Traduções
Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 23, nº 46 – pp. 23–142
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ

Bernadete Morey
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN – Brasil

Kaline França
Instituto Federal do Rio Grande do Norte – IFRN – Brasil

(aceito para publicação em junho de 2023)

Resumo

O artigo apresenta uma tradução para o português do *Tratado da Circunferência* escrito pelo estudioso islâmico Jamshīd al- Kāshī em 1427. A tradução para o português teve como base o texto russo publicado no volume 7 da revista *IstorikoMatematitcheskie Issledovaniya* (Investigações HistoricoMatemáticas) de 1954, traduzido por Boris Rozenfeld a partir do manuscrito árabe de Istambul. O presente artigo está organizado em duas grandes partes, sendo a primeira parte dedicada à apresentação do *Tratado* em seus diversos aspectos e a segunda parte consiste no texto em português do *Tratado* traduzidos do russo por Bernadete Morey.

Palavras-chave: História da Matemática, Matemática islâmica medieval, al-Kāshī, Tratado da Circunferência.

[THE AL-KASHI'S TREATISE ON THE CIRCUMFERENCE]

Abstract

The article presents a translation into Portuguese of the Treatise of the Circumference written by the Islamic scholar Jamshīd al-Kāshī in 1427. The translation into Portuguese was based on the Russian text found in the volume 7 of the *IstorikoMatematitcheskie Issledovaniya* magazine of 1954, translated by Boris Rozenfeld from the Istanbul Arabic manuscript. This article is organized in two major parts, the first part being dedicated to the presentation of the Treatise in its various aspects and the second part consisting of the Portuguese text of the Treatise translated from Russian by Bernadette Morey.

Keywords: History of Mathematics, Medieval Islamic Mathematics, al-Kāshī, Treatise on Circumference.

1. Introdução

Tendo me dedicado nos últimos anos ao estudo das obras matemáticas do islã medieval, sobretudo àquelas produzidas por estudiosos que viveram na Ásia Central, me alegro com a iniciativa da RBHM de publicar um número especial de traduções de obras matemáticas do passado. Na verdade, o trabalho aqui apresentado não teria sido possível sem a parceria com minha orientanda, hoje Doutora Kaline França. Esclareço nossos papeis na sessão 3 do presente artigo.

O artigo tem o objetivo de apresentar ao leitor de língua portuguesa a tradução de uma obra de al-Kāshī um estudioso que viveu e trabalhou em Samarkanda[1] no século XV. A respeito dessa obra, do *Tratado da Circunferência de al- Kāshī*, já foi dito que "é admirável não apenas pela precisão dos resultados obtidos pelo autor (o valor de π foi calculado com 17 casas decimais corretas) mas também pela sutileza extraordinária da técnica de cálculos aproximados" (RÍBKIN e YUSHKIÉVITCH, 1954).

O presente artigo está organizado em duas grandes partes, sendo a primeira parte dedicada à apresentação do *Tratado* em seus diversos aspectos (sobre al-Kāshī e suas obras, sobre o processo de tradução do *Tratado* para o português, sobre a engenhosidade do pensamento matemático de al-Kāshī, o que nos levou a tecer reflexões na conclusão). Por fim, na segunda e mais volumosa parte do artigo, disponibilizamos texto em português do *Tratado* traduzido do russo por Bernadete Morey.

Uma observação a mais tem de ser feita. O único exemplar ao qual tivemos acesso do texto russo, falta a página 377. O único modo de restaurar o texto faltante foi recorrendo à tradução do *Tratado* que foi feita para o alemão por Luckey em 1953 (AL-KĀSHĪ, JAMSHID, 1953).

2. Al-Kāshī, um profícuo estudioso islâmico

Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmūd al-Tabīb al-Kāshī, ou simplesmente al-Kāshī, foi um profícuo estudioso islâmico que se dedicou principalmente à astronomia e à matemática, embora sua formação inicial tenha sido a medicina. Ele nasceu no final do século XIV, por volta do ano 1380 E.C. na cidade de Kashān no Irã atual. Há divergências a respeito da data da sua morte. Para Suter (1900) seria 1436 E.C. e, para Rozenfeld e Yuskiévitch (1973), seria 1429 E.C. e teria ocorrido na cidade de Samarkanda no atual Uzbequistão, conforme anotação encontrada numa cópia de uma das obras de al- Kāshī, o *Khaqānī Zīj*. Esta última, é a data mais comumente encontrada na literatura.

[1] Samarkanda, cidade da Ásia Central, hoje situada no Uzbequistão. Coordenadas 39.831078N, 66.405984E

Figura 1 - Selo em homenagem a al- Kāshī emitido pela República do Irã em 1979.
Fonte: O'Connor; Robertson (1999).

Al- Kāshī foi contemporâneo do império timurida instituído por Timur ou Tamerlão (1336-1405). Timur, o conquistador de uma vasta região que incluía os territórios dos atuais Irã, Iraque e Turquia Oriental, escolheu como capital de seu império a cidade de Samarkanda, cidade estratégica da Rota da Seda. Após a morte de Timur, os territórios sobre seu domínio foram divididos entre seus filhos e coube a Shah Rukh Mirza (1377 E.C.–1447 E.C.) (ou Shāhrukh) a maior parte.

A ascensão de Shāhrukh à condição de governante trouxe para a região prosperidade econômica, incentivo e apoio à arte e à ciência. Shāhrukh atribui a seu filho Muhammad Taraghāy ibn Shāhrukh ibn Tīmūr (1393–1449), conhecido como Ulugh Beg (Grande Príncipe), a tarefa de ser seu representante na região da Transoxania.[2] Ulugh Beg tinha apenas dezesseis anos e estava sob a tutela do estudioso Qāḍīzāde al-Rūmī (1364–1436).

Diferentemente do seu avô, Ulugh Beg não possuía interesse por guerras e conquistas e buscava transformar Samarkanda, na Transoxania, em um centro científico e cultural, o que de fato, conseguiu. Ulugh Beg era astrônomo e matemático, gostava de arte, música, literatura, era um mulçumano devoto e um aplicado estudioso do Alcorão, (BERGGREN, 2003). Ele construiu uma madraça e um observatório em Samarkanda e outra madraça em Bukhara, (FAZLIOGLU, 2008).

Na figura 2 temos um selo postal soviético de 1987 E.C. no qual se vê à esquerda a efígie de Ulugh Beg e, à direita, a vista interna do seu observatório em Samarkanda, em destaque seu sextante; 1437 E.C. é o ano no qual Ulugh Beg publicou suas tabelas astronômicas.

[2] Transoxania, também soletrada Transoxiana**,** em árabe Mā Warāʾ al-Nahr, ("Aquilo que está além do rio"), região histórica do Turquestão na Ásia Central a leste de Amu Darya (rio Oxus) e a oeste do Syr Darya (rio Jaxartes), correspondendo aproximadamente ao atual Uzbequistão e partes do Turcomenistão, Tajiquistão e Cazaquistão. Fonte: <https://www.britannica.com/place/Transoxania>. Acesso em: 08 nov. 2022.

Figura 2 - Selo postal da União Soviética em homenagem a Ulugh Beg.
Fonte: O'Connor e Robertson (1999).[3]

Para compor a equipe de estudiosos de Samarkanda, foram convidados cerca de sessenta sábios que eram pessoalmente entrevistados e tinham seus conhecimentos por Ulugh Beg. A preferência de Ulugh Beg eram as palestras sobre as ciências matemáticas e debatia os assuntos com professores e alunos, ele próprio também proferindo palestras. (FAZLIOGLU, 2008).

A data da chegada de al-Kāshī em Samarkanda não é precisa, mas Berggren (2003) diz que a obra de al- Kāshī, *Equatorium*, de 1416, marca o fim de seu autor como sábio nômade, quando se tem notícias dele já é como membro da equipe de Ulugh Beg. Por outro lado, para Yazdi e Rezvani (2015) o ano da chegada de al-Kāshī em Samarkanda seria 1420.

No Quadro 1 temos a lista dos trabalhos de al- Kāshī. Como se pode ver, os trabalhos datados constituem a maioria.

Quadro 1 – Títulos das obras de al-Kāshī.

	Título da Obra	**Tradução do Título**	**Ano**
1	*Sullam al-samāʿ fi ḥall ishkāl waqaʿa liʾl-muqaddimī fiʾl-abʿād waāl-ajrām*	A Escada do Céu: A resolução de dificuldades alcançadas por predecessores na determinação de distâncias e tamanhos	1407
2	*Mukhtaṣar dar ʿlim-i hayʾ at*	Compêndio da Ciência da Astronomia	1411
3	*Zij-i Khaqāni fī takmīl-i Zij-i Īlkhānī* ou *Khaqāni Zij*	Tabelas astronômicas	1414
4	*Risāla dar sharḥ-i ālāt-i raṣd*	Sobre instrumentos astronômicos em geral	1416
5	*Nuzha al-ḥadāiq fi kayfiyya ṣanʿsa al-āla al-musammā bi*	A excursão do jardim: Sobre o método de construção do Instrumento chamado Placa	1416

[3] O'CONNOR, J; ROBERTSON, Ulugh Beg. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Fonte:<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/stamps/#Ulugh_Beg>. In: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ulugh_Beg/ >. Acesso em: 08 nov. 2022.

	ṭabaq al-manāṭiq	dos Céus (*Equatorium*)	
6	*Talkhīis al-Miftāah*	Compêndio da Chave	1421
7	*al-Risāla al-Muhītīyya*	Tratado da Circunferência	1424
8	*Miftāḥ al-ḥisāb*	A chave para a aritmética	1427
9	*Ilkaḥāt an-Nuzha*	Suplemento à Excursão	1427
10	*Ta'rib al-zij*	Tradução da introdução do *zīj* de Ulugh Beg do persa para o árabe	-
11	*Wujuuh al-'amal al-darb fi'l-takht wa'l-turab*	Formas de multiplicar por meio de tabuleiro e poeira	-
12	*Natāʿij al-ḥaqāʾiq*	Resultados das Verdades	-
13	*Miftah al-a sbab fi'ilm al-zij*	A chave das causas na ciência das tabelas astronômicas	-
14	*Risala dar sakht-i asturlab*	Tratado sobre a construção do astrolábio	-
15	*Risala fi ma'rifa samt al-qibla min daira hindiyya ma'rufa*	Tratado sobre a determinação do azimute da *Qibla* por meio de um círculo conhecido como indiano	-
16	*Risāla al-watar waʾl-jaib*	O tratado sobre corda e seno	-

Fonte: Rozenfeld e Yushkiévitch (2018).

O *Tratado da Circunferência* (*al-Risāla al-Muhītīyya*) de 1424 sobre o qual teceremos maiores comentários mais adiante, é uma das obras de maior destaque de al-Kāshī.

3. A tradução do *Tratado da Circunferência* para o português

O texto que serviu de base para tradução para o portugues foi o texto russo, al-Kāshī (1954), traduzido do árabe por Boris Rozenfeld e publicado no número 7 do periódico *IstorikoMatematitcheskie Issledovaniya* (*Investigações Históricomatemáticas)*, em Moscou, no ano de 1954, p. 327–379, (Figura 3).

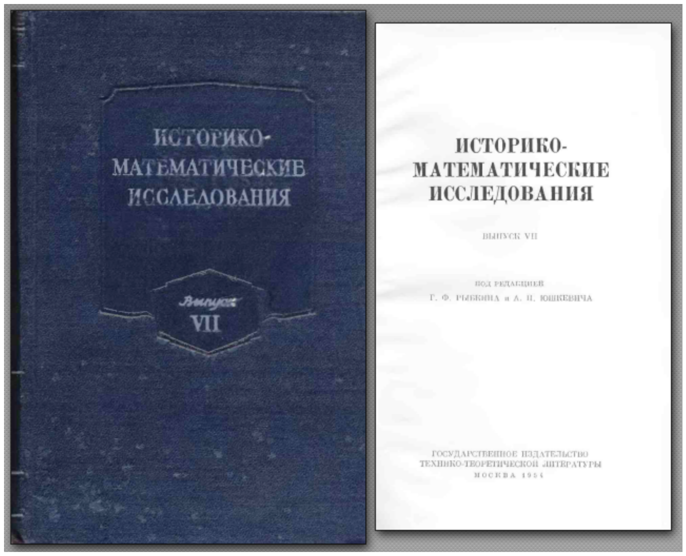


Figura 3 - Capa e contracapa da revista Investigação Histórica e Matemática, n°7.
Fonte: al-Kāshī (1954).

O número 7 do periódico em questão tem 722 páginas. O conteúdo indicado pelo sumário inclui Carta da Redação e mais três grandes seções:

I. Tratados matemáticos de al-Kāshī nas páginas 11–452;
II. Leonard Euler nas páginas 453–642;
III. Tópicos de história da matemática nas páginas 643–720.

A seção dedicada aos tratados matemáticos de al-Kāshī contém as traduções do árabe para o russo de duas obras de al-Kāshī: a Chave para a Aritmética (*Miftāh al-Hisab*) e o Tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*), precedidas do prefácio do tradutor (Boris Rozenfeld). Para que o leitor possa melhor compreender o *Tratado*, foram elaboradas por Boris Rozenfeld e Yushkiévitch 47 notas explicativas que se encontram nas páginas 439–449.

O texto russo do *Tratado da Circunferência* ocupa 53 páginas (327 a 379), está dividido em uma parte introdutória, mais dez partes e conclusão; possui algumas figuras geométricas e várias tabelas numéricas. Não apresenta capa, frontispício ou contracapa do texto que serviu de base, no caso, o manuscrito de Istambul, escrito em árabe. A tradução russa apresenta também algumas imagens de algumas páginas do manuscrito de Istambul.

O processo de tradução do russo para o português passou por várias etapas:

Como ponto de partida tínhamos o texto do *Tratado da Circunferência* em russo no periódico *IstorikoMatematitcheskie Issledovaniya* de 1954. Estando o texto em versão digitalizada, era impossível transformá-lo em PDF editável ou WORD. Havia, portanto, muito trabalho a fazer antes que a tradução pudesse ser iniciada.

E foi aí que a professora Kaline França, aluna do doutorado cuja tese tinha como tema o *Tratado da Circunferência* assumiu a tarefa de digitar o texto russo em Word mesmo sem saber russo, tendo aprendido apenas o alfabeto cirílico e a pronúncia de algumas palavras. Em seguida, eu (prof. Bernadete Morey) conferi o texto em WORD à busca de erros de digitação. Esta foi a etapa de preparação do texto para a tradução.

A etapa da tradução também foi feita em duas mãos, pois a prof. Kaline França se encarregou da tradução do russo para o português usando o tradutor automático Google (que faz o trabalho deixando, como é sabido, muitas imperfeições). A seguir, vem a fase demorada e trabalhosa de ler e corrigir a tradução feita pelo Google, comparando-a com texto original russo, à busca de todo tipo de erro. Esta etapa final da tradução foi realizada pela prof. Bernadete Morey.

Sendo assim o presente artigo é o produto do trabalho de duas autoras, com a prof. Bernadete Morey tendo um papel mais relevante na tradução e a prof. Kaline França, um papel mais relevante no estudo e apresentação da obra.

4. O *Tratado da Circunferência* de al-Kāshī

Al-Kāshī escreveu o *Tratado da Circunferência* com o objetivo de obter uma melhor aproximação para a relação entre a circunferência do círculo e o seu diâmetro,[4] em comparação às aproximações obtidas por predecessores Arquimedes (287 A.E.C. –212 A.E.C.), Abu'l-Wafā al-Būzjānī (940-998) e Abu Rayhān al-Bīrūnī (973–1048). O objetivo da obra é enunciado ainda na introdução, onde o autor comenta e avalia como não satisfatórios os valores da relação entre a circunferência e seu diâmetro obtidos pelos estudiosos acima mencionados. Diz o próprio al-Kāshī,

> *" ... queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para círculo menor que este seja ainda menor.* (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329, tradução nossa)

Acreditamos que o *Tratado da Circunferência* foi elaborado para atender a duas demandas: (1) estudos matemáticos e astronômicos cada vez mais profícuos na madraça e no observatório astronômico de Samarkanda; (2) a necessidade de que o cálculo do salário dos artesãos fosse mais preciso de acordo com a área trabalhada por eles, (DOLD-SAMPLONIUS, 1992).

