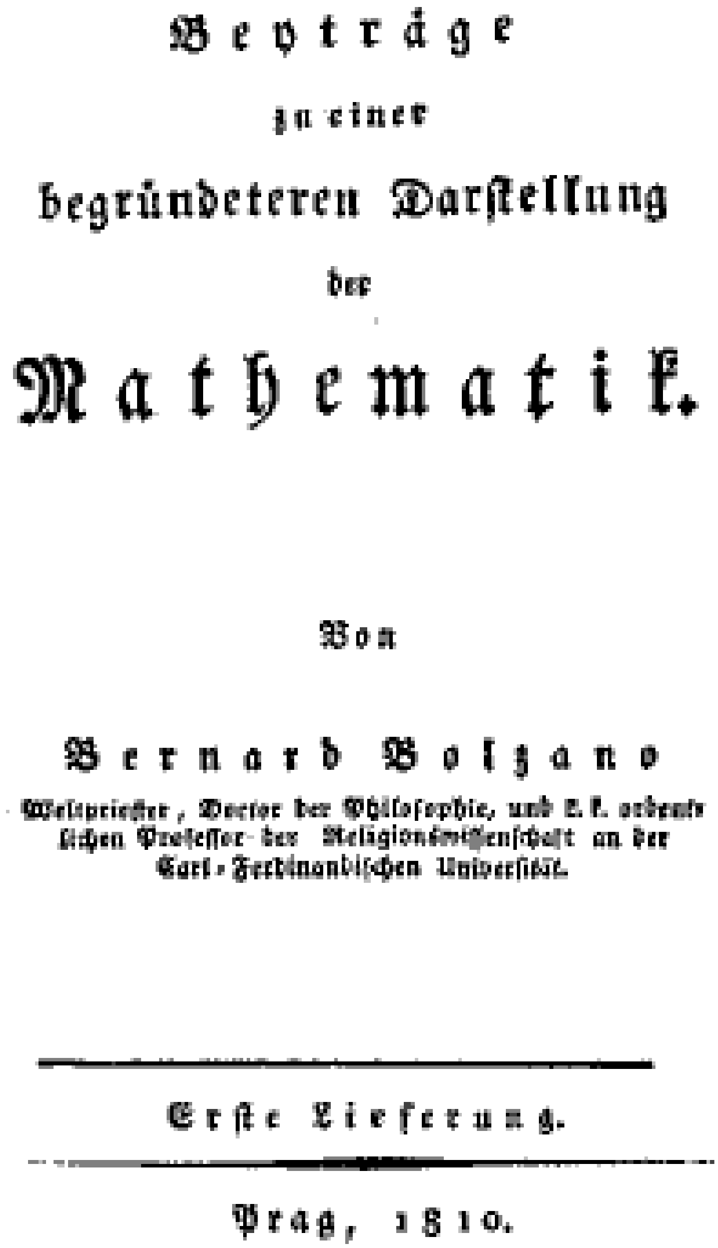
a.
(forma dessas coisas em abstrato)

ㅅ.	ㅇ.
Teoria do tempo	Teoria do espaço
(tempo)	(espaço)

b.
(coisas sensíveis em concreto)

α.	β.
Etiologia crônica	Ciência natural pura
(coisas sensíveis no tempo)	(coisas sensíveis no tempo e no espaço)

4. Texto original



Beyträge
zu einer
begründeteren Darstellung
der
Mathematik.

Von

Bernard Bolzano
Weltpriester, Doctor der Philosophie, und k. k. ordentlichen Professor der Religionswissenschaft an der Carl-Ferdinandischen Universität.

Erste Lieferung.

Prag, 1810.

Multum adhuc restat operis, multumque restabit: nec ulli nato post mille saecula praecludetur occasio aliquid adhuc adjiciendi. — Multum egerunt, qui ante nos fuerunt, sed non peregerunt: suspiciendi tamen sunt, et ritu Deorum colendi. Senec. Epist. 64.

Vorrede.

Daß unter allen Wissenschaften die Mathematik dem Ideale der Vollkommenheit noch am nächsten stehe, muß jeder unbefangene Beurtheiler gestehen. In dem gemeinsten Lehrbuche der Mathematik herrscht wirklich mehr Bestimmtheit und Klarheit der Begriffe, mehr Sicherheit und Uiberzeugung in den Urtheilen, als noch zur Stunde in dem vollendetesten Lehrbuche der Metaphysik

* an-

angetroffen wird. Aber so unläugbar das ist, so sollte andrerseits doch auch der Mathematiker nie vergessen, es gelte auch von seiner Wissenschaft, was dort geschrieben steht von allem menschlichen Wissen, „daß es nur Stückwerk sey.“ Jedoch die größten Kenner dieser Wissenschaft haben in der That von jeher eingestanden, nicht nur, daß das Gebäude ihrer Wissenschaft noch kein ganz ausgebautes und in sich selbst beschlossenes Gebäude sey; sondern auch, daß selbst die ersten Grundmauern dieses im Uibrigen so prachtvollen Gebäudes noch nicht ganz fest und regelmäßig seyen; oder, um ohne Bild zu reden, daß sich selbst in den ersten Elementarlehren aller mathematischen Disciplinen noch manche Lücken und Unvollkommenheiten finden.

Um dieses Urtheil hier nur mit einigen Beweisen zu belegen; haben es nicht

nicht die größten Mathematiker neuerer Zeit erkannt, daß in der Arithmetik die Lehre von den entgegengesetzten Größen, sammt allem dem, was von ihr abhängt, noch nicht im Reinen sey? findet man nicht beynahe in jedem Lehrbuche der Arithmetik eine veränderte Darstellung dieser Lehre? — Noch schwankender, und zum Theile mit wechselseitigen Widersprüchen erfüllt, ist das Capitel von den irrationalen und imaginären Größen. Von den Mängeln, welche die höhere Algebra, die Differential- und Integralrechnung hat, will ich hier nichts erwähnen; es ist bekannt, daß man nicht einmahl über den Begriff eines Differentials bis jetzo einverstanden ist; und erst am Schlusse des vorigen Jahres hat die Fürstlich-Jablonovskische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig die Aus-

ein-

VI

einanderſetzung der verſchiede-
nen Theorieen des Infiniteſi-
malcalculs, und die Entſchei-
dung, welche derſelben den
Vorzug verdiene, zur Preisfrage
aufgegeben.

Nichts deſto weniger iſt die Arithme-
tik, meinem Bedünken nach, noch der bey
weitem vollkommnere Theil der mathema-
tiſchen Disciplinen; viel wichtigere und
ſchwerer zu behebende Mängel aber hat
die Geometrie. Hier mangelt es zur
Stunde noch an einer beſtimmten Erklä-
rung der wichtigen Begriffe: Linie,
Fläche, Körper. Nicht einmahl
über die Erklärung der geraden Li-
nie (welche vielleicht vor dem Begriff
einer Linie überhaupt gegeben wer-
den könnte) hat man ſich noch vereini-
gen können. Vor einigen Jahren hat
uns Hr. Grashof (Theses sphaereo-
lo-

logicae, quae ex sphaerae notione veram rectae lineae sistunt definitionem, omnisque geometriae firmum jaciunt firmamentum. Berol. 1806.) mit einer ganz neuen Erklärung beschenkt, die jedoch schwerlich befriedigen dürfte. Der auffallendste Mangel aber, mit dessen Verbesserung man sich, so viel wir nahmentlich wissen, seit Proklus Zeiten schon, höchst wahrscheinlicher Weise aber schon lange vor Euklid beschäftiget hat, betrifft die Theorie der Parallelen. Allein so viele Versuche man auch bisher gemacht hat, so ist doch keiner so gelungen, daß er sich eines allgemeinen Beyfalles zu erfreuen hätte.

In der Mechanik sind die Begriffe von Geschwindigkeit und Kraft beynahe ein eben solcher Stein des Anstoßes, wie der Begriff der geraden Linie in der Geometrie. Auch hat man es sich längst eingestanden, daß die

zwey

VIII

zwey wichtigsten Lehrsätze dieser Wissen-
schaft, nähmlich der von dem Kräf-
ten-Parallelogramme, und jener
vom Hebel noch nicht mit Schärfe er-
wiesen seyen. Aus diesem Grunde mach-
te die königliche Gesellschaft
der Wissenschaften zu Koppen-
hagen noch im J. 1807 eine be-
gründetere Theorie des Kräften-
Parallelogramms zu einer Preis-
aufgabe. Da ich die Abhandlung des
Herrn Prof. de Mello, welche den
Preis erhalten hat, noch nicht zu Gesicht
bekommen habe, so kann ich nicht ver-
sichern, ob der Versuch, welchen ich in
diesen Blättern zu geben gedenke, et-
was Neues seyn werde. Was die Lehre
vom Hebel betrifft, so meinet man frey-
lich, der Kästnerische Beweis hebe
hier alle Schwierigkeiten; aber ich glau-
be noch in der gegenwärtigen Abhandlung
das Gegentheil zu zeigen.

An

An allen Theilen der Mathematik endlich, vornähmlich aber an der Geometrie, hat man den Mangel der Ordnung seit Ramus Zeiten schon gerügt. Und in der That, von was für ungleichartigen Gegenständen handeln nicht die einzelnen Lehrsätze im Euklides? Erstlich von Dreyecken, doch so, daß hier schon Kreise, die in gewissen Puncten sich schneiden, mitgenommen werden; darauf von Winkeln, von Neben- und Scheitelwinkeln; dann von der Gleichheit der Dreyecke; viel später erst von ihrer Aehnlichkeit, welche jedoch durch einen ungeheuern Umweg erst aus Betrachtung der Parallellinien, sogar des Flächeninhaltes der Dreyecke, u. s. w. hergeleitet wird! — Bedenket man aber, ταυθ' ὅπως γέγραπται τοῖς καιροῖς καὶ ταῖς ἀκριβείαις; erwäget man, wie jeder folgende Satz bey dem Beweise, wo-

womit Euklides ihn versieht, der ihm vorher gehenden ganz nothwendig bedarf: so sollte man wohl auf den Gedanken gerathen, der Grund jener Unordnung müsse tiefer liegen, die ganze Beweisart, die Euklides braucht, müsse nicht richtig seyn.

Die gegenwärtigen Blätter haben nun den Zweck, einige Beyträge zur Behebung nicht nur der jetzt gerügten, sondern auch einiger anderer Mängel der Mathematik zu liefern, deren Vorhandenseyn erst in der Folge bewiesen werden kann. Billig wird man mich fragen, wie ich hiezu berufen sey? Ich will ganz aufrichtig, was ich in dieser Rücksicht für oder wider mich zu sagen weiß, hier anführen.

Seit etwa fünfzehn Jahren — denn länger ist es nicht, daß ich die Mathe-

ma-

matik kenne — ist diese Wissenschaft immer eines von meinen Lieblingsstudien gewesen; doch vornåhmlich nur nach ihrem speculativen Theile, als Zweig der Philosophie und Uibungsmittel im richtigen Denken. Gleich bey der ersten Bekanntwerdung mit derselben, welche nach Kästners vortrefflichem Lehrbuche geschah, stießen mir ein und der andere Mangel auf, mit dessen Behebung ich mich, wahrlich aus keiner Eitelkeit, sondern aus einem inneren Interesse, das ich an solchen Speculationen fand, in meinen Nebenstunden beschåftigte. Bey långerm Nachdenken vermehrte sich noch die Anzahl der Mångel, die ich entdeckt zu haben glaubte. Zwar gelang es mir allmåhlig, einen und den andern derselben zu heben; allein ich traute der Auflösung aus Furcht, mich selbst zu tåuschen, nicht gleich, weil ich die Wahrheit mehr, als das Vergnügen einer ein-

ge-

gebildeten Erfindung liebte. Erst wenn ich eine Meinung von allen Seiten geprüft, und immer bestätigt gefunden hatte, faßte ich mehr Zutrauen zu ihr. Mittlerweile, so viel es mir meine übrigen Studien, und seit fünf Jahren mein Lehramt, nebst andern Umständen erlaubten, sah ich auch jene Bücher nach, die in der Absicht, das wissenschaftliche System der Mathematik zu vervollkommnen, geschrieben worden sind. Hier fand ich einiges von dem, worauf ich für mich durch eignes Nachdenken geleitet worden war, schon wirklich vorgetragen; manches dagegen hab' ich noch nirgends angetroffen. Allein, da ich mir keine vollständige Kenntniß der mathematischen Litteratur verschaffen konnte; so wäre es immer möglich, daß auch noch einiges von dem, was ich für neu halte, irgendwo schon gesagt worden ist: von allem wird dieß doch zuverlässig nicht der Fall seyn.

Im

Im Uibrigen ist es mir gar nicht unbekannt, daß es ein allerdings gewagtes Unternehmen sey, an den ersten Gründen der Mathemaitk einiges ändern und bessern zu wollen. „Alle, die den Euklides meistern wollten,“ sagt Kästner irgendwo mit historischer Wahrheit, „sind bisher selbst zu Schanden geworden.“ Steht nicht auch mir ein ähnliches Geschick bevor, zumahl da Vorurtheil und Eigensinn selbst dort, wo ich die Wahrheit auf meiner Seite haben sollte, sich mir entgegen stemmen werden? Allein aus dem Mißlingen mehrerer Versuche folgt ja doch immer nicht, daß alle übrigen mißlingen müssen; auch ist der Weg, den ich hier einschlage, von den bisher versuchten Wegen sehr verschieden. Ich hielt es daher für meine Pflicht, ihn der Beurtheilung der Kenner vorzulegen.