Segundo Hogendijk (2009) há pelo menos oito manuscritos do *Tratado da Circunferência* de al-Kāshī espalhados pelo mundo. Verificamos esta informação e

---

[4] Cujo valor numérico é conhecido hoje pelo número irracional π (Pi).

encontramos registros de nove manuscritos[5]: um em Istambul, três em Mashhad, quatro em Teerã e um em Toronto (Quadro 2).

Quadro 2 - Manuscritos do Tratado da Circunferência de al-Kāshī.

Manuscrito	Nº de cópias	Língua	Localização	Data
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. **al-Risāla al-Muhītīyya**. Museu do Exército de Istambul, Biblioteca do Museu militar, n.756.	1	Árabe	Istambul, Turquia	Século XVI ou XVII
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. **al-Risāla al-Muhītīyya**. Sha'bān 827 A.H.L. (julho 1424); n.12145, n.12235, n.5389. Biblioteca Central de Āstan Quds Razawī, Mashhad, Irã.	3	Árabe	Mashhad, Irã	
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. **al-Risāla al-Muhītīyya**. Kitābkhān-i Showrā-ye Mellī (Biblioteca Nacional do Parlamento), n.1146, n.1428, n.5499. Teerã, Irã.	3	Árabe	Teerã, no Irã	
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. **al-Risāla al-Muhītīyya**. Majlis shūrā (Assembleia Consultiva), Teerã, Irã.	1	Árabe	Teerã, Irã	
Al-Kāshī, Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd. **al-Risāla al-Muhītīyya.** Andrews Engineering Collection.	1	Árabe	Toronto, Canadá	

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Observemos que todos os manuscritos são escritos em árabe, o que nos levou à busca de traduções do *Tratado da Circunferência* para línguas mais próximas às ocidentais. Encontramos a tradução do manuscrito árabe para o alemão e a tradução do árabe para o russo cujas referencias estão no Quadro 3:

[5] Islamic Scientific Manuscripts Initiative –ISMI. Endereço eletrônico: <https://ismi.mpiwg-berlin.mpg.de/search-witnesses?identifier=&collection=&repository=&city=&title=AL-RIS%C4%80LAH%20AL-MUE1%B8%A4%C4%AA%E1%B9%ACIYYAH&author=&items_per_page=20&page=0>. Acesso em: 08 nov. 2022.

Quadro 3 - Traduções do *Tratado* em línguas ocidentais.

	LÍNGUA
AL-KASHI, JAMSHID. In: ROZENFELD, B.; YUSHKIÉVITCH, A. Al-Kashanı. Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya. Moscow, 7, (1954), 327-379.	Em Russo
AL-KASHI, JAMSHID. In: LUCKEY P. Der Lehrbrief über den Kreisumfang. Adhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang, Berlin, No. 6 (1953).	Em alemão

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A estrutura do texto corresponde à lista abaixo, na qual fornecemos também os títulos de cada divisão do *Tratado*:

- Introdução;
- Primeira parte - Sobre a determinação da corda de um arco, que é a soma de um arco de uma corda desconhecida e do arco que é a metade de seu suplementar;
- Segunda parte - Sobre a determinação do perímetro de um polígono qualquer, inscrito no círculo e do perímetro semelhante circunscrito ao círculo;
- Terceira parte - Em quantas partes deve ser dividida a circunferência e quantas casas sexagesimais devem ser calculadas para que o perímetro obtido seja distinto do círculo dado numa grandeza menor do que um fio de cabelo;
- Quarta parte - Sobre as operações;
- Quinta parte - Sobre a determinação de um lado do polígono de 1 2 8 16 42 48 lados inscrito na circunferência;
- Sexta parte - Sobre a determinação dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito em um círculo e seu número de lados que é de 805 306 368 cada um
- Sétima parte - Sobre o que permite negligenciar, nas operações anteriores, as frações de excesso e falta;
- Oitava parte - Sobre a conversão do valor do círculo em dígitos indianos se a metade do diâmetro for um;
- Nona parte - Sobre o modo de usar duas tabelas;
- Décima parte - Sobre a determinação da diferença entre o que é comumente aceito e de uso comum e o que obtivemos;
- Conclusão - Sobre a demonstração dos erros de Abu-l-Wafa e Abur-Raihan (al-Biruni).

A seguir trazemos uma brevíssima descrição do conteúdo do *Tratado*.

Na parte introdutória, al-Kāshī inicia com uma saudação a Alá e ao profeta Maomé (Mohammad), seguindo a tradição da cultura islâmica. Em seguida tece comentários a respeito das aproximações de seus predecessores Arquimedes (287 A.E.C.–212 A.E.C.), Abu’l-Wafā al-Būzjānī (940–998) e Abu Rayhān al-Bīrūnī (973–1048).

Expõe seu objetivo de obter uma aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro com a precisão da largura "de um cabelo de cavalo" quando medida a "circunferência do universo" e, por fim, explica como está dividida a obra.

Na primeira parte do tratado, o autor enuncia e demonstra o teorema "sobre a determinação da corda de um arco, que é a soma de um arco de uma corda conhecida e do arco que é a metade de seu suplementar" (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329, tradução nossa), cujo esquema se pode ver na figura 3.

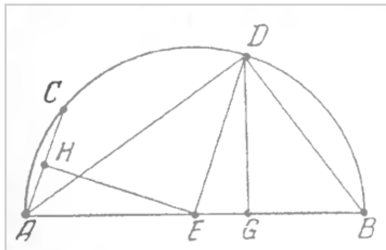


Figura 4
(**Fonte:** al-Kāshī, 1954, p.329)

O teorema acima mencionado se transposto para a Figura 4, equivale a dizer que:

No semicírculo ADB de raio r se $\widehat{AC}$ *for um arco cuja corda* $\overline{AC}$ *é conhecida e D for o ponto médio do arco suplementar de* $\widehat{AC}$*, pode-se encontrar o comprimento da corda* $\overline{AD}$.

O resultado encontrado por al-Kashi foi

$$r\,.\,(AB+AC)=AD^2, \text{ ou, } \quad \overline{AD}=\sqrt{r\,.\,(AB+AC)}$$

Este resultado é interessante, pois, na terceira parte do tratado, tomando o arco $\widehat{AC}=60^\circ$, obtém-se uma relação recorrente de rápida convergência, conforme disposto no Quadro 4.

Quadro 4 - Cálculo da medida do arco α_n

MEDIDA DE CADA ARCO
$\alpha_0=arc\,(AC)=60\,°$ (I)
$\alpha_1=arc\,(AD)=arc\,(AC)+\dfrac{arc\,(CB)}{2}=60\,°+60\,°=180\,°-60\,°=120\,°$
$\alpha_2=arc\,(AG)=60\,°+60\,°+30\,°=180\,°-\dfrac{60\,°}{2}=150\,°$

$\alpha_3 = arc\,(AJ) = 60° + 60° + 30° + 15° = 180° - \frac{60°}{4} = 180° - \frac{60°}{2^2} = 165°$
$\alpha_4 = arc\,(AP) = 60° + 60° + 30° + 15° + 7{,}5° = 180° - \frac{60°}{8} = 180° - \frac{60°}{2^3} = 172{,}5°$
$\alpha_5 = arc\,(AQ) = 60° + 60° + 30° + 15° + 7{,}5° + 3{,}75° = 180° - \frac{60°}{16} = ¿$ $180° - \frac{60°}{2^4} = 176{,}25°$
$\vdots$
$\alpha_n = 180° - \frac{60°}{2^{n-1}} = 180° - \frac{360°}{6.2^{n-1}} = 180° - \frac{360°}{3.\,2^n}$ (II)

A relação (II) obtida no Quadro 4 foi fundamental para que al-Kāshī atingisse o seu objetivo. Na terceira parte do *Tratado* o autor discute "em quantas partes deve ser dividida a circunferência e quantas casas sexagesimais devem ser calculadas para que o perímetro obtido seja distinto do círculo dado numa grandeza menor do que um fio de cabelo" (AL-KĀSHĪ 1954, p. 332, tradução nossa) e chega à conclusão de que para atender a precisão exigida por ele próprio, a circunferência deve ser dividida em $3\ x\ 2^{28}$ partes.

Nas partes quatro, cinco e seis do *Tratado* são apresentados os cálculos numéricos para obtenção dos valores procurados:

- A parte cinco é dedicada ao cálculo do valor do lado do polígono inscrito uma vez que se conhece o diâmetro (600.000 o diâmetro da Terra) e o número partes ($3x2^{28}$) pelo qual deve ser dividida a circunferência.
- A sexta parte é sobre a determinação dos perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito no círculo e seu número de lados que é de 805 306 368 cada um. O autor multiplica o comprimento do lado dos polígonos inscrito e circunscrito pela quantidade de lados ($3\ x\ 2^{28}$) e obtém os perímetros dos respectivos polígonos; em seguida, faz a média aritmética dos perímetros obtidos alcançando assim sua aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, cujo valor em números sexagesimais é de 6, 16; 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50, com nove casas sexagesimais de precisão.

Nas partes sete, oito, nove, dez e conclusão, al-Kāshī mostra detalhadamente que o seu método de arredondamento não afeta o resultado final da aproximação. Faz a conversão de sua aproximação do sistema sexagesimal para o sistema decimal. Apresenta uma tabela com os múltiplos da sua aproximação multiplicados de 1 a 10. Em seguida, compara a sua aproximação com o que a que era utilizada até então e mostra que a sua era mais precisa. Por último, continua suas considerações sobre as aproximações de Abu'l-Wafā al-Būzjānī e Abū Rayhān al-Bīrūnī, que ele havia mencionado na parte inicial do tratado, e mostra mais uma vez que sua aproximação é mais precisa.

5. Conclusões

Sobre o *Tratado da Circunferência* de al-Kāshī se pode tecer um sem-número de reflexões e conclusões, o que pode ser feito com base em um estudo histórico-matemático aprofundado da obra. Tal estudo ainda está em andamento e no momento, o propósito do presente artigo é apresentar ao leitor a tradução em português dessa obra histórica. Sendo assim, vamos nos ater a um aspecto distintivo do *Tratado* que salta aos nossos olhos se o examinarmos com atenção.

O problema central do *Tratado* era o cálculo do valor de uma grandeza com um grau de precisão muito alto para a época em que foi formulado, uma época que não contava ainda com os meios computacionais modernos. Sendo assim, o método de resolução procurado teria de dar conta da convergência rápida dos valores obtidos no processo iterativo para uma solução que estivesse nos limites da precisão exigida. Dizendo de outra forma, foi preciso encontrar um meio de realizar o cálculo do perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito com mais de oitocentos milhões de lados dentro das possibilidades existentes no século XV.

Al-Kāshī, conhecido por ser um brilhante calculista, soube propor um caminho pelo qual o processo iterativo exigia somente 28 passos, o que fez que encontrar a solução se tornasse exequível.

Bibliografia

AL-KĀSHĪ, JAMSHID. O tratado sobre a Circunferência. Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya. Moscow, 7, (1954), 327–379. (Em russo)

AL-KĀSHĪ, JAMSHID. In: LUCKEY P. Der Lehrbrief über den Kreisumfang. Adhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang, Berlin, No. 6 (1953). (Em alemão)

AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Traktat ob Okruzhnosti (Tratado da Circunferência). In: ROZENFELD, B. Al-Kashanı. Istorico-Matematicheskie Issledovaniya (Pesquisa Histórica e Matemática). Moscow, v.7, p. 327–379, 1954.

AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Letter of al-Kāshī. In: KENNEDY, E.S. A Letter of Jamshid al-Kashi to His Father: Scientific Research and Personalities at a Fifteenth Century Court. Orientalia. v. 29, n. 2, p. 191–213, 1960.

AL-KĀSHĪ, Ghiyāth. Letter of al-Kāshī. In: BAGHERI, Mohammad. A Newly Found Letter of al-Kāshī on Scientific Life in Samarkand. Historia Mathematica. n. 24, p. 241–256, 1997.

BERGGREN, J. L. 2003. *Episodes in the mathematics of medieval islam*. Springer-Verlag Inc. New York, 2003.

DOLD-SAMPLONIUS, Y. Practical Arabic Mathematics: measurement the muqarnas by al-Kashi. *Centaurus* 35 (3-4), 193–242, 1992.

FAZLIOĞLU, İhsan. The Samarqand mathematical-astronomical school: a basis for Ottoman philosophy and science. Journal for the History of Arabic Science / *Majallat Tārīkh al-ʿUlūm al-ʿArabīyah* , n.14 i-ii, p. 3-68. ISSN: 0379-2927, University of Aleppo, Syria, 2008.

MATVIEVSKAYA, Galina. 1993. History of Medieval Islamic Mathematics: Research in Uzbekistan. *Historia Mathematica*, n. 20, p.239–246, 1993.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. Ghiyāth al-din Jamshīd Mas'ūd al- Kāshī. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, 1999. Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/> Acesso em: 27 jul. 2022.

RÍBKIN, G. F.; YUSHKIÉVITCH, A. P. 1954. Apresentação do volume 7. Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya. Moscow, 7, (1954), 5–7. (Em russo)

ROZENFELD, B; YOUSCHEVITCH, P. 1973. Al- Kāshī. In: C.G. Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography*, vol.7, p.255–262. New York. Scribner's Sons, 1973.

SUTER, H.1900. Die Mathematiker und Astronomen und ihre Werke (Os matemáticos e astrônomos e seus trabalhos). *Abhandl zur Geschichte dermathematischen Wissenschaften* (Tratado sobre a história das ciências matemáticas), Heft 10, 173–174.

YAZDI, H.; REZVANI, P. Chronology of the Events of the Samarqand "Observatory and School" Based on some Old Persian Texts: a Revision. Suhayl**.** *International Journal for the History of Exact and Natural Sciences in Islamic Civilization*, vol. 43, Barcelona, 2015, p.119–147.

Bernadete Morey

Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECM – UFRN - Brasil

E-mail: bernadetemorey@gmail.com

Kaline França

Instituto Federal de Educação do Rio Grande do Norte – IFRN – Brasil

E-mail: kaline.andreza@hotmail.com

6. TRADUÇÃO DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KASHI (1380–1429)

TRATADO SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA

p. 327[6]

Louvemos a Alá, possuidor do conhecimento sobre a relação do diâmetro com a circunferência, sabedor da grandeza do simples e complexo, criador da terra e do céu, criador da luz nas trevas. Graça e paz esteja com Muhammad Mustafá, centro do círculo dos profetas e circunferência cujo diâmetro é indicação do caminho da verdade e da justiça, assim como à sua descendência e seus amigos puros, desejamos o bem.

Depois [disso]: Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmūd Tabīb Kāshānī[7], médico de Kāshān, chamado de Ghiyāth, criação de Alá o altíssimo, [esperançoso] em seu perdão e em que Alá melhore seu destino, diz:

Arquimedes demonstrou que a circunferência supera o diâmetro triplo em menos que um sétimo do diâmetro e mais do que dez, setenta e um avos do diâmetro. A diferença entre estas duas [frações] é um quatrocentos e noventa e sete avos. Por isso, no círculo de diâmetro quatrocentos e noventa e sete cúbitos, juntas de bambu ou farsang, o comprimento da circunferência é desconhecido e dúbio nos limites de um cúbito, uma junta de bambu ou um farsang e no maior círculo da esfera terrestre, tal incógnita se encontra nos limites de cinco farsangs, uma vez que seu diâmetro é aproximadamente igual a cinco vezes tal quantidade de farsangs. Já no cinturão do zodíaco, a dita incógnita situa-se nos limites consideravelmente maiores do que cem mil farsangs. Tais grandezas já são grandes para a circunferência, maior ainda serão para a medição de áreas. Na verdade, ele [Arquimedes] determinou o perímetro do polígono de noventa e seis lados inscrito na circunferência, menor
que a circunferência, uma vez que cada um de seus lados é menor que o arco do qual ela é corda e, portanto, a soma de todos os lados

p. 328

[do polígono] é menor que a circunferência do círculo [no qual está inscrito o polígono], e ele [Arquimedes] determinou também o perímetro do polígono circunscrito de modo semelhante ao primeiro, e na primeira asserção do primeiro livro de sua composição ele demonstrou que tal perímetro é maior que a circunferência do círculo, sendo que a diferença entre eles [perímetro do polígono inscrito e circunscrito] é tal como dada acima.