Zwar

Zwar gab ich schon im J. 1804 eine kleine Probe meiner Veränderungen unter dem Titel: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, heraus. Allein der geringe Umfang des Schriftchens, sein nichts sagender Titel, der allzu lakonische Styl, die Nahmenlosigkeit des Verfassers, und manche andre Umstände waren wohl nicht geeignet, demselben Aufmerksamkeit zu verschaffen. Es ist daher auch weiter nichts erfolgt, als daß es in einigen gelehrten Zeitungen (z. B. in der Leipziger, Jahrg. 1805. Jul. 95. St.; in der Jen., 1806. Febr. Nr. 29.) angezeigt wurde, ohne daß man die darin vorgetragene Theorie der Parallelen eines *offenbaren* Fehlers geziehen hätte. Nun versteht es sich aber von selbst, daß ich seit dieser Zeit in meinen Begriffen fortgerückt bin, und daher manches jetzt besser und richtiger darzustellen glaube, als

es

es wohl damahls geschehen ist. In diesen Beyträgen also, die in so kleinen Lieferungen, wie diese gegenwärtige, in unbestimmten Zeiträumen erscheinen sollen, und deren Anzahl ich eben so wenig vorher bestimmen kann, gedenke ich die einzelnen apriorischen Disciplinen der Mathematik nach jener Ordnung, wie sie in der gegenwärtigen I. Abth. §. 20. aufgestellt sind, theilweise durchzugehen. Die meisten und wichtigsten Veränderungen werden die Geometrie betreffen, zu deren Darstellung ich auch schon darum so schnell als möglich eilen werde, um durch die Beurtheilung der Kenner in meinen Ansichten entweder bestärkt, oder über meine Verirrung aufgeklärt, nicht noch mehr Zeit auf einem Abwege zu verlieren.

— *εἰ γαρ τις μοι ἀνηρ ἁμ᾽ ἕποιτο*
και ἀλλος,

Μαλ-

XVI

Μαλλὸν θαλπωρη, και θαρσαλεωτε-
ρον ἐςαι.
— μȣνος δ' ἐιπερ τι νοησῃ,
Ἀλλα τα ὁι βρασσων τε νοος, λεπ-
τη δε τε μητις.

Iliad. X, 222.

I. Ueber den Begriff der Mathematik und ihre Eintheilung.

§. 1.

Das älteste und gewisser Maßen noch immer unübertroffene Lehrbuch der Mathematik, die Elemente des Euklides, enthalten bekanntlich gar keine Erklärung der Wissenschaft, von der sie handeln. Ob ihr unsterblicher Verfasser dieses aus einer Art von Eigensinn gethan, oder weil er es nicht der Mühe werth gehalten, oder weil er uns keine vollgültige Erklärung zu geben gewußt hat: das wage ich nicht zu entscheiden. — Dagegen in allen neuern Lehrbüchern der Mathematik wird die Erklärung aufgestellt: „Die Mathematik sey die Wissenschaft der Größen." Diese Erklärung hat schon Kant in seiner Kritik der reinen

A Ver-

Vernunft (s. die zweyte Auflage S. 742.) getadelt, weil durch dieselbe, wie er sagt, „kein wesentliches Kennzeichen der Mathematik angegeben, wie auch die Wirkung für die Ursache genommen werde."

§. 2.

Begreiflich kömmt hiebey alles darauf an, was jemand unter dem Worte Größe verstehe. Da stellt nun der ungenannte Verfasser des Buches: Versuch das Studium der Mathematik durch Erläuterung einiger Grundbegriffe und durch zweckmäßigere Methoden zu erleichtern. Bamberg u. Würzburg 1805. (S. 4.) folgende Erklärung der Größe auf: „Eine Größe ist etwas, das ist, und durch irgend einen Sinn wahrgenommen werden kann. Diese Erklärung ist immer Eines von beyden, entweder zu weit, oder zu enge; je nachdem der Verfasser die Worte: ist und wahrgenommen werden kann entweder in ihrem weitesten Verstande, wo

sie

sie eine bloß *idealische Existenz* und eine *Möglichkeit gedacht zu werden* bedeuten, oder in ihrem engern und eigentlichen Verstande nimmt, in welchem sie nur von einem *wirklich existirenden, sinnlichen Gegenstande* gelten. Im ersten Falle wäre Größe; *jedes gedenkbare Ding ohne Ausnahme*; und wenn wir dann die Mathematik als die Wissenschaft der Größen erklärten, so würden wir im Grunde alle Wissenschaften in das Gebiet dieser Einen ziehen. Im zweyten Falle dagegen wären nur *sinnliche Gegenstände* Größen, und das Gebiet der Mathematik würde dann offenbar zu sehr beengt, weil doch auch übersinnliche Dinge, z. B. Geister und geistige Kräfte ein Gegenstand der Mathematik, und insbesondere der Rechenkunst werden können.

§. 3.

Doch in der That ist diese Erklärung der Größe (§. 2.), man mag sie nun so oder anders auslegen, dem Sprachgebrauche ganz zuwider. Auch habe ich ihrer hier

A 2 nur

— 4 —

nur erwähnt, um in der Folge daraus zu zeigen, daß auch schon diesem Verfasser eine gewisse mir wahr scheinende Idee, obgleich nur dunkel, vorgeschwebt habe. Wollen wir uns von dem Sprachgebrauche nicht allzu weit entfernen (was wir allerdings auch in den Wissenschaften nicht ohne Noth thun sollten); so müssen wir unter Größe ein Ganzes, in wie fern es aus mehreren gleichen Theilen besteht, oder noch allgemeiner, etwas, welches durch Zahlen bestimmt werden kann, verstehen. Diese Bedeutung des Wortes Größe vorausgesetzt, ist die gewöhnliche Erklärung der Mathematik, als einer Wissenschaft der Größen, freylich mangelhaft, und zwar zu enge. Denn allein und in abstracto wird die Größe nur in der reinen allgemeinen Mathesis, d. h. in der Logistik oder der Arithmetik, betrachtet, erschöpft aber den Inhalt nicht einmahl dieser Wissenschaft. So kömmt in vielen Aufgaben der Combinationslehre (dieses so wichtigen Theiles der allgemeinen Mathesis) der Begriff der Größe oder einer Zahl nicht einmahl vor;

z. B.

— 5 —

z. B. wenn man die Frage aufwirft: welche — (nicht wie viele) — Versetzungen die gegebenen Dinge a, b, c, . . zulassen? In den besondern Theilen der Mathematik, der Chronometrie, Geometrie, u. a. kömmt allenthalben, wie schon die Nahmen erinnern, nebst dem Begriffe der Größe, noch irgend ein anderer Gegenstand (z. B. die Zeit, der Raum, u. s. w.) vor, auf welchen der erstere bloß häufig angewendet wird; so zwar, daß es in allen diesen Disciplinen mehrere Grund- und Lehrsätze gibt, in welchen der Begriff der Größe gar nicht enthalten ist. So muß z. B. in der Chronometrie der Satz: daß alle Augenblicke — in der Geometrie jener: daß alle Puncte einander ähnlich sind, aufgestellt werden; in welchen Sätzen der Begriff einer Größe oder Zahl ganz und gar nicht enthalten ist, welche daher in der Mathematik nicht einmahl aufgestellt werden dürften, wenn sie bloß eine Wissenschaft der Größen wäre.

§. 4.

§. 4.

Aber nicht so leicht, als es uns ward, die bisher gewöhnliche Erklärung zu tadeln und zu verwerfen, dürfte es uns werden, eine bessere an ihre Stelle zu setzen. Wir haben vorhin bemerkt, daß jene *besondern Gegenstände*, die in den einzelnen Theilen der Mathematik noch neben dem Begriffe der Größe vorkommen, von einer solchen Beschaffenheit sind, daß dieser letztere leicht auf sie angewendet werden kann. Dieses könnte vielleicht auf den Gedanken führen, die Mathematik als eine *Wissenschaft von solchen Gegenständen zu erklären, auf welche der Begriff der Größe besonders anwendbar* ist. Und wirklich scheint es, daß selbst diejenigen, welche die (§. 1.) angeführte Erklärung annahmen, im Grunde nichts anders als dieses verstanden haben wollten. Allein bey einer genauern Betrachtung zeigt es sich, daß auch selbst diese Erklärung verwerflich sey. *Anwendbar* ist einmahl der Begriff der Größe durchaus auf *alle* Gegenstände, selbst auf *Gedankendinge*. Wollte

man

— 7 —

man also die bloße Anwendbarkeit des Größenbegriffs auf einen Gegenstand als einen hinreichenden Grund betrachten, die Lehre von demselben den mathematischen Disciplinen beyzuzählen; so würde man in der That alle Wissenschaften zur Mathematik zählen müssen, z. B. auch jene, worin der Satz erwiesen wird: daß es nur vier (oder wie Platner richtiger lehrt, nur zwey) syllogistische Figuren gebe; ingleichen jene, die lehrt: daß es nicht mehr, noch weniger als viermahl drey reine einfache Verstandesbegriffe (Kategorien) gebe; u. s. w. Man müßte also, um diese Erklärung dennoch zu retten, nur noch den Unterschied der öfteren oder seltenern Anwendbarkeit berücksichtigen, d. h. nur jene Gegenstände zur Mathematik zählen, auf welche sich der Begriff der Größe oft und vielfach anwenden läßt. Aber wer sieht nicht, daß dieses eine höchst schwankende, und gar nicht wissenschaftliche Grenzenbestimmung des mathematischen Gebietes gäbe? Wir müssen uns also nach einer bessern Erklärung umsehen.

§. 5.

— 8 —

§. 5.

Die kritische Philosophie scheint uns eine solche zu versprechen. Sie glaubt zwischen den beyden Hauptclassen aller menschlichen Erkenntnisse a priori, der philosophischen und mathematischen, einen bestimmten und charakteristischen Unterschied darin entdekt zu haben, daß die mathematische Erkenntniß alle ihre Begriffe in einer reinen Anschauung adäquat darzustellen, d. h. zu construiren und eben deßhalb auch ihre Lehrsätze zu demonstriren vermöge; dagegen die philosophische Erkenntniß, ermangelnd aller Anschauung, mit bloßen discursiven Begriffen sich begnügen müsse. Sonach werde das Wesen der Mathematik am eigenthümlichsten durch die Erklärung ausgedrückt: daß sie eine Vernunftwissenschaft aus Construction der Begriffe sey. (S. Kants Kritik d. r. V. S. 712.) — Diese Erklärung haben denn auch wirklich mehrere Mathematiker, welche der kritischen Philosophie anhängen, unter andern auch der um die Begründung der

rei-

— 9 —

reinen Mathematik so wohl verdiente Schultz in seinen Anfangsgründen der reinen Mathesis. Königsberg. 1791. aufgenommen.

§. 6.

Ich meines Theils will nur gleich offenherzig bekennen, daß ich mich bis zur Stunde — wie von der Wahrheit so mancher anderen Lehren der kritischen Philosophie — so insbesondere auch von der Richtigkeit der Kantischen Behauptungen über die reinen Anschauungen und über das Construiren der Begriffe durch sie, nicht habe überzeugen können. Ich glaube noch immer, daß schon in dem Begriffe einer reinen (d. h. a priorischen) Anschauung ein innerer Widerspruch liege; und noch weit weniger kann ich mich überreden, daß der Begriff der Zahl nothwendig in der Zeit construirt werden müsse, und daß sonach die Anschauung der Zeit zur Arithmetik wesentlich gehöre. Da ich im Anhange zu dieser Abhandlung ein Mehreres hierüber sage; so begnüge ich mich, hier nur hinzuzufügen,

gen,

— 10 —

gen, daß es der selbstdenkenden Köpfe in Deutschland doch manche und wohl gar viele gibt, welche mit diesen Behauptungen Kants eben so wenig einverstanden sind, als ich. Selbst Einige, die jener Kantischen Erklärung anfangs geneigt gewesen, fanden sich in der Folge genöthigt, sie wieder zu verlassen. Hieher gehört z. B. H. *Michelsen* in seinen *Beyträgen zur Beförderung des Studiums der Mathematik. Berlin.* 1790. S. I. B. 5. *Stück*.

§. 7.

Aber belehrender, als was H. M. in dieser Abhandlung sagt war mir, was ich in der allgemeinen Leipz. Litteratur-Zeitung. (1808 Jul. St. 81) antraf. Der gelehrte H. Rec. tadelt die so gewöhnliche Erklärung der Mathematik, als einer *Wissenschaft der Größen*, und sagt hierauf: „Die Größe ist nur darum Gegenstand der Mathematik, weil sie die *allgemeinste Form* ist, *endlich zu seyn*, die *Mathematik* aber, ihrer Natur nach, eine *allgemeine Formenlehre* ist; und zwar *Arithmetik*, in

so

so fern sie die Größe, als die allgemeine Form endlicher Dinge, Geometrie, in so fern sie den Raum als die allgemeine Form der Natur; Zeitlehre, in so fern sie die allgemeine Form der Kräfte; Bewegungslehre, in so fern sie die allgemeine Form der im Raum wirkenden Kräfte betrachtet." — Ich weiß nicht, ob ich diese Erklärungen ganz nach dem Sinne ihres Erfinders verstehe; aber so viel muß ich bekennen, sie halfen mir folgende Erklärung und Eintheilung der reinen Mathematik, die ich nach ihrem Hauptgrundrisse schon vorher entworfen hatte, noch mehr ausbilden und entwickeln.

§. 8.