Abu'l-Wafā Būzjānī obteve, por meio de cálculo aproximado, a corda de metade de uns trezentos e sessenta avos da circunferência em partes que o diâmetro é cento e vinte e, multiplicando isto por setecentos e vinte, obteve o perímetro do polígono inscrito. Ele determinou também o perímetro do polígono circunscrito semelhante e afirmou que se o diâmetro for cento e vinte, então a circunferência será 376 mais uma fração maior que 0;

---

[6] No canto superior esquerdo de cada página, anotamos o número da página do texto russo que serviu de base para a tradução para o português.

[7] Kāshānī indica a procedência, ou seja, aquele que veio de Kāshān (ou nasceu em Kāshān). No entanto, o autor do Tratado da Circunferência é mais conhecido como Jamshīd al- Kāshi e não al-Kāshānī.

59, 10, 59 e menor que 0; 59, 23, 54, 12 onde a diferença entre essas duas quantidades [frações] é 0; 0, 12, 55, 12. Para o maior círculo da terra isto seria mil cúbitos. Sendo que ele se enganou ao considerar o tamanho da corda de metade de um [360°] partes, igual a 0 31 23 55 54 55. Está incorreto: o [valor] correto é 0 31 24 56 58 36, como mostraremos mais à frente.

Abu Rayhān al-Bīrūnī obteve a corda de dois trezentos e sessenta avos da circunferência. Ele obteve o perímetro do polígono de cento e oitenta lados inscrito [regular] igual a 6; 16, 59, 10, 48, 0, enquanto o perímetro do semelhante circunscrito [regular] era 6; 17, 1, 58, 19, 6. Supondo a circunferência do círculo igual à metade da soma desses dois perímetros, ele passou de frações com denominador [sexagesimal] para os números indianos, tomando o diâmetro como a unidade. Isto faz com que para o círculo igual ao maior círculo da terra, seja aproximadamente igual a um farsang. Neste cálculo ele enganosamente tomou a corda de dois [trezentos e sessenta avos] partes como sendo 0; 2, 5, 39, 43, 36, enquanto o correto seria 0; 2, 5, 39, 26, 22. No entanto, na tabela de senos [incluída] no *Cânone Mas'ud*, ele tomou o seno de um [trezentos e sessenta avos], ou seja, metade da corda de duas partes, como sendo 0; 1, 2, 49, 43, o que é correto, enquanto no dobro se tem um erro.

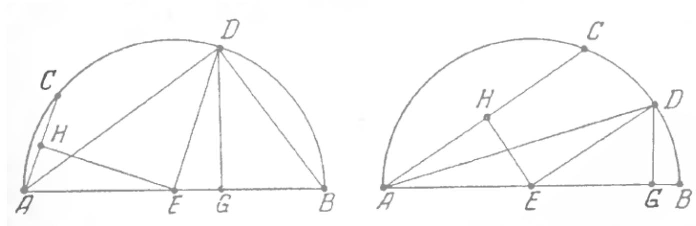
p. 329

Uma vez que tais operações levam a erros, queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre , a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para círculo menor que este seja ainda menor.

Compus o presente tratado contendo tal determinação, dei-lhe o título de *Tratado sobre a Circunferência* e o dividi em dez partes e conclusão. Rogo ao amado e generoso Alá que nos conduza pelo caminho da verdade.

PRIMEIRA PARTE
SOBRE A DETERMINAÇÃO DA CORDA DE UM ARCO, QUE É A SOMA DE UM ARCO DE UMA CORDA DESCONHECIDA E DO ARCO QUE É A METADE DE SEU SUPLEMENTAR

Digo que: uma superfície [retangular] [construída] na soma do diâmetro e da corda de cada arco menor que o semicírculo e na metade do diâmetro é igual ao quadrado da corda do arco que é igual à soma do primeiro arco e a metade de seu suplemento ao semicírculo. A fim de demonstrar, construamos o semicírculo ACB de centro E na linha AB; traçamos uma corda arbitrária AC; [o arco] BC que é o suplemento de AC dividimos ao meio encontrando o ponto D; ligamos A e D. Então a asserção [diz]: a superfície na metade do diâmetro e a soma AB e AC é igual ao quadrado AD.



Demonstração: Traçamos BD. Então o ângulo ADB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] d'Os Elementos.

p. 330
A seguir baixamos do ponto D a perpendicular DG à linha AB. Obtém-se os triângulos DBG e DAG, semelhantes ao triângulo ADB pela oitava proposição do [livro] seis d'Os Elementos. Por isso, o diâmetro AB está para AD assim como AD está para AG e pela proposição dezenove do [livro] sete dos Elementos, a superfície no diâmetro é igual ao quadrado de AD.

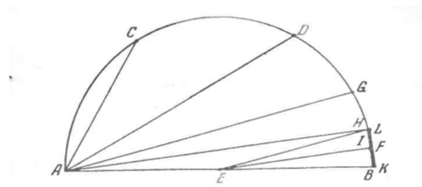
A seguir, pelo ponto H traçamos a perpendicular HE ao segmento AC. Então H será ponto médio de AC pela proposição três do terceiro livro de Os Elementos. Ligamos os pontos ED. Uma vez que a medida do ângulo BAC é metade do arco CB, a mesma do ângulo BED, estes dois ângulos [BAC e DEG] são iguais. Por isto o triângulo AHE e EGD são iguais, uma vez que eles têm os ângulos retos H e G, ângulos iguais em E, A e lados iguais AE e ED. Portanto, o lado EG é igual ao lado AH, que é metade de AC e a superfície sobre AG, ou seja, a soma da metade do diâmetro e EG é igual à metade de AC e sobre o diâmetro é igual ao quadrado de AD. Uma vez que a superfície sobre uma linha e sobre a metade de outra é igual superfície sobre a metade da primeira e sobre a outra inteira, então a superfície sobre a soma do diâmetro e o dobre de EG, i.e., sobre a soma do diâmetro e AC e sobre a metade do diâmetro é igual ao quadrado de AD. Isto é o queríamos [demonstrar].

Se AC é expresso nas partes em que a metade do diâmetro é sessenta, some o diâmetro a ele e adicione um novo dígito [sessenta]. Então o resultado será o quadrado de AD.

SEGUNDA PARTE
SOBRE A DETERMINAÇÃO DO PERÍMETRO DE UM POLÍGONO QUALQUER, INSCRITO NO CÍRCULO E DO PERÍMETRO SEMELHANTE CIRCUNSCRITO AO CÍRCULO

Construamos no segmento AB o semicírculo ACB de centro E suponhamos que [o arco] AC seja um sexto da circunferência. Então a corda AC será a metade do diâmetro pela proposição quinze do quarto [livro] d'*Os Elementos.* Em seguida dividamos ao meio [o arco] CB, que é o suplemento [do arco] AC obtendo assim o ponto D. Dividamos [o arco] DB ao meio, obtendo o ponto G. Depois, dividamos [o arco] GB ao meio obtendo H, e assim por diante o quanto se queira. Como já dissemos na seção anterior, como conhecemos a corda AC,

p. 331
também conheceremos a corda AD, de onde também será conhecida a corda AG, AH, e assim por diante.



Agora, se temos a corda AH e queremos determinar a corda BH subtraímos o quadrado de AH do quadrado do diâmetro e o que resta é o quadrado da corda BH, pois, o ângulo AHB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] d'*Os Elementos* e, consequentemente, o quadro de AB é igual aos quadrados AH e AB pelo "teorema da noiva". A seguir dividimos ao meio o arco BH no ponto F e ligamos EF. Esta linha divide ao meio a corda BH em I. Traçamos a tangente FLK ao círculo no ponto F, levantando por ambos os lados [do ponto F] duas perpendiculares FK e FL, ligamos EH e continuamos até L, assim como [continuamos] EB até K. Então KL será paralela a BH, uma vez que BEH é um polígono inscrito no círculo, KEL será o seu semelhante circunscrito. Sendo assim, os triângulos EKF e ELF são iguais entre si, e os triângulos EBI e EHI, por sua vez, são iguais entre si. Por isto, EI está para EF (que é metade do diâmetro) do mesmo modo que BH está para KL. Portanto, EI está para IF, que à sobra do último membro desta proporção em relação ao anterior, assim como, a corda BH está para a sobra de KL sobre BH, sendo esta relação a mesma relação da soma de todos os lados do polígono inscrito no círculo, cujo lado é BH, com todas as sobras dos lados do polígono circunscrito, cujo lado é KL sobre os primeiros lados. Logo, EI é a metade da linha AH,

p. 332
uma vez que os triângulos AHB e EIB são semelhantes em virtude de que, os ângulos H e I são retos e o ângulo Â, na circunferência que acompanha o arco BH, é igual ao ângulo central Ê, que acompanha o arco BF, que é metade do arco BH, e EB que é metade de AB. Desse modo EI é metade de AH. Por isso, uma vez que EI e BH ficarão conhecidos, as relações apontadas também serão conhecidas e, do mesmo modo, o polígono inscrito no círculo e o polígono circunscrito no círculo, também serão conhecidos. Era aí que queríamos chegar.

TERCEIRA PARTE
EM QUANTAS PARTES DEVE SER DIVIDIDA A CIRCUNFERENCIA E ATE QUANTAS CASAS SEXAGESIMAIS É NECESSÁRIA PARA EFETUAR AS OPERAÇÕES PARA QUE O PERÍMETRO OBTIDO SEJA DISTINTO DO CÍRCULO DADO NUMA GRANDEZA MENOR DO QUE UM FIO DE CABELO

Saiba que no círculo de diâmetro 600 000 vezes maior que o diâmetro da Terra, a circunferência também é 600 000 vezes também é maior que a circunferência da Terra. Neste círculo se verifica:

GRAU	Mil, seiscentos e sessenta e seis e dois terços da circunferência da terra
MINUTO	Aproximadamente vinte e sete e três quartos dessa mesma circunferência
SEGUNDO	Aproximadamente três mil setecentos e quatro farsangs, se a circunferência da Terra for tomada como oito mil farsangs
TERÇA[8]	Aproximadamente sessenta e dois farsangs
QUARTA	Aproximadamente um farsang e um terço de um décimo
QUINTA	Aproximadamente duzentos e seis cúbitos
SEXTA	Aproximadamente três cúbitos e um terço
SÉTIMA	Um dedo e um terço, ou seja, quarenta e oito fios de cabelo
OITAVA	Quatro quintos da grossura de um cabelo de cavalo, ou, ainda menos.

[8] As divisões minuto e segundo, mantivemos segundo o costume falado. A partir da terceira divisão, (terça, quarta, quinta, sexta, sétima e oitava) colocamos no feminino para evitar confundir com o número ordinal.

p. 333
Este é o caso se o círculo for trezentos e sessenta partes. Se ele tem trezentas e setenta e sete partes e mais fração, então sua oitava é muito menor que quatro quintos da grossura de um cabelo.

Portanto, se definirmos os perímetros de dois polígonos de forma que a diferença entre eles não atinja uma oitava, então a diferença entre eles não atingirá a largura de um cabelo, além disso, essa é a diferença entre cada um deles e a circunferência real do círculo.

Como sabemos, o perímetro do polígono interno está para o perímetro do polígono externo, assim como a distância do centro do círculo até o ponto médio do lado [do polígono interno] está para o seu complemento até a metade do diâmetro, isto é, para a distância do ponto médio do arco, cuja corda é o lado. Tal complemento é a flecha deste arco.

Sabe-se também que a relação da metade do diâmetro para com a circunferência é menor do que um sexto em menos que um terço de um sétimo de um sexto. Portanto, precisamos tomar no círculo um polígono com um número tão grande de lados que a relação da flecha do arco de cada lado para com o complemento da flecha até metade do diâmetro seja menor do que a relação de um sexto de oitavo para com a unidade em um terço de um sétimo deste sexto ou [ainda] maior, ou seja, para que tal relação seja igual a oito nonas ou menos. Então a corda do complemento do arco de cada lado será menor que o diâmetro por dezesseis nonas uma vez que dita corda é igual a duas vezes a distância especificada.

Portanto, a diferença do quadrado do diâmetro e seu quadrado é inferior a aproximadamente quádruplo de dezesseis nonas elevado a uma casa, isto é, menos de um sétimo e quatro oitavas. Portanto, a raiz deste, isto é, a corda, ou seja, cada um dos lados, não excede oito quartas.

Se dividirmos o terço do círculo vinte e oito vezes, obtém-se um arco de cinco quartas, quarenta e sete quintas, com fração naquelas partes onde todo o círculo é igual a trezentos e sessenta, como fica claro na tabela:

p. 334

Duplicações sucessivas do número de lados, começando com o triângulo						
Número	cinco vezes	quatro vezes	três vezes	duas vezes	uma vez	Lados
0						3
1						6
2						12
3						24
4						48
5					1	36
6					3	12
7					6	24
8					12	48
9					25	36
10					51	12
11				1	42	24
12				3	24	48
13				6	49	36
14				13	39	12
15				27	18	24
16				54	36	48
17			1	49	13	36
18			3	38	27	12
19			7	16	54	24
20			14	33	48	48
21			29	7	37	36
22		1	58	15	15	12
23			56	30	30	24
24		3	53	1	0	48
25		7	46	2	1	36
26		15	32	4	3	12
27		31	4	8	6	24
28	1	2	8	16	12	48

p.335

Divisões sucessivas de um terço da circunferência													
Graus	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	Nonas	Décimas	Décima primeira	Décima segunda	Décima terceira
12 0 60													
30 15													
7 3	30 45												
1 0	52 56	30 15											
	28 14	7 3	30 45										
	7 3	1 30	52 56	30 15									
	1 0	45 52	28 44	7 3	30 45								
		26 13	22 11	1 0	52 56	30 15							
		6 3	35 17	30 45	28 14	7 3	30 45						
		1 0	38 49	52 26	37 18	1 30	52 56	30 15					
			24 12	43 21	9 34	15 37	28 44	7 3	30 45				
			6 3	10 5	47 23	18 39	52 26	1 0	52 56	30 15			
			1 0	32 46	41 20	49 54	43 51	0 30	28 14	7 3	30 45		
				23 11	10 35	27 13	25 42	45 52	7 33	1 30	52 56	30 15	
				5	47	36	51	26	16	45	28	7	30

p. 336

Sem dúvida, a corda deste arco é menor que sete quartas uma vez que a cada corda de qualquer arco, dado que a circunferência é trezentos e sessenta e o diâmetro é cento e vinte, não excede o arco em um terço de um sétimo dele. Por isso, nós inscreveremos no círculo um tal polígono cujo número de lados é igual a oitocentos e cinco milhões e trezentos e sessenta e oito, e seu expoente [i.e., sua representação na base 60] é 1 2 8 16 12 48.

Uma vez que a primeira ordem deste número é de potência cinco, precisamos encontrar o tamanho de um lado de forma que a parte desprezada da fração não saia dos limites [da unidade] da ordem das décimas terceiras; porque se nós multiplicarmos (o lado) por esse número, a parte desprezada da fração no perímetro não ultrapassa o limite de uma oitava, porque a multiplicação da ordem de expoente cinco[9] com a ordem décima terceira dá oitavas.

Uma vez que a primeira ordem do número que representa um lado é menor que sete quartas, a sua extremidade prolonga-se até o tredécimo, então multiplicando algo menor que sete quartos por um tredécimo, obtém-se menos que sete na posição dezessete e assim a diferença (isto é, o erro) para o quadrado do lado não deve atingir essa quantidade ($7\,x\,60^{-17}$) do mesmo modo que para o seu suplemento correspondente, e a fim de que se obtenha uma diminuição correspondente a uma ordem (do número), e assim por diante até onde se inicia os cálculos. Portanto, obtém-se o que se procura se definirmos a corda pelo método indicado por nós nos dois parágrafos precedentes, até que o perímetro de um polígono cujo número de lados 1 2 8 16 12 48, e vamos realizar as operações até a ordem 18.

QUARTA PARTE
SOBRE AS OPERAÇÕES

Nós somamos o diâmetro 2 0 ao lado 1 0 do hexágono, obtendo 3 0, aumentamos este valor em uma ordem, obtendo 3 0 0. Extraímos a raiz, adicionamos a ela (a raiz) 2 0 e escrevemos [o resultado] na ordem e depois tomamos a raiz deste mesmo valor; vamos fazer isso vinte e oito vezes.

[9] Ordem de expoente cinco = 60^5; ordem décima terceira = $\frac{1}{60^{13}}$; a multiplicação delas dá $\frac{1}{60^8}$ ou seja, oitavas.

p. 337

Passamos de um cálculo para o seguinte depois de o refazermos duas ou três vezes. Além disso, nós nos asseguramos pela [verificação da conta], multiplicando a raiz por si mesma, repetindo duas ou três vezes e acrescentando o resto da operação à segunda multiplicação. [Então] se o cálculo estiver correto, a soma torna-se igual ao número.

Nós verificamos e nos asseguramos da correção [dos cálculos] porque, caso se cometa um erro, ele iria aumentar mais e mais.

Como existe uma grande quantidade de cifras, nós não usamos cifras desnecessárias. O método de extração de raízes e elevação da raiz ao quadrado – de nossa própria invenção- é o método mais fácil neste assunto. Nesta seção, incluímos as tabelas dos cálculos para que sirva de modelo para os calculistas e um caminho indicativo para aqueles que querem verificar a sua exatidão de cálculos. Estas são as tabelas [ver. pp. 338-345]:

p. 338

Primeira operação da qual se obtém a corda do terço da circunferência, isto é, a corda do suplemento de um sexto

Elevado a um		Graus		Minutos		Segundos		Terças		Quartas		Quintas		Sextas		Sétimas		Oitavas		Nonas	
	1		43		55		22		58		27		57		56		0		44		25
Escala (ordem)	Elevada a dois	Elevada a um	Graus	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	Nonas	Décimas	Décima primeira	Décima segunda	Décima terceira	Décima quarta	Décima quinta	Décima sexta	Décimo sétimo	Décimo oitavo
	3 1	0	0																		
(47)	2 1	56	49								1 1	49 47	48 23	49 13	59 44	43 24	34 53	47 51	7 52	9 45	35 54
(18)		3 3	11 9	40	25							2 2	25 25	36 29	15 32	18 9	40 51	55 9	14 6	23 25	41 2
(2)			1 1	19 16	35 12	28	5							6 3	43 27	8 50	49 45	46 56	7 55	58 55	39 52
54				3 3	22 20	31 55	56 3	28	4					3 3	15 13	18 59	3 22	39 53	12 8	2 12	47 8
11					1 1	36 33	52 31	31 50	56 40	24	9				1 1	18 16	40 12	56 36	3 50	50 52	39 30
6						3 3	20 17	41 27	15 13	35 39	51 4	12	9			2 2	28 25	19 29	12 32	58 9	9 51
24							3 3	14 13	1 59	56 22	46 53	47 8	51 11	16	16		2 2	49 46	40 16	48 36	17 46
36									2 2	33 32	53 25	39 13	39 41	43 45	44 0		8	3 3 32	24 20 3 16	11 55 16	31 4 27
13										1 1	28 26	25 36	57 9	58 8	43 43	1 18	51 16	27 40	44 36	50	25
											1	49	48	49	59	43	34	47	7	9	35

31 décimas
42 undécimas
1 duodécimas
56 décimas terceiras
22 décimas quartas
42 décimas quintas
48 décimas sextas
58 décimas sétimas
57 décimas oitavas

p.339

43											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	25	
33										3	27	50	45	56	55	55	52	0	44			
									3	27	50	45	56	55	55	52	0					
51								3	27	50	45	56	55	54	56				3	27	50	45
56							3	27	50	45	56	54	57					3	27	50	45	56
31						3	27	50	45	56	27						3	27	50	45	56	55
5					3	27	50	44	58							3	27	50	45	56	55	55
43				3	27	50	22								3	27	50	45	56	55	55	52
25			3	26	55									3	27	50	45	56	55	55	52	1
		2	43										3	27	50	45	56	55	55	52	1	28
	1											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	50

																		0	38			
																	0	48	41	34		
			Verificação pelo recurso de elevar ao quadrado													0	42	34	24	53	10	16
															0	22	30	6	44	0	21	
														0	56	15	46	38	30	17	36	56
													0	1	40	8	20	10	15	24	46	24
												0	42	0	43	51	20	8	4	40	36	21
											0	31	30	6	0	55	20	32	21	16	18	54
										0	25	22	13	38	30	0	22	54	8	9	54	40
									0	44	17	55	28	25	15	24	0	58	25	12	20	54
								0	0	31	32	22	55	11	22	40	36	0	27	53	12	20
							0	56	0	0	40	20	9	10	29	58	18	54	0	57	52	16
						0	57	40	8	0	0	16	8	24	10	13	57	39	54	0	56	0
					0	27	40	51	51	20	0	0	42	32	11	15	29	27	39	12	0	0
				0	58	19	21	52	15	20	32	0	0	19	48	23	45	28	56	0	0	1
			0	22	41	34	24	45	20	54	54	8	0	0	41	48	23	20	0	0	30	48
		0	55	15	46	53	10	9	54	55	6	25	12	0	0	41	4	0	0	22	44	17
	0	43	39	25	20	10	21	16	26	6	25	39	53	12	0	0	0	0	18	20	12	55
		44	35	4	47	25	57	31	57	53	55	2	55	3	51	59	59	43	50	16	34	
		44	35	4	47	25	57	31	57	53	55	2	55	3	51	59	59	43	50	16	34	
	1	30	49	50	25	8	4	56	4	12	9	54	9	52	16	0	0	32	16	10	25	
																			3	16	27	
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	(1)	*(1)*	*2*	*2*	*2*	*4*	*2*	*3*	*3*	*4*		*3*	*5*	*6*	*6*	*7*	*7*	*6*	*(7)*	*(7)*		

p.340

Segunda operação, da qual se obtém a corda do suplemento da metade de um sexto da circunferência																						
1 Elevado 1 vez		55 Graus		54 Minutas		39 segundas		57 Terças		25 Quartas		2 Quintas		41 Sextas		7 Sétimas		56 Oitavas		38 Nonas		3 décimas 9 décimas primeiras 14 décimas segundas 51 décimas terceiras 43 décimas quartas 4 décimas quintas 22 décimas sextas 44 décimas sétimas 46 décimas oitavas
Escala (ordem)	Elevada 2 veses	Elevado uma vez	Graus	Minutas	Segundas	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	Nonas	Décimas	Décimas proimeiras	Décimas segundas	Décimas terceiras	Décimoas quartas	Décimas quintas	Décimas sextas	Décimas sétimas	Décimas oitavas	
	3 1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57		
	2 2	40	25									12 11	11 35	11 27	49 59	3 44	43 30	46 16	39 6	36 47	56 39	48
55		3 3	30 27	48	36								35 34	43 46	49 23	19 59	13 13	30 30	32 48	49 20	16 22	12 59
12			2 2	34 30	22 40	37	21							57 54	25 5	19 30	59 38	59 47	44 41	28 15	53 11	13 42
57				3 3	41 40	50 13	36 51	0	9					3 3	19 17	49 2	21 55	12 55	3 36	13 34	41 33	31 55
10					1 1	36 36	45 35	55 33	51 17	40	25				2 2	46 46	25 8	16 21	26 16	39 17	7 53	36 51
43							10 7	22 43	34 38	4 39	49	40	4				16 15	55 27	10 17	21 19	13 39	45 20
19							2 2	38 38	55 24	24 42	10 36	51 28	38 13	12	1		1 1	27 25	53 0	1 5	34 18	25 6
50									30 27	41 2	34 45	23 19	24 23	49 50	55 37	34	49	2 2	52 50	56 0	16 10	19 36
34									3 3	38 36	49 22	4 2	0 35	59 10	17 35	47 0	53 45	56	2 16	56	5	43
34										2 2	27 26	1 49	25 19	48 36	32 43	47 43	7 24	52 6	42 3	20	4	

p. 341

Continuação da tabela da pág. 340

44											3	12 51	11 49	11 19	49 54	3 50	43 5	46 22	39 15	36 52	56 38		
28 24										3	51	59	19	54	50	5	22	14	56				
									3	51	49	19	54	50	5	22	7						
35 51								3	51	49	19	54	50	4	41				3	51	49	19	54
							3	51	49	19	54	50	2					3	51	49	19	54	50
24 1						3	51	49	19	54	25						3	51	49	19	54	50	5
					3	51	49	18	57							3	51	49	19	54	50	5	22
23 48				3	51										3	51	49	19	54	50	5	22	15
			3	50	54									3	51	49	19	54	50	5	22	15	53
		2	35										3	51	49	19	54	50	5	22	15	53	16
	1											3	51	49	19	54	50	5	22	15	53	16	3

																	0	0 22	44 40	20		
															0	0 43	4 3	20 40	10 19	39 48	36 28	36
													0	0 14	51 46	39 45	25 38	3 42	36 2	14 36	18 20	42 54
											0	0 3	9 8	12 15	50 12	45 36	54 33	27 9	57 40	3 51	48 1	9 40
									0	0 56	38 34	2 50	45 2	8 42	6 5	9 51	6 13	48 18	27 21	17 15	55 1	0 26
							0	0 41	7 6	51 25	20 50	34 24	12 24	1 42	57 2	8 51	33 3	5 45	50 5	1 28	42 34	29 51
					0	0 25	2 1	37 50	35 36	6 54	18 4	36 33	24 53	36 12	6 15	1 50	15 0	0 6	18 6	9 9	34 1	6 38
			0	0 39	57 52	22 15	55 22	1 30	48 1	26 18	39 36	6 57	39 2	23 55	20 1	1 52	16 25	2 58	3 0	1 21	3 8	13 24
	0	0 55	54 49	35 30	45 35	51 6	18 37	16 3	15 23	1 45	54 0	17 50	5 1	0 22	14 4	38 47	16 6	4 32	26 35	2 28	48 1	6 54
		56 56	44 44	47 47	11 11	1 1	18 18	0 0	55 55	47 47	0 0	15 15	48 48	46 46	57 57	40 40	56 56	28 28	19 19	48 48	25 25	8 8
0	1	50	25	48	36	25	21	54	9	10	25	0	4	28	1	0	49	52	16 2	24 26	4 5	0 44
	3	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57	0	0
		(1)	*(1)*	*3*	*2*	*2*	*3*	*2*	*4*	*5*	*5*	*3*	*4*	*4*	*8*	*4*	*6*	*7*	*5*	*6*	*7*	

p. 342

A vigésima sétima operação, da qual se obtém a corda do suplemento de arco, que é um 31 4 8 6 24 avos da circunferência																						
1 Elevado a 1		59 Graus		59 Minutos		59 Segundos		59 Terças		59 Quartas		59 Quintas		59 Sextas		59 Sétimas		59 Oitavas		23 Nonas		11 décimas 28 décimas primeiras 50 décimas segundas 3 décimas terceiras 14 décimas quartas 31 décimas quintas 19 Décimas sextas 38 décimas sétimas 43 décimas oitavas Casas corretas
Escala (ordem)	Elevado duas vezes	Elevado uma vez	Graus	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	Nonas	Décimas	Décima primeiras	Décima Segundas	Décimas terceiras	Décimas quartas	Décimas quintas	Décimas sextas	Décimas sétimas	Décimas oitavas	
	3	59	59	59	59	59	59	59	59	67	33	45	55	20	12	58	5	18	35	15		
	3	59							59	56	0							0	1			
										1 1	32 31	45 59	55	20	12	58	5	18	34 59	22	49	
											0	45 43							34	52 59	11 46	18 1
												1 1	51							52	24 59	31 59 25 38
													3 3	19								
														0 0	56							
															2 2	4						
																1 1	16					
																	2 2	32				

p. 343

Continuação da tabela pág.342

																		2				
																		4	0			
																	4	0				
																4	0					
															4	0						
														4	0							
													3	59								
												3	59								59	58
											3	59								59	58	46
										3	59								59	58	46	11
									3	59	59	59	59	59	59	59	58	59 59	58	28		
																		38				
																31	19 18	37 41	22 18	22 18	22 19	
														3	44 13	30 46	29 16	48 16	48 16	48 16	49 19	
												28	50 49	2 10	57 13	11 13	11 13	11 13	11 13	11 13	11 13	
										23	11 10	27 49	32 17	5 17	5 17	5 17	5 17	5 17	5 17	5 17	5	
										22	37 22	48 22	48 22	48 22	48 22	48 22	48 22	48 22	48	4	11 13	
										46 46	22 22	17 17	40 40	6 6	29 29	12 12	39 39	15 15	36 36	52 52	55 55	
	3	59						59	56	0							0	1 2	8 52	49 25	2 8	
	3	59						59	57	32	45	55	20	12	58	5	18	35	15	0	0	

p. 344

Vigésimo Oitavo Cálculo Dá a corda do complemento de um arco, que é um 1 2 8 16 12 48-th da circunferência																							
uma vez aumentado		Grau		Minutos		Segundos		Terços		Quartos		Quintos		Sextos		Sétimos		Oitavos		Nonos			
	1		59		59		59		59		59		59		59		59		59		50		
Libra	Duas vezes	Uma vez aumntado	Grau	Minutos	Segundos	Terços	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos	Nonos	Décimos	Décimo proimeiro	Décimo segundo	Décimo terceiro	Décimo quarto	Décimo quinto	Décimo sexto	Décimo sétimo	Décimo oitavo	47 52 12 30 48 37 49 54 40	
	3 3	59 59	59	59	59	59	59	59	59 59	59 56	23 0	11	28	50	3	14	31	19 0	38 1	43			
										3 3	23 19	11 59	28	50	3	14	31	19	37 59	1			
											3 3	11 7	59						38	41 59	20 44	56	49
												3 3	28 27	59						41	35 59	3 44	11 13
													0	50 47							35	18 59	58 56
														2 2	0							19 0	2 0
															3 3	12						19	
																2 2	28						
																	3 3	16					
																		3 3	36				

p. 345

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
4</td><td>4
0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
4</td><td>4
0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
3</td><td>4
59</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
59</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
3</td><td>3
59</td><td>59</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
59</td><td>59
40</td><td>41
47</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
3</td><td>3
59</td><td>59
59</td><td>59</td><td>59</td><td>59</td><td>59</td><td>59</td><td>58</td><td>59
59</td><td>58</td><td>50</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>54</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
37</td><td>49
48</td><td>53
11</td><td>6
4</td><td>6
4</td><td>6
4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
30</td><td>48
47</td><td>36
12</td><td>23
49</td><td>12
49</td><td>12
49</td><td>12
49</td><td>12
50</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
52</td><td>12
11</td><td>29
48</td><td>30
18</td><td>17
18</td><td>17
18</td><td>17
18</td><td>17
18</td><td>17
18</td><td>17
18</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>
50</td><td>47
46</td><td>51
13</td><td>8
4</td><td>20
4</td><td>20
4</td><td>20
4</td><td>20
4</td><td>20
4</td><td>20
4</td><td>20
4</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>49</td><td>10
49</td><td>57
49</td><td>57
49</td><td>57
49</td><td>57
49</td><td>57
49</td><td>57
49</td><td>57
49</td><td>57</td><td>
39</td><td>44
10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1
1</td><td>41
41</td><td>35
35</td><td>44
44</td><td>25
25</td><td>1
1</td><td>37
37</td><td>15
15</td><td>39
39</td><td>47
47</td><td>9
9</td><td>52
52</td><td>2
2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>59</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>59</td><td>56</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td>1
2</td><td>41
41</td><td>40
35</td><td>37
19</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>59</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>59</td><td>23</td><td>11</td><td>28</td><td>50</td><td>3</td><td>14</td><td>31</td><td>19</td><td>38</td><td>43</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="24">[Depois] subtrair este quadrado do quadrado do diâmetro, o seguinte permanece como o quadrado do lado:</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>36</td><td>48</td><td>31</td><td>9</td><td>56</td><td>45</td><td>28</td><td>40</td><td>21</td><td>17</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

p. 346

QUINTA PARTE
SOBRE A DETERMINAÇÃO DE UM LADO DO POLÍGONO DE 1 2 8 16 12 48 LADOS INSCRITO NA CIRCUNFERÊNCIA

O quadrado obtido no vigésimo oitavo cálculo:

<table>
<tr><td colspan="2">Quartas</td><td colspan="2">Quintas</td><td colspan="2">Sextas</td><td colspan="2">Sétimas</td><td colspan="2">Oitavas</td><td colspan="2">Nonas</td><td colspan="2">Décimas</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">59</td><td colspan="2">36</td><td colspan="2">14</td><td rowspan="9">33 décimas primeira
36 décimas segunda
19 décima terceiras
25 décimas quartas</td></tr>
<tr><td></td><td>Oitava</td><td>Nona</td><td>Décima</td><td>Décima primeira</td><td>Décima segunda</td><td>Décima terceira</td><td>Décima quarta</td><td>Décima quinta</td><td>Décima sexta</td><td>Décima sétima</td><td>Décima oitava</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3
6
3
6</td><td>48</td><td>31</td><td>9</td><td>56</td><td>45</td><td>28</td><td>40</td><td>21</td><td>17</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>48</td><td>16</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>15
12</td><td>8</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>3
2</td><td>1
49</td><td>55
52</td><td>31</td><td>16</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>12
11</td><td>3
55</td><td>14
54</td><td>12
26</td><td>30</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>7
7</td><td>19
16</td><td>46
49</td><td>10
29</td><td>20
59</td><td>9</td><td>36</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2
2</td><td>56
49</td><td>40
32</td><td>21
34</td><td>7
59</td><td>24
48</td><td>5
1</td><td>1
6</td></tr>
</table>

 RBHM, Vol. 23, nº 46, pp. 23–142, 2023

							6 6	47 40	46 25	7 22	35 29	8 3 3	4 4 5 1	
								7 7	20 16	45 49	5 29	3 4 5 9	5 3 3 1	
									3 3	55 50	35 32	3 5 4 7	2 2 3 0	
										5	2	4 7	5 2	
										12	8	2	3 0	
									12	8	2	2 9	5 9	
								12	8	2	2	5 9	1 2	
							12	8	2	29	29	1 2	1 4	
						12	8	2	29	58	36			
					12	8	2	28	59					
				12	8	2	14							
			12	8	1									

p. 347

		12	4											
	6													
									1	54				
							3	3 18	36 2	1 24	16 0	1 9		
					3	1 36	24 0	2 56	12 0	0 33	36 8	4 2 4	2 6 1 9	
			1	5 24	54 3	2 56	24 0	0 36	14 3	7 16	42 32	3 5 2	2 4 2	

												7	1	
	0	0 24	6 0	0 4	56 0	0 14	59 13	8 46	24 35	13 24	46 8	1 9 2 4	4 8 8	
		24 24	7 7	34 34	57 57	51 51	5 5	51 51	9 9	55 55	10 10	3 4 3 4	2 6 2 6	
0	3 6	0	16	0	1	3	16	58	1	21 5	36 2	3 4 7	1 6 5 2	
0	3 6	48	31	9	56	45	28	40	21	17	0	0	0	
				(1)	***1***	***2***	***2***	***2***	***2***	***3***	***2***	***2***		

SEXTA PARTE
SOBRE A DETERMINAÇÃO DOS PERÍMETROS DOS POLÍGONOS INSCRITO NO CÍRCULO E CIRCUNSCRITO AO REDOR DELE, QUE SÃO SEMELHANTES E CADA UM TEM 805 306 368 LADOS

Multiplicamos a raiz obtida na quinta seção, que é o tamanho de um lado, pelo número de lados do polígono indicado, que é o número 1 2 8 16 12 48.[10] Obtemos o perímetro do polígono inscrito no círculo em partes nas quais o diâmetro é cento e vinte.

[10] O número na base sexagesimal $1x60^5+2x60^4+8x60^3+16x60^2+12x60^1+48x60^0$ = 805.306.368.

p. 348

Multiplicando		6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25
	Multiplicador	Quartos	Quintos	Sextos	Sétimos	Oitavos	Nonos	Décimos	Décimo primeiro	Décimo segundo	Décimo terceiro	Décimo quarto
Cinco vezes levantadas	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25
Quatro vezes aumentou	2		12	8	2	29	59	12	29	7	12	38
Três vezes aumentou	8		0	48 0	0 32	8 1	7 52	52 4	1 48	52 4	4 24	48 2
Duas vezes levantadas	1 6			1	36 1	0 4	16 3	15 44	44 9	3 36	44 8	0 48
Uma vez levantada	1 2				1	12 0	0 48	12 2	11 48	48 7	2 12	48 6
número	4 8					4	48 3	0 12	48 11	47 12	12 28	11 48
produto		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46
		Uma vez levantada	Peças	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	nonas

Este [perímetro] é menor do que a circunferência do círculo, e como demonstramos na segunda parte, a razão entre esse perímetro e o excesso da soma dos lados do polígono circunscrito semelhante é igual à relação entre a da raiz do que se obteve na operação vinte e oito que é:

p. 349

Partes	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	Nonas	Décimas	Décima primeira	Décima segunda	Décima terceira	Décima quarta	Décima quinta	Décima sexta	Décima sétima	Décima oitava
59	59	59	59	59	59	59	59	59	55	23	56	6	15	24	18	54	57	20
Com o excesso, metade do diâmetro que é:									4	36	3	53	44	35	41	5	2	40

São quatro números que estão em proporção, sendo o segundo deles desconhecido. A primeira ordem do primeiro número – é elevado a um, a primeira ordem do quarto é nona (elevado a nove) e por isto a primeira ordem de seu produto é oitava e [a primeira ordem do quociente da divisão deste pelo terceiro [número] é nona]. O que vem depois das nonas nós não utilizamos; portanto, omitimos a maioria das cifras e dizemos que a razão de 6 17 está para o valor desconhecido assim como sessenta está para 4 36 décimas. Então multiplicamos o primeiro [número] pelo quarto e diminuímos uma ordem, obtendo-se vinte e nove nonas. Se adicionarmos isto ao perímetro do polígono inscrito, obtém-se o perímetro do polígono circunscrito:

Expoente	Partes	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas	Nonas
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	15

Isto é maior que a circunferência do círculo e o valor da soma do excesso e o defeito é vinte e nove nonas na suposição de que o diâmetro é cento e vinte. Assim, aonde a circunferência for trezentos e sessenta partes, este valor será certamente menor que vinte e nove nonas. Como já provamos na Terceira Parte, o tamanho de uma oitava da circunferência de um círculo cujo diâmetro é seiscentas mil vezes o diâmetro da Terra é menor do que quatro quintos da largura de um cabelo da crina de um cavalo, um sexto da largura de um grão médio de cevada. Então, algo menor que vinte e nove nonas é menor que dois quintos da largura de um fio de cabelo. Portanto, a diferença entre os dois perímetros mencionados, um dos quais

p. 350

é menor que a circunferência e o outro é maior que esta, não perfaz dois quintos da largura de um fio de cabelo. Portanto, se somarmos metade da diferença entre os perímetros dos dois polígonos ao menor e subtraí-lo do maior, ou ainda melhor, se arredondarmos o que estiver na ordem nona no menor [perímetro], ou seja, [adicionarmos] 14 nonas, e retirarmos nesta mesma ordem do maior, a saber, 15 nonas, então obtém-se:

Tamanho da circunferência, quando o diâmetro é cento e vinte									
Elevado a um	Partes	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

Portanto, a diferença entre este e o valor real [da circunferência] não supera um quinto da largura de um fio de cabelo da crina de cavalo de trabalho, ou seja, um sexto da largura de um grão médio de cevada, e era isso o que queríamos provar.

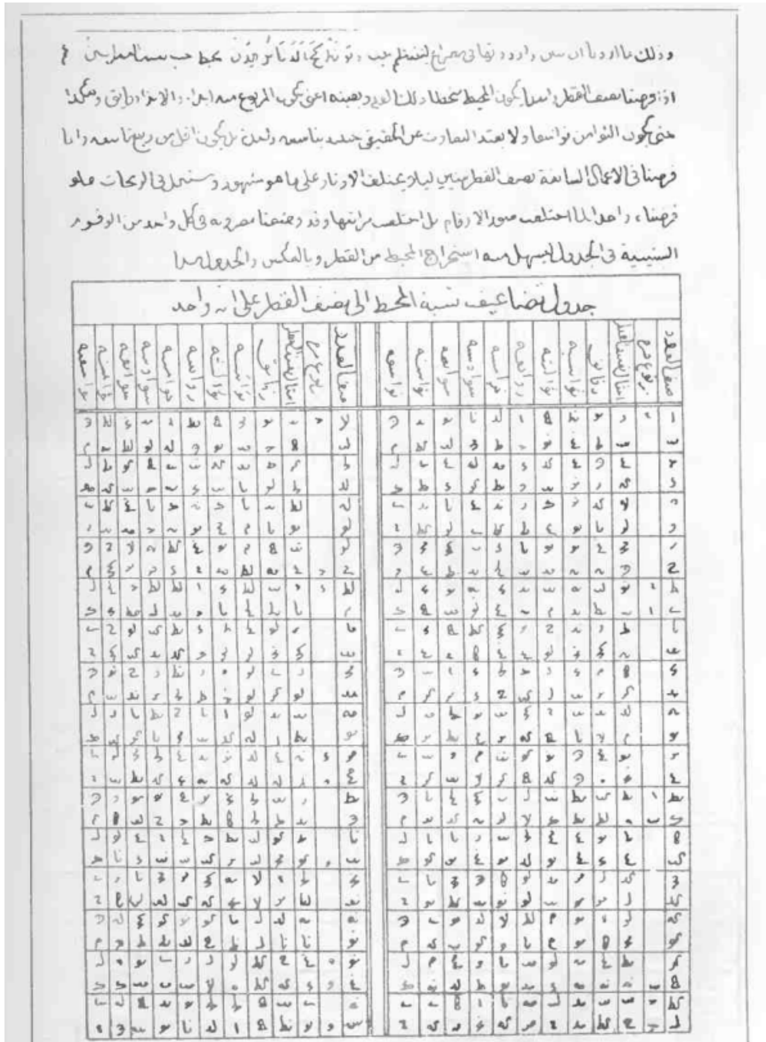
Eu exprimi isto em versos em estrofe dística (dois versos) abaixo:

wa yau naṭ kaḥ a lad nā mū fayadnu
muḥīṭun haiṯu niṣful-quṭri sīnu
6 16 59 28 1 34 51 46 14 50

- é a circunferência, contanto que metade do diâmetro seja 60. Assumindo metade do diâmetro igual a um, a circunferência será expressa por este mesmo número, mas rebaixado em uma ordem, ou seja, o que é elevado a um se torna partes, o que é parte se torna minutos, e assim por diante, até as oitavas que serão nonas. Nesse caso, a diferença do verdadeiro [valor] não ultrapassa uma nona, ou mais precisamente, será menor que um quarto de nona. Nas operações anteriores nós tomamos a metade do diâmetro valendo sessenta apenas para que as cordas não se diferenciem do que é usual e consta nas tabelas. Se, no entanto, adotarmos a metade do diâmetro valendo um, então as cifras (os valores para as cordas) não sofrerão alterações, mas mudarão apenas as suas ordens. Colocamos as multiplicações deste [número] em todas as cifras de base sessenta na tabela, para facilitar determinações da circunferência pelo diâmetro e vice-versa. (Ver tabela pág.352 e 353):

p. 351

Página 18 do manuscrito (verso): número 2 π com 10 casas sexagesimais em versos dístico para fins de memorização



Лист 18 об. Число 2π с 10 шестидесятеричными знаками, двустишье для его запоминания.

p. 352

Tabela dos múltiplos da relação da circunferência com a metade do diâmetro, supondo que este seja um

coluna do número	uma vez elevado	Quantas vezes a Metade do diâmetro	minutos	segundos	coluna do número	uma vez elevada	quintas	sextas	sétimas	oitavas	nonas
1	0	6	16	59	31	3	34	51	46	14	50
2		12	33	58	32		9	43	32	29	40
3		18	50	58	24	4	44	35	18	44	30
4		25	7	57	52	6	19	27	4	59	20
5		31	24	57	20	7	54	18	51	14	10
6		37	41	56	48	9	29	10	37	29	0
7		43	58	56	16	11	4	2	23	43	50
8		50	15	55	44	12	38	54	9	58	40
9	0	56	32	55	12	14	13	45	56	13	30
10	1	2	49	54	40	15	48	37	42	28	20
11		9	6	54	8	17	23	29	28	43	10
12		15	23	53	36	18	58	21	14	58	0
13		21	40	53	4	20	33	13	1	12	50
14		27	57	52	32	22	8	4	47	27	40
15		34	14	52	0	23	42	56	33	42	30
16		40	31	51	28	25	17	48	19	57	20
17		46	48	50	56	26	52	40	6	12	10
18		53	5	50	24	28	27	31	52	27	0
19	1	59	22	49	52	30	2	23	38	41	50
20	2	5	39	49	20	31	37	15	24	56	40
21		11	56	48	48	33	12	7	11	11	30
22		18	13	48	16	34	46	58	57	26	20
23		24	30	47	44	36	21	50	43	41	10
24		30	47	47	12	37	56	42	29	56	0
25		37	4	46	40	39	31	34	16	10	50
26		43	21	46	8	41	6	36	2	25	40
27		49	38	45	36	42	41	17	48	40	30
28	2	55	55	45	4	44	16	9	34	55	20

29 30	3 3	2 8	12 29	44 44	32 0	45 47	51 25	1 53	21 7	10 25	10 0

p. 353

Tabela dos múltiplos da relação da circunferência com a metade do diâmetro, supondo que este seja um											
coluna do número	uma vez elevado	Quantas vezes a Metade do diâmetro	minutos	segundos	coluna do número	uma vez elevada	quintas	sextas	sétimas	oitavas	nonas
		14 21	46 3	43 42	28 56	49 50	0 35	44 36	53 39	39 54	50 40
33 34		27 33	20 37	42 41	24 52	52 53	10 45	28 20	26 12	9 24	30 20
35 36		39 46	54 11	41 40	20 48	55 56	20 55	11 3	58 44	39 54	10 0
37 38	 3	52 58	28 45	40 39	16 45	58 0	29 4	55 47	31 17	8 23	50 40
39 40	4	5 11	2 19	39 38	13 41	1 3	39 14	39 30	3 49	38 53	30 20
41 42		17 23	36 53	38 37	9 37	4 6	49 24	22 14	36 22	8 23	10 0
43 44		30 36	10 27	37 36	5 33	7 9	59 53	6 57	8 54	37 52	50 40
45 46		42 49	44 1	36 35	1 29	11 12	8 43	49 41	41 27	7 22	30 20
47 48	4 5	55 1	18 35	34 34	57 25	14 15	18 53	33 24	13 59	37 52	10 0
49 50		7 14	52 9	33 33	53 21	17 19	28 3	16 8	46 32	6 21	50 40
51 52		20 26	26 43	32 32	49 17	20 22	38 12	0 52	18 4	36 51	30 20
53 54		33 39	0 17	31 31	45 13	23 25	47 22	43 35	51 37	6 21	10 0
55 56		45 51	34 51	30 30	41 9	26 28	57 32	27 19	23 9	35 50	50 40

57 58	5 6	58 4	8 25	29 29	37 5	30 31	7 42	10 2	56 42	5 20	30 20
59 60	 6	10 16	42 59	28 28	33 1	33 34	16 51	54 46	28 14	35 50	10 0

p. 354

SÉTIMA PARTE
SOBRE O QUE PERMITE NEGLIGENCIAR, NAS OPERAÇÕES ANTERIORES, AS FRAÇÕES DE EXCESSO E FALTA NA ÚLTIMA ORDEM

Saiba que na última ordem desses cálculos a diferença [isto é, o erro], não alcança uma unidade completa daquela ordem e não a supera até a última ordem do último cálculo.