Ich denke also, daß man die Mathematik am besten als eine Wissenschaft erklären könnte, die von den allgemeinen Gesetzen (Formen) handelt, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn richten müssen. Unter dem Worte Dinge begreife ich hier nicht bloß solche, welche ein objectives, von unserem Bewußtseyn unabhän-

giges

giges Daseyn besitzen, sondern auch solche, die bloß in unsrer Vorstellung existiren, und dieses zwar wieder entweder als Individuen (d. i. Anschauungen), oder als bloße allgemeine Begriffe; mit einem Worte also — alles, was überhaupt ein Gegenstand unsers Vorstellungsvermögens werden kann. Sage ich ferner, die Mathematik handle von den Gesetzen, nach welchen sich diese Dinge in ihrem Daseyn richten; so zeiget dieß an, daß unsre Wissenschaft sich nicht mit dem Beweise des Daseyns dieser Dinge, sondern nur ganz allein mit den Bedingungen ihrer Möglichkeit beschäftige. Und indem ich diese Gesetze allgemeine nenne, so gebe ich zu verstehen, daß sich die Mathematik niemahls mit einem einzelnen Dinge als Individuo, sondern allezeit mit ganzen Gattungen befasse. Diese Gattungen können indessen freylich bald höhere, bald niedere seyn; und darauf wird sich eben die Eintheilung der Mathematik in einzelne Disciplinen gründen.

§. 9.

— 13 —

§. 9.

Zu enge wird man die hier gegebene Erklärung wohl nicht finden; denn sie umfaßt offenbar alles, was man in das Gebiet der Mathematik bisher nur immer gezählt hat. Desto mehr befürchte ich aber, daß man sie etwa zu weit finden, und ihr den Vorwurf machen dürfte, daß sie der Philosophie (der Metaphysik) zu wenig übrig lasse. Diese wird nähmlich durch meine Erklärung nur noch auf das einzige Geschäft eingeschränkt, das wirkliche Daseyn gewisser Gegenstände aus apriorischen Begriffen zu beweisen.[1] Mathematik und Metaphysik, die beyden Hauptbestandtheile unserer apriorischen Erkenntnisse, wären einander nach dieser Erklärung dergestalt entgegen gesetzt, daß erstere die allgemeinen Bedingungen abhandelte, unter welchen das Daseyn der Dinge möglich wird; die leztere dagegen versuchte, die Wirklichkeit gewisser Gegenstände (als etwa der Freyheit, Gottes und der Unsterblichkeit der Seele) a priori zu beweisen; oder mit andern Worten, jene beschäftigte sich

mit

— 14 —

mit der Frage: wie müssen Dinge beschaffen seyn, die möglich seyn sollen? diese würfe die Frage auf: welche Dinge sind wirklich — und zwar (weil sie dieß a priori beantworten soll). — mit Nothwendigkeit wirklich? Oder noch kürzer, die Mathematik würde von der hypothetischen, *) die Metaphysik von der absoluten Nothwendigkeit handeln.

§. 10.

Wenn ich auf irgend einen mir bisher neuen Gedanken verfalle, pflege ich mir allezeit die Frage vorzulegen, „ob denn noch niemand vor mir dieselbe Ansicht gehabt habe?" Finde ich dieß, so gewinnt natürlich auch meine Ueberzeugung. Was nun die obige Erklärung anlangt,

so

*) Obgleich nicht alle ihre Sätze diese hypothetische Form besitzen, weil die Bedingung, besonders in der Chronometrie und Geometrie, wo sie bey allen Sätzen dieselbe ist, stillschweigend übergangen wird.

so brauche ich es nicht erst zu sagen, wie so ganz nahe das, was der scharfsinnige Hr. Rec. (§. 7.) gesagt hat, mit meiner Darstellung zusammentrifft, wofern es nicht vollends auf Eines hinausläuft. Aber auch dem Verfasser des Buches (§. 2.) scheint diese Idee, obschon nur dunkel, vorgeschwebt zu haben. Denn indem er die Größe, oder den Gegenstand der Mathematik, als d a s, w a s i st, erklärte; so scheint er wohl gefühlt zu haben, daß sich die Mathematik mit a l l e n Formen der Dinge, nicht bloß mit ihrer Z u s a m m e n s e tz b a r k e i t a u s g l e i c h e n T h e i l e n (der Z ä h l b a r k e i t) beschäftige. — K a n t erkläret die r e i n e N a t u r w i s s e n s c h a f t, (welche man doch von jeher unter dem Nahmen der M e c h a n i k als einen Theil der Mathematik angesehen hat), als eine W i s s e n s c h a f t v o n d e n G e s e tz e n, u n t e r w e l c h e n d a s D a s e y n d e r D i n g e (der Phänomena) s t e h e t. Durch diese Erklärung kann man sehr leicht auf unsre oben angegebene geleitet werden. Z e i t und R a u m sind nähmlich gleichfalls z w e y B e d i n g u n g e n, unter welchen das Daseyn der Erschei-

scheis

scheinungsdinge stehet; die *Chrono*= und *Geometrie* also, welche die Eigenschaften dieser beyden Formen in abstracto betrachten, handeln ebenfalls, obgleich nur *mittelbarer Weise*, von den Gesetzen, unter welchen das Daseyn der Dinge (nähmlich der sinnlichen) stehet. Die *Arithmetik* endlich, welche von den Gesetzen der *Zählbarkeit* handelt, entwickelt eben darum die *allgemeinsten* Gesetze, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn, selbst in ihrem *idealen* Daseyn, richten müssen.

§. 11.

Versuchen wir nun, aus dieser Erklärung der Mathematik eine *logische Eintheilung* dieser Wissenschaft in mehrere einzelne Disciplinen herzuleiten. Gelingt es uns ziemlich natürlich mit dieser Eintheilung; so dürfte auch dieses wieder ein neuer Bestättigungsgrund für die Gültigkeit jener Erklärung seyn. Ihr zu Folge soll die Mathematik eine *Wissenschaft von den Gesetzen seyn, nach welchen sich die Dinge in ihrem Da-*

seyn

seyn richten müssen. Diese Gesetze sind nun entweder so allgemein, daß sie auf alle Dinge ganz ohne Ausnahme anwendbar sind, oder nicht. Die ersteren zusammen gestellt und wissenschaftlich geordnet, werden demnach den ersten Haupttheil der Mathematik ausmachen, den man die allgemeine Mathesis nennen kann; alles Uebrige ist dann besondere Mathesis.

Anm. Zu dieser allgemeinen Mathesis gehört, wie wir unten sehen werden, die Arithmetik, Combinationslehre, u. m. a. Diese Theile der Mathematik muß man also den übrigen (der Chronometrie, Geometrie, u. s. w.) nicht als coordinirt betrachten; viel mehr sind letztere der allgemeinen Mathesis insgesammt, wie Arten der Gattung, subordinirt. Und weil der Begriff der Zahl einer von jenen der allgemeinen Mathesis ist, so wird er auch in allen diesen besondern Theilen zwar häufig vorkommen, aber doch ihren Inhalt nicht erschöpfen.

B §. 12.

— 18 —

§. 12.

Um nun die besondern, oder speciellen Theile der Mathematik zu erhalten, müssen wir die Dinge selbst, mit deren allgemeinen Formen sich die Mathematik beschäftigt, in gewisse Classen bringen. Aber bevor wir dieses noch thun, laßt uns auf einen gewissen Begriff unsers Verstandes aufmerksam machen, der zwar (so viel ich einsehe) nicht völlig auf alle Dinge anwendbar ist, in die allgemeine Mathesis also nach aller Strenge zwar nicht aufgenommen werden sollte; aber der von der andern Seite sich doch auf Dinge von so verschiedener Art anwenden läßt, daß er zu einer Eintheilung der Mathematik in einzelne Disciplinen wohl kaum tauglich wäre. Dieses ist der Begriff der Entgegensetzung. Ich glaube nicht, daß es zu jedem Dinge ein ihm entgegengesetztes gebe; aber das Vor- und Nachherseyn in der Zeit, das Dießseits- und Jenseitsliegen im Raume, Kräfte, die nach entgegen gesetzten Richtungen wirken, in der Mechanik,

Ver-

Vermögen und Schulden in der Berechnung des Cassastandes, das Angenehme und Unangenehme in den Empfindungen, das Gute und Böse in den freyen Willensentschließungen u. drgl. — sind lauter Beyspiele der Entgegensetzung, welche uns zur Genüge beweisen, wie ausgebreitet die Anwendbarkeit dieses merkwürdigen Begriffes sey. Zugleich ersehen wir aus eben diesen Beyspielen, wie wenig dieser Begriff dazu geeignet sey, um eine Hauptabtheilung der mathematischen Disciplinen in solche, auf welche er anwendbar oder nicht anwendbar wäre, zu begründen. Im Gegentheile die wirklich bestehenden Eintheilungen (die wir doch auch nicht ganz umstossen dürfen) sind nach einem ganz andern obgleich nur dunkel gedachten Eintheilungsgrunde gemacht; und man hat bey jeder einzelnen Disciplin das mitgenommen, was sich durch die Anwendung jenes Begriffs auf ihren Gegenstand besonderes ergibt. Das Allgemeine aber, was sich von allen der Entgegensetzung fähigen Dingen ohne Ausnahme sagen läßt, verdient allerdings eine abgesonderte Betrachtung. Es

B 2 kann

— 20 —

kann (wie man es gewisser Maßen auch schon gethan hat) in einem besondern *Anhange zu der allgemeinen Mathesis* vorgetragen werden.

§. 13.

Alles, was wir uns immer als *existirend* denken sollen, das müssen wir uns als Eines von beyden, entweder als *nothwendig*, oder als *frey* (d. h. nicht nothwendig) in seinem Daseyn denken *). Das, was wir uns als etwas *Freyes* denken, unterliegt eben darum auch keinen Bedingungen und Gesetzen in seinem *Werden* (oder *Daseyn* **) ist also kein Gegenstand der Mathematik.***)

Das-

*) Ein Beyspiel der erstern Art ist die *Geschwindigkeit* eines bewegten Körpers; ein Beyspiel der zweyten jede menschliche *Willensentschließung*.

**) Falls es nähmlich nicht *wird*, sondern nur *ist*, wie z. B. *das freye Wirken der Gottheit*, wie fern wir es uns nicht in der *Zeit* gedenken.

***) Wohl aber der Gegenstand der *Moral* welche die Frage untersucht: *wie das*,

— Dasjenige, was wir als nothwendig in seinem Daseyn denken, ist es entweder schlechthin (d. i. an sich), oder nur bloß bedingt (d. i. unter Voraussetzung von etwas Andern). Das an sich Nothwendige heißt — Gott, und wird als ein nicht bloß möglicher, sondern wirklicher Gegenstand in der Metaphysik betrachtet.(*) Es bleibt uns also nur noch das hypothetisch Nothwendige übrig, welches wir als gewirket durch einen Grund gedenken. Es gibt nun gewisse allgemeine Bedingungen, nach denen sich alles, was durch einen Grund (es sey in oder außerhalb der Zeit) gewirket ist, in seinem Werden oder Daseyn richten muß. Diese Bedingungen zusammen genommen und wissenschaftlich geordnet, werden also den ersten Hauptheil der besondern Mathesis ausmachen, welchen ich in Ermanglung eines besseren Nahmens Grundlehre oder Aetiologie nenne.

Anm.

(*) was frey geschieht (oder ist), geschehen (oder seyn) soll.

Anm. Dieser Theil der Mathematik enthält die Lehrsätze von Grund und Folge, deren einige man sonst auch in der Ontologie vorzutragen pflegte; z. B. daß ähnliche Gründe ähnliche Folgen haben; ingleichen die Lehren, welche man unter dem Namen der Wahrscheinlichkeitsrechnung begreift, welches letztere ich hier nur aus dem Grunde erinnere, damit man nicht glaube, es werde dieser wichtige Theil der Mathematik von uns vielleicht ganz übergangen. Uebrigens muß die Aetiologie im wissenschaftlichen Vortrage vor der Chrono- und Geometrie vorangehen, weil letztere sich auf gewisse Lehrsätze der ersteren berufen, wie wir zu seiner Zeit deutlicher sehen werden.

§. 14.

Alles, was wir uns nicht nur als wirklich denken, sondern als wirklich wahrnehmen sollen, das müssen wir in der Zeit, und — wenn wir es überdieß als ein Ding ausser uns erkennen sollen, auch noch im Raume wahrnehmen.

— 23 —

men. Mit andern Worten, Zeit und Raum sind die beyden Bedingungen, unter welchen alle sinnlichen Dinge, d. h. alle Dinge, die uns als wirklich erscheinen sollen, stehen müssen. Entwickeln wir also die Eigenschaften der Zeit und des Raumes in abstracto, und ordnen sie wissenschaftlich; so werden auch diese Wissenschaften zur Mathematik gezählet werden müssen, indem auch sie, obgleich nur mittelbarer Weise, von den Bedingungen handeln, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn richten müssen. So haben wir also den zweyten und dritten Bestandtheil der besondern Mathesis, die Zeitlehre (Chronometrie), und die Raumlehre (Geometrie).

Anm. Es ist an sich ziemlich gleichgültig, welche von diesen beyden Wissenschaften wir im Systeme der andern vorsetzen, indem die Eigenschaften der Zeit und des Raumes von einander ganz unabhängig sind. Dennoch, weil der Begriff der Zeit auf mehrere Gegenstände anwendbar ist, als jener des Raumes,

mes, scheint es zweckmäßiger, die Chronometrie der Geometrie voran gehen zu lassen.

§. 15.

Werden zuletzt die Zeit und der Raum nicht in abstracto bloß, sondern als ausgefüllt mit wirklichen Dingen, und zwar mit solchen betrachtet, welche nicht frey in ihrem Daseyn, sondern den Gesetzen der Caussalität unterworfen sind; so kommen zwey neue Wissenschaften zum Vorschein, welche aus den §. 14. genannten, mit jener im §. 13. gleichsam zusammengesetzt sind. Nähmlich:

a) Die allgemeinen Gesetze, nach welchen sich unfreye Dinge, die in der Zeit sind, in ihrem Daseyn (und in ihren Veränderungen) richten müssen, machen den Inhalt einer eigenen Wissenschaft aus, welche ich in Ermanglung einer schicklicheren Benennung Ursachenlehre, oder chronische Aetiologie nenne. *)

b)

*) Ich unterscheide nähmlich die Worte Grund und Ursache. Letzteres bedeu-

— 25 —

b) Die allgemeinen Gesetze, unter welchen unfreye Dinge, die in der Zeit und im Raume zugleich sind, stehen, machen den Inhalt jener mathematischen Disciplin aus, die man die reine Naturwissenschaft, sonst auch Bewegungslehre oder Mechanik nennt.