Na verdade, na última ordem do primeiro cálculo ficou cinquenta e sete, e faltavam vinte [unidades] na ordem seguinte, isto é, na ordem dezenove, pois o resto segundo os cálculos foi 3 16 27 e se dividirmos o resto pela diferença dos dois quadrados, que foi de 3 27 50 45, obteremos 56 40. Um valor que aceitamos arredondando a fração para 57. O quadrado da segunda operação é deficiente nesta mesma quantidade, ou seja, faltam vinte, mas na décima oitava ordem. Se subtrairmos isso do restante da segunda operação i. e., 2 56 5, resta 2 55 45. Dividimos isso pela diferença entre os dois quadrados, que era de 3 51 49 e então teremos 45 28. Mas ali consideramos que dividindo 2 56 5 pela diferença dos dois quadrados e obtivemos 46, que é deficiente em trinta e dois na décima nona ordem. Por esta mesma regra vemos que a última ordem do terceiro cálculo tem deficiência seis
na ordem seguinte, o quarto tem excesso de quinze,
o quinto tem deficiência de vinte e oito,
o sexto tem deficiência de quinze,
o sétimo tem um excesso de vinte e dois,
o oitavo é deficiente em seis,
o nono tem deficiência em vinte e quatro,
o décimo tem excesso em dezoito,
o décimo primeiro é deficiente em quatro,
o décimo segundo tem excesso de doze,
o décimo terceiro é deficiente em cinco,
o décimo quarto é deficiente em dezesseis,
o décimo quinto é deficiente em dezessete,
o décimo sexto tem excesso em nove,
o décimo sétimo tem excesso de dezesseis,
o décimo oitavo tem excesso de oito,
o décimo nono tem deficiência em três,
o vigésimo tem deficiência em dezessete,
o vigésimo primeiro tem deficiência em quatorze,
o vigésimo segundo tem excesso em vinte e sete,

o vigésimo terceiro em três,
o vigésimo quarto em uma unidade,
o vigésimo quinto em dezoito,

P. 355

o vigésimo sexto, quinze, o vigésimo sétimo, dez, o vigésimo oitavo, vinte e seis, todos eles na ordem dezenove para a raiz e na ordem dezoito para o quadrado da operação seguinte; os últimos sete destes valores são excessos.

Portanto, o quadrado da operação vinte e oito tem excesso de dez, mas na décima oitava ordem. Por isso, a última ordem do excesso sobre ele do quadrado do diâmetro, isto é, dezessete na décima sétima ordem, é deficiente em dez [unidades] na décima oitava ordem.

E a última ordem da raiz que nós consideramos vinte e cinco, é deficiente em cinquenta e dois na décima ordem, e a última ordem do produto, ou seja, do perímetro, que nós consideramos quarenta e seis na nona ordem é deficiente em cinquenta e quatro na décima ordem e por isso é melhor que definamos a última ordem do lado do polígono como vinte e quatro e para o perímetro do polígono a última ordem quarenta e cinco. Aqui o arredondamos em quinze nonas e a desprezamos catorze nonas.

Expliquei isso amplamente, de modo a saber que negligenciar os excessos e deficiências na última ordem não chega a atingir um nono inteiro no valor da circunferência. Reunimos esses valores em uma tabela para que os copistas cometam menos erros. A tabela segue abaixo:

TABELA DO QUE SE DESPREZA NA ÚLTIMA ORDEM DA OPERAÇÃO		
Cálculos (operações)	O que se despreza	Falta ou excesso
1 2	20 32	Falta
3 4	6 15	Falta
5 6	28 15	Falta

P. 356

Continuação

7 8	22 6	Falta
9 10	24 18	Falta
11 12	4 12	Falta
13 14	5 16	Falta
15 16	17 9	Falta
17 18	16 8	Excesso
19 20	3 17	Falta
21 22	14 27	Falta
23 24	3 1	Excesso
25 26	18 15	Excesso
27 28	10 26	Excesso
	10 52	Falta
	54	Falta

OITAVA PARTE
SOBRE A CONVERSÃO DO VALOR CIRCUNFERÊNCIA EM CIFRAS INDIANAS SE METADE DO DIÂMETRO FOR UMA UNIDADE

Uma vez que a circunferência é igual a seis metades do diâmetro e mais fração que nós calculamos até a nona (ordem), converteremos essa fração para o denominador dez cinco vezes milhares repetidos, uma vez que uma fração deste denominador excede uma nona em não mais do que meia décima.[11] [Para facilitar a operação], fornecemos o produto disso para todos os nove números da tabela. Esta tabela é (Ver pág. 358 e 359):

[11] Al-Kāshī diz que uma vez que a fração foi calculada em nonas, isto é, em fração de denominador 60^9 podemos convertê-la em fração de denominador 10×1000^5.

p. 357

Página 20 do manuscrito (verso): número 2 π com 17 casas decimais em estrofe dística para fins de memorização

Лист 20 об. Число 2π с 17 десятичными знаками, двустишья для его запоминания.

p. 358

Tabela de múltiplos da relação entre a circunferência e o diâmetro

Tabela dos múltiplos da relação da circunferência para com o diâmetro								
Inteiros		Frações						
Seus décimos	Múltiplos da metade do diâmetro	Unidades de milhar, repetidas 5 vezes	Milhares repetidos 4 vezes			Milhares repetidos 3 vezes		
			centenas	dezenas	unida de	cente nas	deze nas	unida des
zero	seis	dois	oito	três	um	oito	cinco	três

p. 359

Tabela de múltiplos da relação entre a circunferência e o diâmetro									
frações									números
milhares de milhares			milhares			centen as	dezen as	unidad es	
Cente nas	dezenas	Unida des	cente nas	dezena s	unid ades				
zero	sete	um	sete	nove	cinc o	oito	seis	cinco	

p. 360

Saiba que o dois que está na última ordem (à direita) das frações ocupa a ordem dos minutos em relação aos seis inteiros, supondo que dez de tais minutos formam um todo. Se quisermos, podemos chamar essa ordem de décimos. O oito à direita estão no lugar de segundos, e nós os chamamos de segundos decimais. O três a (à direita do oito) ocupa a ordem das terças e nós os chamamos de terças decimais, e assim por diante, de acordo com as regras de cálculo dos astrônomos. Neste caso, partimos do denominador mais simples, ou seja, da unidade (com zeros). Esse método de cálculo com cifras indianas foi por nós descoberto, assim como sua disposição na tabela.

Expressamos esses números a seguir da esquerda para a direita em estrofe dística:

wa-bakhdja khakhdjhi saz a za takh khavakhu
muhitun li-kutrin khuva´ snani minkhu
6 2 8 3 1 8 5 3 0 7 1 7 9 5 8 6 5

Se o diâmetro for dois e [falado] em persa:

shash wa do khasht wa se iek khasht
wa pandje wa se sefra bahaft wa iekra [haft]
wa nokh pandje wa hasht va khasht wa khsht
wa shash pandj ast

[O número é, N.T.] seis e dois, oito e três, um, oito e cinco e três, zero e sete e um, [sete] e nove, cinco e oito e seis, cinco.

NONA PARTE
SOBRE O MODO DE OPERAR COM ESTAS DUAS TABELAS

Se o valor da metade do diâmetro for conhecido em cúbitos, farsangs ou outra medida, escrevamos tal valor em algarismos jumal ou indianos, consoante nossa escolha e o multipliquemos pela relação da circunferência

p. 361

para com o diâmetro. Para isto, tomamos a tabela e começamos pela maior ordem. O que encontramos, anotamos em algum lugar. Em seguida, passamos para a ordem seguinte e anotamos o que encontramos abaixo dela, da ordem. Então [vá] para a próxima [ordem] e anote o que encontrar abaixo dela; o mesmo para a ordem seguinte, e assim por diante, até terminar. Então somamos tudo e descartamos ao mesmo tempo o que está em frente a última ordem tomada inicialmente, ou mesmo em frente várias últimas, se uma maior precisão não for necessária ou se o círculo for pequeno.

O que se obtém é o tamanho do círculo em partes em que a metade do diâmetro é conhecida, sendo que a sua ordem mais alta é aumentada em um em relação à ordem mais alta da metade do diâmetro, não importa se é zero ou um número. Por exemplo, se a ordem mais alta da metade do diâmetro for quatro vezes elevada, a ordem mais alta do produto será cinco vezes elevada, e se for quartas, a ordem mais alta do produto será terça, se dezenas de milhares, [a ordem mais alta do produto] será centenas de milhares, se terços decimais, [a ordem mais alta do produto] será segundos decimais. A diminuição das cifras Jumal ocorre da direita para a esquerda e a diminuição das cifras indianas da esquerda para a direita.

Exemplo. Queremos saber o tamanho da circunferência de um círculo, cuja metade do diâmetro é seiscentos e cinquenta mil oitocentos e quarenta e quatro e um oitavo de cúbito ou farsang. Nós escrevemos assim:

Em cifras Jumal					
Inteiros				Frações	
Elevado três vezes	Elevado duas vezes	Elevado uma vez	Cúbito ou farsang	Minutos	Segundos
3	0	47	24	7	30

p. 362

Operações com cifras Jumal													
Elevado 3 vezes	3	0	18	50	58	24	4	44	35	18	44	30	
Elevado 2 vezes	0		0	0									
Elevado 1 vez	47			4	55	18	34	57	14	18	33	13	37
Cúbitos ou Farsangs	24				2	30	47	47	12	37	56	42	30
Minutos	7					0	43	58[10])	56	16	11	4	2
Segundos	30						3	8	29	44	0	47	26
Produto, i.e., a circunferência		0	18	55	56	14	14	36	28	15	26	17	35
			Elevado três vezes	Elevado duas vezes	Elevado uma vez	Farsang	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas

Em numerais indianos								
Inteiros						Frações		
Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Milhar	Centena	Dezena	Unidade	Décimo	Decimal secundário	Decimal terciário
6	5	0	8	4	4	1	2	5

p. 363

A conta com cifras jumal																			
Centenas de milhar	6	3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0
Dezenas de milhar	5		3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2
Milhar	0			0	0														
Centena	8				5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	7
Dezena	4					2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8
Unidade	4						2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	2
Décimos	1							0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	2
Segundos decimais	2								1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4
Terças decimais	5									3	1	4	1	5	9	2	6	5	4
Produto, i.e., circunferência		4	0	8	9	3	7	4	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9
		Milhares de milhar	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Milhar	Centena	Dezena	Unidade	Décimo	Segundos decimais	Terças decimais	Quartas decimais	Quintas decimais	Sextas decimais	Sétimas decimais	Oitavas decimais	Nonas decimais	Décimas decimais	Décima primeira decimais
		Inteiros							Frações										

p. 364

Outro tipo com numerais indianos, onde começamos a operar da direita e aumentamos ordem por ordem à esquerda, [colocando cada ordem] debaixo de ordem								
Terças decimais	5							
Segundos decimais	2							
Décimas	1							0
Unidade	4						2	5
Dezena	4					2	5	1
Centena	8				5	0	2	6
Milhares	0			0	0	0		
Dezenas de milhares	5		3	1	4	1	5	9
Centenas de milhares	6	3	7	6	9	9	1	1
Produto, i.e., circunferência		4	0	8	9	3	7	4
Nomes das casas		Milhares de milhares	Centenas de milhares	Dezenas de milhares	Mil	Cem	Dez	unidades

p. 365

	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5
1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4	3	5	9	1	7	3	0	
6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5		
1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0			
3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8	3	4	6	0				
5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	6	9	2	0					
										0	0	0						
2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	5							
1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0								
2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9	3	4	5	4	3	1	2	5
Milhares de vezes 6 vezes	Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade	Centena	Dezena	Unidade
	Milhares de vezes 5 vezes			Milhares de vezes 4 vezes			Milhares de vezes 4 vezes			Milhares de milhares			Mil					
Decimal terciário	Segundos decimais	Terças decimais	Quartas decimais	Quitas decimais	Sextas decimais	Sétimas decimais	Oitavas decimais	Nonas decimais	Décimas decimais	Décima primeira decimal	Décima segunda decimal	Décima terceira decimal	Décima quarta decimal	Décima quinta decimal	Décima sexta decimal	Décima sétima decimal	Décima oitava decimal	Décima nona decimal

p. 366

É mais fácil desprezar algumas das últimas ordens e deixar somente o que influencia na grandeza que não queremos negligenciar. Por exemplo, se a unidade de medida de farsang e não queremos negligenciar os dedos no produto, então, uma vez que o dedo é três quartos de uma terça de farsang, i. e., aproximadamente um terço de uma quinta decimal, o resultado que estamos procurando obtém-se se levamos em conta os quartos sexagesimais ou sextas decimais e omitimos o que vier depois deles.

Se o círculo é pequeno, por exemplo, se a metade de seu diâmetro for cento e vinte sete cúbitos [e meio], então será suficiente se calcularmos da seguinte maneira (veja tabela 19b acima)

<table>
<tr><td rowspan="3">Inteiros</td><td>1</td><td>0</td><td>6</td><td>2</td><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td>4</td><td>3</td><td>9</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Frações</td><td rowspan="3">5</td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>0</td><td>8</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="4">Inteiros</td><td colspan="2">Frações</td></tr>
</table>

Obtém-se então oitocentos e um cúbitos e um décimo de cúbito e esse é o tamanho da circunferência.

No caso em que o tamanho da circunferência é conhecido e nós queremos determinar o diâmetro, nós tomamos o tamanho da circunferência e o dividimos pela razão da circunferência (para com o diâmetro). Procuramos na tabela o maior número que por suas cifras seja menor do a circunferência. Ao ser encontrado este número,

p. 367

se a ordem mais alta nesta linha for zero, então também escrevemos zero na ordem mais alta da circunferência anotada, ou seja, à direita de todas as suas cifras Jumal ou à esquerda de todas as suas cifras indianas, e escrevemos o que encontramos sob isso de forma que os zeros fiquem opostos um ao outro e o restante dos números os siga em ordem. Então subtraímos um do outro e escrevemos o restante abaixo deles, e também escrevemos o que está nas margens da tabela na linha do número contra esse número em um lugar chamado linha do quociente.

Esta [cifra] se escreve na ordem seguinte à ordem mais alta da circunferência mesmo que ela seja zero. Em seguida, procuramos [na tabela] o maior número que seja menor que o resto em termos de suas cifras, subtraímos um do outro e anotamos o que encontramos nos campos [da tabela] em oposição a esse número, após o primeiro, na linha do quociente, ou seja, à esquerda do primeiro no caso de cifras indianas.

Assim [agimos] se o número na ordem mais alta do resto for inferior em uma ordem do que a ordem mais alta que está abaixo dele, não importando se é zero ou um número. Se o rebaixamento for em mais do que uma ordem, escrevemos nos lugares seguintes ao que está escrito na linha do quociente, zero ou zeros em um número de uma a menos que o número de rebaixamento da maior ordem do resto em relação ao que está acima dele.

Sob o resto, escrevemos uma linha de zeros ou linhas no [em número igual a] número especificado de zeros, de modo que a ordem mais alta da primeira linha fique exatamente oposta à ordem mais alta do resto, mesmo que seja zero, a segunda [linha] fique abaixo dela em uma ordem, a terceira em duas ordens, e assim por diante, até terminar, para evitar erro e facilitar a escrita, [embora isso] não seja necessário. Escrevemos o resto novamente sob os zeros e, além disso, exatamente sob os primeiros.

Em seguida, procuramos o maior número da maneira especificada e o subtraímos do restante de acordo com a regra especificada e o fazemos pelo tempo que quisermos.

O que se obtiver na linha do quociente é aquilo que você procura.

p. 368

Se desejarmos, podemos anotar as cifras da linha do quociente nas margens do esquema da operação em posição oposta aos números que procurávamos.