Anm. In das Gebiet der chronischen Aetiologie gehören z. B. die Lehrsätze: „Jede Wirkung ist mit ih„rer Ursache gleichzeitig; die Größe „der Wirkung, welche aus einer con„stanten Ursache entspringt, verhält „sich wie das Product aus dem Grade „der Ursache in die Zeit ihres Wirkens;" u. drgl. Diese Lehrsätze sind nähmlich so allgemein, daß sie nicht bloß von räumlichen, materiellen Dingen, sondern auch von den Kräften der Seele, von unsern Vorstellungen, und überhaupt von allen Dingen gelten, die in der Zeit erscheinen, und dem Gesetze der Caus-

---

tet mir einen Grund, der in der Zeit wirkt.

— 26 —

Caussalität unterliegen. — Die reine Naturwissenschaft kennt man bereits.

§. 16.

Man hat auch häufig von einer Wissenschaft gesprochen, in welcher die allgemeinen Gesetze der Möglichkeit einer Bewegung ohne Rücksicht auf eine bewegende Kraft — also die Begriffe von Zeit, Raum und Materie ohne jenen von einer Ursache vorkommen sollten. Hermann, Lambert und Kant haben diese Wissenschaft Phoronomie genannt, und letzterer sie als einen Theil der reinen Naturwissenschaft betrachtet, in welche sie aber nach unserer obigen Erklärung nicht gehören würde. Herr E. G. Fischer in seiner Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis, nebst einer idealen Uebersicht der Mathematik und Naturkunde nach ihrem ganzen Umfange. Berlin. 1808. stellt diese Wissenschaft gleichfalls auf, und läßt sie unter dem Nahmen Phorometrie

zu-

zunächst auf die *Geometrie*, als *zweyten Haupttheil* der *räumlichen Mathematik* folgen. Allein wenn anders die Ansichten, welche ich in der Folge mitzutheilen gedenke, nicht ganz unrichtig sind, so kann eine solche Wissenschaft gar nicht existiren; denn alle Sätze, die man in ihr bisher aufgestellt hat, sind in der That nur mittelst Zuziehung des Begriffs der Ursache erweislich.

§. 17.

Noch pflegt man die einzelnen Disciplinen der Mathematik in *gemeine* und *höhere* abzutheilen. Es ist mir aber für diese Eintheilung bis jetzo noch kein echt *wissenschaftlicher Eintheilungsgrund* bekannt. In wie fern ein solcher Eintheilungsgrund sich bloß auf eine einzelne Disciplin (z. B. die Geometrie) erstrecken sollte, werden wir von ihm schicklicher bey der Abhandlung dieser Disciplin insbesondere sprechen. Hier also nur von solchen Eintheilungsgründen, die sich durchs ganze Gebiet der Mathematik hindurch erstrecken sollen. Dieß ist der

Fall

Fall bey allen denjenigen, welche man für die *allgemeine* Mathesis vorgeschlagen hat; indem Eintheilungen, welche bey dieser gemacht sind, eben darum auch durch alle besondern Theile der Mathematik hindurch gehen müssen. In des Herrn *Michelsen Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik*, u. s. w. *Berlin 1789.* wird die gemeine und höhere Mathesis dadurch abgetheilt, daß die eine *beständige*, die andere *veränderliche Größen* (oder wohl überhaupt *Dinge*) zu ihrem Objecte habe. Diese Eintheilung glaube ich schon darum nicht annehmen zu können, weil ihr stillschweigend die *Voraussetzung* zum Grunde liegt, welche von Vielen sogar in die Erklärung der Mathematik aufgenommen worden, daß es das einzige Geschäft der Mathematik sey, *Größen, die nicht gegeben sind, aus andern, die gegeben sind, zu finden.* Wenn dieses richtig wäre, so sollten alle Sätze der Mathematik die Form von *Aufgaben* besitzen; *Grundsätze*, *Lehrsätze*, u. s. w. könnten in ihr eigentlich gar nicht vorkommen. Al-

lein,

lein, bevor man fragen kann, was aus gegebenen Dingen *folge*, muß man erst *dargethan*, oder als *Forderung* angenommen haben, daß diese Dinge gegeben seyn *können*, d. h. *möglich* sind. — Eine ganz andere Eintheilung schlägt uns H. M. in seinen schon oben erwähnten *Beyträgen* im I. B. 2. St. (*Ueber den Begriff der Mathematik und ihre Theile.*) vor. Hier nimmt er drey Haupttheile der allgemeinen Mathesis an: 1) die *niedere*, welche die Größen aus *gleichen* Bestandtheilen bestehen läßt; 2) die *höhere*, worin die Größen zum Theil aus *gleichen*, zum Theil aus *ungleichen* Bestandtheilen zusammengesetzt gedacht werden (Differenze- und Summenlehre); 3) die *transcendentale*, in welcher die Bestandtheile der Größen eigentliche *Elemente*, oder *Größeneinheiten* im strengsten Sinne sind (Differenzial- und Integralrechnung). — Ich weiß nicht, ob ich diese Eintheilung recht verstehe; denn mich däucht, in eben dem Sinne, in welchem man von der Differenz- und Summenrechnung sagen kann, daß sie die Grö-

ßen

— 30 —

ßen aus — zum Theil gleichen, zum Theil ungleichen Bestandtheilen zusammengesetzt betrachten, thut es schon die gemeine Rechenkunst, wenn sie z. B. $2 + \frac{1}{2}$ als ein Ganzes ansieht. Noch weniger sehe ich ein, wie die Differenzialien als Größeneinheiten im strengsten Sinne des Worts betrachtet werden können, da man doch auch ihnen eine Größe, wenigstens eine intensive beylegt.

Am besten dürften wohl noch diejenigen verfahren, welche zur höheren Mathesis bestimmt nur das zählen, worin der Begriff eines Unendlichen (gleichviel ob eines unendlich Großen oder Kleinen) oder der eines Differenzials vorkömmt. Nur ist dieser Begriff zur Stunde noch nicht hinlänglich aufgeklärt. Sollte es aber dereinst entschieden werden, daß das Unendliche, oder das Differenzial, nichts anders als ein symbolischer Ausdruck sey, gerade wie $\sqrt{-1}$, dgl.; und sollte es sich zugleich ergeben, daß die Methode, das Wahre durch bloß symbolische Erdichtungen zu beweisen, eine zwar ganz besondere, aber doch immer richtige und logisch zuläs-

sige

— 31 —

sige Beweisart sey: dann, glaube ich, würde man am zweckmäßigsten verfahren, in das Gebiet der höheren Mathematik mit dem Begriffe des Unendlichen, auch jeden andern zu verweisen, der so wie er symbolisch ist. Gemeine Mathesis wäre dann jene, welche nur lauter reelle — höhere, welche auch bloß symbolische Begriffe oder Ausdrücke in ihren Vortrag aufnimmt.

§. 18.

Auch über die Eintheilung der Mathematik in reine und angewandte haben wir etwas zu erinnern. Versteht man nähmlich, wie insgemein geschieht, unter der angewandten Mathematik so viel als empirische; so können wir, uns nicht zu widersprechen, nicht einmahl das Daseyn einer solchen zugeben, weil wir die ganze Mathematik in unsrer obigen Erklärung zu den rein a priorischen Wissenschaften zählten. Aber befürchte man darum nur nicht, daß wir auf diese Art einen beträchtlichen Theil der mathematischen Disciplinen etwa einbüßen werden. Die Ge-

schichte

schichte der Mathematik zeigt, daß man je länger, je Mehreres von dem, was man im Anfange bloß aus Erfahrungen angenommen hatte, in der Folge aus Begriffen herleiten, und also als einen Theil der reinen apriorischen Mathesis behandeln gelernt habe. Und dieses dürfte schon Grundes genug seyn, in wissenschaftlicher Hinsicht keinen Unterschied zwischen reiner und empirischer Mathematik zu gestatten; denn weil nur wir z. B. das Daseyn einer Anziehungskraft, und das Gesetz, daß sie im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirke, nicht a priori herzuleiten wissen *): folgt daraus schon, daß es auch unsre Nachkommen nie wissen werden, und daß es schlechterdings nicht a priori herleitbar sey? — Aber noch mehr, das, was man in den sogenannten angewandten Theilen der Mathematik aus der Erfahrung annimmt, macht diese Disciplinen im Grunde nicht empirisch. Denn die Mathematik handelt ja überhaupt nicht von dem, was wirklich Statt findet, sondern von den Bedin-

*) Kant hat es gleichwohl versucht.

— 33 —

dingungen oder Formen, die etwas haben muß, wenn es Statt finden soll. Es wird also nichts anders nöthig seyn, als daß man jene Sätze, die die Erfahrung angibt, bloß hypothetisch vortrage, und dann von Einer Seite die Möglichkeit dieser Hypothesen, und von der andern die Folgen, die sich aus ihnen ergeben, durch apriorische Schlüsse herleite. Dann kömmt im ganzen Vortrage kein empirisches Urtheil vor, die Wissenschaft ist also apriorisch. So braucht man z. B. zum Vortrag der Optik keinesweges aus der Erfahrung das Gesetz zu entlehnen, daß sich das Licht im Durchgange aus Luft in Glas in dem Verhältnisse 3 : 2 breche, u. dgl.; sondern es ist genug, wenn man a priori nur die Möglichkeit einer Materie, wie das Licht ist, und ihrer Brechung beym Durchgang durch verschiedene Mittel begreiflich macht, worauf man dann in hypothetischer Form den Vortrag einrichtet: „wenn es eine Materie gibt, die u. s. w.; so müssen sich diese und jene Folgen daraus ergeben.“ Jene Möglichkeit aber kann nie schwer zu beweisen seyn, indem doch

C alles

— 34 —

alles, was in der Erfahrung als wirklich wahrnehmbar seyn soll, schon voraus als möglich erkannt werden muß.

§. 19.

In so fern man also unter der angewandten Mathematik eine solche verstehen will, die sich auf einige aus der Erfahrung entlehnte Sätze wesentlich gründet, glaube ich nicht, daß sich ihr Daseyn rechtfertigen lasse. Aber man kann unter dem Nahmen der angewandten Mathematik auch etwas ganz Anderes verstehen, etwas, welches ich lieber praktische — oder, mit einem aus der kritischen Philosophie entlehnten Ausdrucke, wohl noch bestimmter — technische Mathematik nennen möchte. Diese ist ein zum nützlichen Gebrauche für das bürgerliche Leben besonders eingerichteter Vortrag der mathematischen Disciplinen. Ein solcher Vortrag unterscheidet sich von dem rein wissenschaftlichen auf eine ganz bestimmte Art durch die Verschiedenheit des Zwek-

es,

es, der bey dem letzteren die möglichst größte Vollkommenheit der wissenschaftlichen Form, und dadurch wieder die möglichst beste Uebung im richtigen Denken — bey jenem dagegen unmittelbare Brauchbarkeit für die Bedürfnisse des Lebens ist. Daher kömmt es denn ferner, daß in dem praktischen Vortrage alle zu allgemeinen Ansichten, welche zur Anwendung nicht unumgänglich nöthig sind, hinweg gelassen, dagegen recht viele Beyspiele und specielle Beziehungen auf wirklich vorhandene Fälle eingeflochten werden. Man thut sich auch nicht den Zwang an, diese wirklichen Fälle (wie es bey einem rein wissenschaftlichen Vortrage geschehen müßte) als bloße Möglichkeiten anzuführen, sondern man stellt sie geradezu als durch Erfahrungen erwiesene Wirklichkeiten auf. Uebrigens brauche ich es nicht erst zu sagen, daß in den meisten wirklich vorhandenen Lehrbüchern der Mathematik eine gewisse gemischte Methode zum Grunde liege, die jene beyden Zwecke, den rein wissenschaftlichen und

C 2 prak-

— 36 —

praktischen, vereint beabsichtiget; daß es auch gar nicht meine Meinung sey, dieß jenen Lehrbüchern im Allgemeinen etwa zum Fehler anzurechnen. Ein völlig zweckmäßiges Lehrbuch, nach der gemischten Methode verfaßt, wäre in der That ein noch weit brauchbareres Werk als ein bloß wissenschaftliches. Nur glaube ich, das erstere kann nicht zu Stande kommen, bevor man das bloß wissenschaftliche System noch nicht vollendet hat. Wer nun an der Vervollkommnung des letztern arbeitet, dem kann man es erlauben, den zweyten Zweck für diese Zeit ganz außer Augen zu setzen, um seine Aufmerksamkeit nur auf den Einen, die wissenschaftliche Vollkommenheit allein zu heften.

§. 20.

Aus allen diesem erhellet nun, wie ich glaube, daß es nur die §. 11 — 15 genannten Haupttheile einer wissenschaftlich geordneten Mathematik gebe. Folgende Tafel stellt sie in einer bequemen Uebersicht dar. Die eingeklammerten Worte bezeichnen den Gegenstand jeder Disciplin.

— 37 —

A.

Allgemeine Mathesis.
(Ding überhaupt.)

B.

Besondere mathematische Disciplinen.
(besondere Dinge)

I.

A e t i o l o g i e
(unfreyes Ding.)

II.

(unfreyes sinnliches Ding.)

a.

(Form desselben in abstracto.)

α	β
Zeitlehre (Zeit.)	Raumlehre. (Raum.)

b.

(sinnliches Ding in concreto.)

α	β
Chronische Aetiologie.	Reine Naturwissenschaft.
(sinnliches Ding in der Zeit.)	(sinnliches Ding in Zeit und Raum.)

Ueber