Exemplo: Queremos saber o diâmetro de um círculo cuja circunferência é em cúbitos igual ao número que antes foi tomado como diâmetro. Agimos assim:

Linha do quociente	Operando com os cálculos Jumal						
duas vezes elevado 28	Circunferência que procuramos	3 2	0 55	47 55	24 45	7 4	30 44
uma vez elevado 46	Resto que procuramos		4 4	51 49	39 1	2 35	46 29
cúbitos 25	Resto que procuramos			2 2	37 37	27 4	17 47
Minutos 3	Resto que procuramos				0 0	22 18	30 51
Segundo 35	Resto que procuramos					3	39

369

Linha do quociente	Em números indianos										
Cem mil 1	Circunferência que procuramos	0 0	6 6	5 2	0 8	8 3	4 1	4 8	1 5	2 3	5 1
Dez mil 0	Resto que procuramos			2 0	2 0	5 0	2 0	5 0	5 0	9 0	4 0
Milhares 3	Resto que procuramos			2 1	2 8	5 8	2 4	5 9	5 5	9 5	4 6
Centenas 5	Resto que procuramos				3 3	6 1	7 4	6 1	0 5	3 9	8 3
Dezenas 8	Resto que procuramos					5 5	3 0	4 2	4 6	4 5	5 5
Unidades 5	Resto que procuramos						3 3	1 1	7 4	9 1	0 6
Décimos 0	Resto que procuramos								3 0	7 0	4 0
Segundos decimais 6	Resto que procuramos								3 3	7	4

p. 370

DÉCIMA PARTE
SOBRE A DETERMINAÇÃO DA DIFERENÇA ENTRE O QUE É COMUMENTE ACEITO E DE USO COMUM E O QUE OBTIVEMOS

Sabei que os que dominam esta ciência consideram que a circunferência é igual a três vezes e mais um sétimo do diâmetro, e, portanto, seis vezes e dois sétimos da metade do diâmetro. Se representarmos isso em números jumal e formarmos a diferença entre o resultado e o resultado, os seguintes resultados:

Relação entre a circunferência e a metade do diâmetro pelo cálculo geralmente aceito	6	17	8	34	12	8	34	17	8	34
De acordo com o que obtivemos	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50
Diferença entre eles	0	0	9	6	10	33	42	30	53	44

Pode-se ver que, para um círculo no qual a metade do diâmetro é de três mil e seiscentos cúbitos, a diferença é de aproximadamente nove cúbitos e um décimo.

O autor de *Presente para o imperador* diz que metade do diâmetro da abóbada das estrelas fixas é setenta mil e setenta e três e metade do diâmetro da Terra e calcula a circunferência considerando-a três vezes e um sétimo do diâmetro, igual a quatrocentos e quarenta mil, quatrocentos e sessenta e dois diâmetros da terra. Se calcularmos isso de acordo com o valor que obtivemos, então a diferença entre eles será igual a cento e setenta [sete] diâmetros da terra, e fração, menos de um quarto. Assim, para um grau de convexidade das estrelas fixas, tem-se aproximadamente metade do diâmetro da terra, e Allah sabe disso melhor do que ninguém.

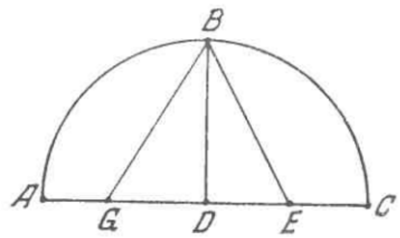
p. 371

Dados numéricos	7	439822	97
	7	439	82
	3	18	85
Número da fração	5	3	14
Produto		440284	78
Consta no *Presente para o imperador*		440462	
A diferença entre eles		177	

A partir disso, fica claro que se multiplicar metade do diâmetro por seis inteiros e dezessete minutos, então a circunferência ficará mais próxima [da verdadeira] do que se você multiplicar o diâmetro por três e um sétimo, isso também é mais fácil.

CONCLUSÃO
SOBRE A DEMONSTRAÇÃO DOS ERROS DE ABU-L-WAFA E ABUR-RAIHAN (AL-BIRUNI)

Aqui está a primeira frase do primeiro livro do *Almagesto*. Seja ABC um semicírculo no diâmetro ADC, centro D e linha BD perpendicular ao diâmetro. Divida o CD



pela metade em E e junte-se a BE. Construa EG igual a BE e conecte BG. Então DG é um lado de um decágono e BG é um lado de um pentágono.
Como CD é dividido pela metade em E e DG é adicionado em sua direção, a superfície [construída por] CG

p. 372

e DG junto com o quadrado de DE é igual ao quadrado de EG de acordo com a sexta sentença da segunda [do livro] *Os Elementos*. Portanto, é igual ao quadrado de EB, ou seja, aos quadrados ED, DB tomados juntos. Descartamos o quadrado comum ED, e fica: a superfície em CG e DG é igual ao quadrado de DB, ou seja, ao quadrado CD. Portanto, a linha CG é dividida no ponto D em duas partes na razão média e extrema, uma vez que o produto de toda a linha por sua parte menor é igual ao quadrado da parte maior. Segue-se que DG se refere a CD como CD para CG de acordo com a proposição dezessete do livro seis *Os Elementos*. Neste caso, a parte mais longa de CD é a corda de um sexto do círculo de acordo com a proposição quinze do quarto [livro] de *Os Elementos*. Portanto, DG é a corda de um décimo de um círculo de acordo com a explicação da décima segunda proposição do décimo terceiro [livro] de *Os Elementos*, e BG, é a corda de um quinto do círculo, pela décima terceira proposição do décimo terceiro [livro] de *Os Elementos*.

Digo que CG é igual à corda do complemento da lateral do pentágono, ou seja, a corda de três décimos da circunferência. Como já se sabe do anterior, a soma dos quadrados da corda do arco e a corda do seu complemento é igual ao quadrado do diâmetro.

A soma dos quadrados BG, CG é igual ao quadrado do diâmetro, já que o quadrado do diâmetro é igual a quatro quadrados da metade do diâmetro, o quadrado CG é a soma do quadrado da metade do diâmetro CD, do quadrado de DG e do dobro da superfície de CD e DG, e o quadrado de BG é a soma dos quadrados da metade do diâmetro BD e DG.

Portanto, a soma dos quadrados CG, BG é igual à soma de duas vezes o quadrado da metade do diâmetro, duas vezes o quadrado de DG e duas vezes a superfície em CD e DG, mas, como se sabe do anterior, o quadrado da metade do diâmetro é igual à superfície em CG e DG e, portanto, é igual à soma da superfície em CD e DG e do quadrado DG. Portanto, a soma dupla da superfície em CD e DG e o quadrado duplo de DG é igual a duas vezes o quadrado da metade do diâmetro, e a soma dos quadrados DG, CG é igual a quatro quadrados da metade do diâmetro e, portanto, o quadrado do diâmetro.

Assim, se BG é um lado de um pentágono, então CG é um acorde de três décimos [da circunferência], e isto era o que procurávamos.

p. 373

Ptolomeu, na terceira proposição do primeiro livro *Almagesto*, provou que a diferença entre a superfície construída sobre corda de um dos dois arcos e sobre a corda do complemento do outro e a superfície na corda do complemento do primeiro arco e na corda do segundo é igual à superfície no diâmetro e na corda da diferença entre os dois arcos. Ele também demonstrou na quarta proposição do mesmo livro que a soma da superfície na corda de um dos dois arcos e na corda do outro [arco] e a superfície na corda [do complemento] da soma dos arcos e no diâmetro é igual à superfície na corda do complemento de um dos dois arcos e na corda do complemento do outro. Portanto, a soma do quadrado da corda do arco e da superfície na corda [complemento] do resultado de sua duplicação e do diâmetro é igual ao quadrado da corda do complemento deste arco.

Se essas regras estiverem claras, vamos prosseguir para a determinação da corda de uma parte e meia, verificar o que, na opinião de Abu-l-Wafa, é a corda de meia parte, e esclarecer o erro em seus cálculos, encontrar o arco de meia parte e verificar sua exatidão. Este cálculo é o seguinte:

Explicação da operação	Elevado duasvezes	Elevado uma vez	Partes	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas
Cinco quadrados e quarto do diâmetro, ou seja, soma do quadrado da metade do diâmetro e seu quarto	1	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A raiz disso, ou seja, a soma do lado do decágono e do quarto do diâmetro, ou seja, EG	0	1	7	4	55	20	29	39	6	54	20
Subtraindo um quarto do diâmetro, sobra o lado do decágono, ou seja, DG.	0	0	37	4	55	20	29	39	6	54	20

p.374

A soma do quadrado deste e do quadrado da metade do diâmetro, ou seja, o quadrado do lado do pentágono	1	22	53	4	39	30	20	53	0	40	0
O lado do pentágono, ou seja, BG	0	1	10	32	3	13	44	21	54	54	55
A linha CG, ou seja, a corda de três décimos, a corda do complemento do círculo até sua metade	0	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20
A corda de um terço do círculo, ou seja, o complemento de um sexto, que foi visto anteriormente na quarta seção	0	1	43	55	22	58	27	57	56	0	44
Superfície na corda de um sexto e na corda de um quinto	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20	0
Superfície na corda de um quinto e na corda do complemento de um sexto	2	2	10	7	56	1	47	58	39	33	50
A diferença entre eles	0	25	5	12	35	32	8	51	45	13	50
Dividindo pelo diâmetro, obtemos a corda de um terço de um décimo do círculo, ou seja, a corda de doze partes	0	0	12	32	36	17	46	4	25	52	37
O quadrado	0	2	37	20	14	11	20	19	37	39	52

375

Subtraindo do quadrado do diâmetro, resta o quadrado de corda de 168 partes	3	57	22	39	45	48	39	40	22	20	8
Extraindo a raiz	0	1	59	20	33	27	31	40	36	15	34
Adicionamos à raiz o valor do diâmetro, aumentamos em uma ordem e extraímos a raiz disso. Obtém-se a corda de 174 [partes]		1	59	50	7	57	32	27	1	7	40
Adicionamos a essa raiz o diâmetro, aumentamos o resultado em uma ordem e tomamos a raiz O resultado é a corda de 177 [partes]		1	59	57	31	57	51	48	7	9	7
Da mesma forma, obtemos a corda de 178 [partes] e 30 [minutos]		1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Subtraímos o quadrado deste, ou seja, a soma do diâmetro e corda de 177 partes, do quadrado do diâmetro. Sobra o quadrado da corda de uma parte e meia	0	0	2	28	2	8	11	52	50	53	
Extraindo a raiz, obtemos a corda de uma parte e meia	0	0	1	34	24	42	19	1	57	12	

Registramos zeros vermelhos nas células livres de números para distingui-los dos zeros obtidos durante a operação.

p. 376 e 377

Explicação das ações	Primeira operação: verificação da corda de meia parte segundo Abu Wafa										Segunda operação: verificação do valor que encontramos como corda de meia parte										
	Elevado duas vezes	Elevado uma vez	partes	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Elevado duas vezes	Elevado uma vez	partes	Minutos	Segundos	Terças	Quartas	Quintas	Sextas	Sétimas	Oitavas
Se a corda do arco for	0	0	0	31	24	55	54	55			0	0	0	31	24	56	58	35	58	41	47
Então o seu quadrado será	0	0	0	16	26	56	8	20	52	31	0	0	0	16	26	57	15	2	9	46	
Subtraindo-o do quadrado do diâmetro resta o quadrado da corda do seu complemento	3	59	59	43	33	3	51	39	7	29	3	59	59	43	33	2	44	57	50	14	
Corda do complemento	0	1	59	59	55	53	15	53	41	11	0	1	59	59	55	53	15	37	0	47	26
Subtraindo o quadrado da corda desse arco do quadrado da corda do seu complemento, restará a superfície sobre o diâmetro e a corda do complemento do dobro do arco dado	3	59	59	27	6	7	43	18	14	58	3	59	59	27	6	5	29	55	40	28	
Dividindo pelo diâmetro obtém-se a corda do complemento do complemento do dobro do arco	0	1	59	59	43	33	3	51	39	7	0	1	59	59	43	33	2	44	57	50	14
Elevando ao quadrado	3	59	58	54	12	19	57	10	29	59	3	59	58	54	12	15	30	25	59	27	
Se o subtrairmos do quadrado do diâmetro, teremos o quadrado da corda do dobro desse arco.	0	0	1	5	47	40	2	49	30	1	0	0	1	5	47	41	29	34	0	33	
Se extrairmos a raiz disso, teremos a corda do dobro desse arco	0	0	1	2	49	49	40	38	42	4	0	0	1	2	49	51	48	0	25	27	14
Área da corda desse desse arco com a corda do seu dobro	0	0	0	32	53	51	9	3	13	51	0	0	0	32	53	53	22	25	38	44	35
Área da corda do complemento de um dos dois com a corda do complemento do outro.	3	59	59	18	52	40	38	19	7	39	3	59	59	18	52	37	51	35	56	7	31
Esta será a diferença	3	59	58	45	58	49	29	15	53	48	3	59	58	45	58	44	29	10	17	22	56
Se dividirmos esse valor pelo diâmetro, obtemos a corda do complemento do arco triplo	0	1	59	59	22	59	24	44	37	57	0	1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Seu quadrado	3	59	57	31	58	1	48	15	17	18	3	59	57	31	57	51	48	7	9	7	
Se o subtrairmos do quadrado do diâmetro, teremos o quadrado da corda do triplo desse arco.	0	0	2	28	1	58	11	44	42	42	0	0	2	28	2	8	11	52	50	53	
Assim é a corda do arco triplo	0	0	1	34	14	39	7	59	49	35	0	0	1	34	14	42	19	1	57	12	

p. 378

Já que no final da tabela da primeira operação obtivemos a corda que, segundo Abu-l-Wafa, é a corda da metade da parte, a corda deste arco triplicado, igual a 1 34 14 39 7 59, que é menor que a corda de uma e meia que obtivemos na tabela anterior igual a 1 34 14 42 19 1, em três terças onze quartas e fração, então é claro que o que Abu-l-Wafa encontrou é menor que a corda do arco de meia parte em cerca de um terço da diferença indicada, então a circunferência obtida a partir disso está incorreta.

Do mesmo modo, o que se obtém no final da tabela da segunda operação coincide exatamente com a corda da metade da parte, de onde fica claro que o valor que demos para a corda da metade do arco na parte final da tabela da segunda operação está correto.

Quanto à verificação do arco de duas partes,

O que é dado na sétima linha da segunda operação (o quadrado da corda do complemento de uma parte)	3	59	58	54	12	30	25	59	27		
Subtraindo o diâmetro deste, diminuída em uma ordem sobra a corda do suplemento de duas partes	0	1	59	58	54	12	15	30	25	59	27
O seu quadrado	3	59	55	36	50	14	10	48	21	7	51
Subtraindo esse valor do quadrado do diâmetro sobra o quadrado da corda das duas partes	0	0	4	23	9	45	49	11	38	52	9
Portanto, a raiz deste é o valor correto da corda de duas partes	0	0	2	5	39	26	22	29	28	32	25

Uma vez que Abu Reyhan [Biruni], ao determinar o perímetro do polígono, obteve 2 5 39 43 36, é claro que ele se enganou, pois, isto excede o [valor] correto em dezessete terças quatorze quartas, embora em suas tabelas ele tenha dado o seno[12] de uma parte, ou seja, a meia corda de duas partes perfeitamente correto.

Esta é a última coisa que queríamos apresentar, glória a Alá, o mestre dos dois mundos. Graças à generosidade de Alá, este livro termina aqui.

[12] Na tradução russa consta seno, o que merece uma investigação posterior.

7. Texto original

ТРАКТАТ ОБ ОКРУЖНОСТИ [1]

1 | Хвала аллаху, обладающему знанием отношения диаметра к окружности [2], знающему величину всего сложного и простого, творцу земли и неба, создателю света во тьме. Благословение и мир Мухаммеду Мустафе [3], центру круга пророков и окружности, диаметром которой является наставление на путь истины и справедливости, а также его потомству, добру и его чистым друзьям.

После [этого]: творение всевышнего аллаха, [надеющееся] на его прощение Джемшид ибн Мас'уд ибн Махмуд, врач из Кашана, по прозванию Гияс, да улучшит аллах его судьбу, говорит:

Архимед доказал, что окружность превосходит тройной диаметр меньше, чем на одну седьмую диаметра, и больше, чем на десять семьдесят первых диаметра [4]. Разность между этими двумя [дробями] есть одна четыреста девяносто седьмая. Поэтому в круге, диаметр которого равен четыремстам девяносто седьмым локтя, сустава, бамбука или фарсанга, [5], величина окружности неизвестна и сомнительна в пределах одного локтя, одного сустава бамбука или одного фарсанга, а в наибольшем круге, находящемся на земном шаре, это неизвестное находится в пределах пяти фарсангов, так как его диаметр приблизительно равен пяти этим количествам фарсангов [6]. В небесном же поясе зодиака это неизвестное находится в пределах значительно больших, чем сто тысяч фарсангов [7]. Эти величины чрезмерно велики уже для окружностей, а что же будет при измерении площадей! Собственно он [Архимед] определил периметр вписанного в круг девяностошестиугольника, меньший окружности этого круга, так как каждая из его сторон меньше дуги, для которой она является хордой, и поэтому сумма всех сторон [многоугольника] меньше окружности круга, [в который вписан многоугольник], а также [Архимед определил] периметр описанного около круга многоугольника, подобного первому, и в первом предложении первой книги своего сочинения он доказал, что этот периметр больше окружности круга, причем разность между ними [периметрами вписанного и описанного многоугольников] такова, как указано выше [8].

Абӯ-л-Вафā Бӯзджāнӣ получил с помощью приближенного вычисления хорду половины одной трехсотшестидесятой части окружности в тех частях, в которых диаметр есть сто двадцать, и, умножив это на семьсот двадцать, получил периметр многоугольника, вписанного в круг. Он определил также периметр подобного ему описанного многоугольника и утверждал, что если диаметр есть сто двадцать, то окружность есть 376 с дробью, большей 59 10 59 терций и меньшей 59 23 54 12 кварт. Разность между этими величинами есть 12 55 12 кварт. Это для наибольшего круга, находящегося на земле, приблизительно равно тысяче локтей. При этом он ошибочно считал величину хорды половины [360-й] части за 0 31 24 55 54 55. Это неверно: правильное [значение] есть 0 31 24 56 58 36, как мы покажем ниже.

Абӯ Рейхāн Бӣрӯнӣ получил хорду двух трехсотшестидесятых частей окружности. Он нашел, что периметр ставосьмидесятиугольника, вписанного в круг, есть 6 16 59 10 48 0, а периметр подобного ему описанного [многоугольника] есть 6 17 1 58 19 6, принял половину их суммы за окружность круга и перешел от знаменателя дроби [в шестидесятеричных] цифрах к индийским цифрам, приняв диаметр за единицу. Это составляет для круга, равного наибольшему кругу, находящемуся на земле, приблизительно фарсанг. При этом вычислении он ошибочно принял хорду двух [360-х] частей за 2 5 39 43 36, в то время как должно быть 2 5 39 26 22. Однако в таблице синусов, [помещенной] в его «Каноне Мас'уда», он принял, что синус одной [360-й] части, т. е. половина хорды двух частей, есть 1 2 49 43, что верно, в то время как в удвоенном имеется ошибка.

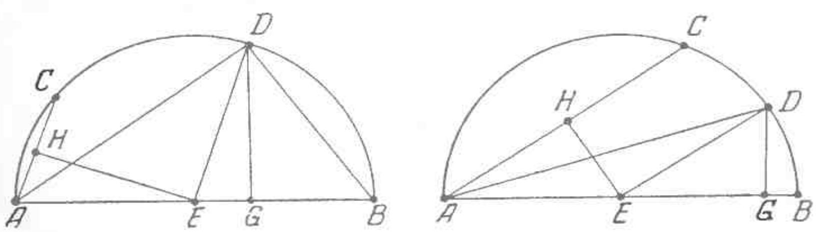
Так как эти действия приводят к ошибкам, мы хотим так определить окружность круга в частях, в которых выражен диаметр, чтобы мы были уверены, что в круге, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров земли, разница между ней [полученной величиной окружности] и истинной была не больше волоса, т. е. одной шестой ширины среднего ячменного зерна, так что разность
2 для круга, | меньшего чем этот, была бы еще меньше.

Я составил этот трактат, содержащий это определение, озаглавил его «*Трактат об окружности*» и разделил его на десять разделов и заключение. Я умоляю о помощи дорогого и щедрого аллаха, направляющего нас на путь истины [9].

ПЕРВЫЙ РАЗДЕЛ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХОРДЫ ДУГИ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ СУММОЙ ДУГИ С ИЗВЕСТНОЙ ХОРДОЙ, И ДУГИ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ ПОЛОВИНОЙ ЕЕ ДОПОЛНЕНИЯ ДО ПОЛУКРУГА

Я говорю: [прямоугольная] поверхность, [построенная] на сумме диаметра и хорды каждой дуги, меньшей полукруга, и на половине диаметра [10], равна квадрату хорды дуги, равной сумме первой дуги и половины ее дополнения до полукруга. Для доказательства построим на линии AB полукруг ACB с центром E, проведем произвольную хорду AC, разделим пополам [дугу] BC, являющуюся дополнением ее [дуги AC] до полукруга, в точке D и соединим AD. Тогда утверждение [гласит]: поверхность на половине диаметра и сумме AB с AC равна квадрату AD.



Доказательство. Соединим BD. Тогда угол ADB прямой по тридцатому предложению третьей [книги] «Начал» [11]. Затем опустим из точки D перпендикуляр DG

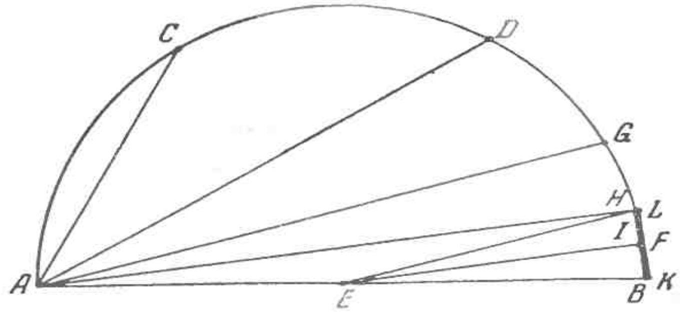
на линию AB. Получатся треугольники DBG и DAG, подобные треугольнику ADB по восьмому предложению шестой [книги] «Начал» [12]. Поэтому диаметр AB относится к AD, как AD к AG, и по девятнадцатому предложению седьмой [книги] «Начал» [13] поверхность на диаметре AB и AG равна квадрату AD. Далее опустим из точки E перпендикуляр EH на AC. Тогда точка H есть середина AC по третьему предложению третьей [книги] «Начал» [14]. Соединим ED. Так как величина угла BAC есть половина дуги CB, а это величина угла BED, эти два угла [BAC и DEG] равны. Поэтому треугольники AHE и EGD равны, так как у них прямые углы H, G, равные углы E, A и равные стороны AE, ED. Поэтому сторона EG равна стороне AH, являющейся половиной AC, и поверхность на AG, т. е. сумме половины диаметра и EG, равной половине AC, и на диаметре равна квадрату AD. Так как поверхность на одной линии и на половине другой равна поверхности на половине первой и на целой другой, то поверхность на сумме диаметра и удвоенной EG, т. е. на сумме диаметра и AC, и на половине диаметра равна квадрату AD. Это то, что мы хотели [доказать] [15].

Если AC выражена в тех частях, в которых половина диаметра есть шестьдесят, прибавим к ней диаметр и повысим сумму на [шестидесятеричный] разряд [16]. Тогда результат будет квадратом AD.

ВТОРОЙ РАЗДЕЛ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРИМЕТРА ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В КРУГ, И ПЕРИМЕТРА ПОДОБНОГО ЕМУ МНОГОУГОЛЬНИКА, ОПИСАННОГО ОКОЛО КРУГА

Построим на линии AB полукруг ACB с центром E и предположим, что [дуга] AC—одна шестая окружности. Тогда хорда AC равна половине диаметра по пятнадцатому предложению четвертой [книги] «Начал» [17]. Затем разделим пополам [дугу] CB, являющуюся дополнением [дуги] AC до полукруга, в D, [разделим пополам дугу] DB в G, [дугу] GB в H и так далее сколько угодно. Как мы указали в предыдущем разделе, благодаря [известной хорде] AC, становится известной и [хорда] AD, отсюда становится известной [хорда] AG, отсюда становится известной [хорда] AH и так далее сколько угодно. Теперь, если мы



получили, например, хорду AH и мы хотим определить
2 об. | хорду BH, вычтем квадрат AH из квадрата диаметра и останется квадрат хорды BH, так как угол AHB прямой по тридцатому предложению третьей [книги] «Начал» [18] и, следовательно, квадрат AB равен квадратам AH, HB по «теореме невесты» [19]. Затем разделим пополам дугу BH в точке F и соединим EF. Эта линия делит пополам хорду BH в I. Проведем касательную FL к кругу в точке F, восставив в точке F два перпендикуляра FK, FL к EF по обе стороны [от нее], соединим EH и продолжим [ее] до L, а также [продолжим] EB до K. Тогда KL будет параллельна BH и, так же как BH есть сторона многоугольника, вписанного в круг, KL есть сторона подобного ему многоугольника, описанного около круга. При этом треугольники EKF и ELF равны между собой и подобны равным между собой треугольникам EBI и EHI. Поэтому EI относится к EF, являющейся половиной диаметра, как BI к FK, и таково же отношение BH к KL. Поэтому EI относится к IF, являющейся избытком последующего [члена этой пропорции] над предыдущим, как хорда BH к избытку KL над BH, и таково же отношение [суммы] всех сторон многоугольника, вписанного в круг, одной из сторон которого является BH, ко всем [вместе взятым] избыткам сторон описанного многоугольника, одной из сторон которого является KL, над первыми сторонами. [Линия] EI есть половина [линии] AH, так как треуголь-

ники AHB и EIB подобны в силу того, что углы H, I прямые, угол A при окружности, стягиваемый дугой BH, равен центральному углу E, стягиваемому дугой BF, являющейся половиной дуги BH, а EB есть половина AB. Таким образом, EI есть половина AH. Поэтому, поскольку EI и BH станут известны, указанные отношения также будут известны, и как многоугольник, вписанный в круг, так и многоугольник, описанный около него, также будут известны. Это то, что мы хотели [получить].

ТРЕТИЙ РАЗДЕЛ

О ТОМ, НА СКОЛЬКО ЧАСТЕЙ НУЖНО РАЗДЕЛИТЬ ОКРУЖНОСТЬ И ДО КАКОГО [ШЕСТИДЕСЯТЕРИЧНОГО] РАЗРЯДА НУЖНО ПРОИЗВОДИТЬ ДЕЙСТВИЕ, ЧТОБЫ ПОЛУЧЕННЫЙ НАМИ ПЕРИМЕТР ОТЛИЧАЛСЯ ОТ ОКРУЖНОСТИ ДАННОГО КРУГА НА ВЕЛИЧИНУ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩУЮ ВОЛОСА

Знай, что у круга, диаметр которого в шестьсот тысяч раз больше диаметра земли, окружность также в шестьсот тысяч раз больше окружности земли. В этом круге будет:

Градус	тысяча шестьсот шестьдесят шесть и две трети окружности земли
Минута	приблизительно двадцать семь и три четверти того же
Секунда	приблизительно три тысячи семьсот четыре фарсанга, если окружность земли [принята за] восемь тысяч фарсангов
Терция	приблизительно шестьдесят два фарсанга
Кварта	приблизительно фарсанг и треть одной десятой [фарсанга]
Квинта	приблизительно двести шесть локтей
Секста	приблизительно три и треть локтя
Септима	одна и треть пальца, т. е. сорок восемь волос
Октава	четыре пятых толщины конского волоса и даже еще меньше [20]

Так обстоит дело, если окружность есть триста шестьдесят. Если же она есть триста семьдесят семь с дробью [21], то ее октава много меньше четырех пятых толщины волоса.

Поэтому, если мы определим периметры двух многоугольников таким образом, что разность между ними не достигает одной октавы, то, следовательно, разность между ними подавно не достигает одного волоса и тем более такова разность между каждым из них и действительной окружностью круга.

Как ты знаешь, [периметр] внутреннего многоугольника относится к избытку над ним [периметра] внешнего многоугольника, как расстояние от центра круга до середины стороны [внутреннего многоугольника] к его дополнению до половины диаметра, т. е. расстоянию середины стороны от середины дуги, хорда которой есть сторона. Это дополнение является стрелой этой дуги [22].

Ты знаешь также, что отношение половины диаметра к окружности меньше одной шестой на меньшее, чем треть одной седьмой одной шестой [23]. Поэтому нам нужно взять в круге многоугольник со столь большим числом сторон, чтобы отношение стрелы дуги каждой стороны к дополнению стрелы до половины диаметра было бы меньше отношения одной шестой октавы к единице на треть одной седьмой этой одной шестой или [еще] больше, т. е. чтобы это отношение было равно восьми нонам или меньше [24]. Тогда хорда дополнения дуги каждой стороны будет меньше диаметра на шестнадцать нон, так как указанная хорда равна удвоенному указанному расстоянию [25]. Поэтому разность квадрата диаметра и ее квадрата меньше, чем приблизительно учетверенные шестнадцать нон, поднятые на один разряд, т. е. меньше, чем одна септима и четыре октавы. Поэтому корень из этого, т. е. хорда, [т. е.] каждая из сторон, не превосходит восьми кварт [26].

Если мы будем раздваивать треть окружности двадцать
3 восемь | раз, получится дуга в пять кварт сорок семь квинт с дробью в тех частях, в которых вся окружность равна тремстам шестидесяти, как ясно из следующей таблицы [27]:

334 ДЖЕМШИД ГИЯСЭДДИН КАШИ

Повторное удвоение числа сторон, начиная с треугольника							Повторное		
число	пять раз поднятые	четырежды поднятые	трижды поднятые	дважды поднятые	поднятые	стороны	части	минуты	секунды
0						3	120		
1						6	60		
2						12	30		
3						24	15		
4						48	7	30	
5					1	36	3	45	
6					3	12	1	52	30
7					6	24	0	56	15
8					12	48		28	7
9					25	36		14	3
10					51	12		7	1
11				1	42	24		3	30
12				3	24	48		1	45
13				6	49	36		0	52
14				13	39	12			26
15				27	18	24			13
16				54	36	48			6
17			1	49	13	36			3
18			3	38	27	12			1
19			7	16	54	24			0
20			14	33	48	48			
21			29	7	37	36			
22			58	15	15	12			
23		1	56	30	30	24			
24		3	53	1	0	48			
25		7	46	2	1	36			
26		15	32	4	3	12			
27		31	4	8	6	24			
28	1	2	8	16	12	48			

раздвоение трети окружности

терции	кварты	квинты	сексты	септимы	октавы	ноны	децимы	ундецимы	дуодецимы	тредецимы
30 45										
52 56	30 15									
28 44	7 3	30 45								
22 11	1 0	52 56	30 15							
35 17	30 45	28 14	7 3	30 45						
38 49	52 26	37 18	1 30	52 56	30 15					
24 12	43 21	9 34	15 37	28 44	7 3	30 45				
6 3	10 5	47 23	18 39	52 26	1 0	52 56	30 15			
1 0	32 46	41 20	49 54	43 51	0 30	28 14	7 3	30 45		
	23 11	10 35	27 13	25 42	45 52	7 33	1 30	52 56	30 15	
	5	47	36	51	26	16	45	28	7	30

Несомненно, что хорда этой дуги меньше семи кварт, так как хорда всякой дуги, если окружность есть триста шестьдесят, а диаметр—сто двадцать, не превышает дугу на треть одной седьмой ее. Поэтому мы впишем в круг такой многоугольник, число сторон которого [равно] восьмистам пяти тысячам тысяч тремстам шести тысячам тремстам шестидесяти восьми [28], его поднятое— 1 2 8 16 12 48.

Так как первый разряд этого числа—пятерные [поднятые], нам нужно найти величину одной стороны таким образом, чтобы пренебрегаемая часть дроби не выходила бы за пределы [единицы] тринадцатого разряда, потому что если мы умножим сторону на это число, пренебрегаемая часть дроби в периметре не выйдет за пределы одной октавы, ибо если умножить пятерное [поднятое] на тредециму, получится октава.

Так как первый разряд величины одной стороны меньше семи кварт и ее конец—тредецимы, а если умножить то, что меньше семи кварт, на тредециму, получится меньшее семи в семнадцатом разряде, то разница [т. е. ошибка] для квадрата этой стороны не должна достигнуть этой величины, так же как для ее дополнения и для того, что получается при понижении на один разряд, и так далее до того, на чем начинается действие. Поэтому искомое получится, если мы будем определять хорды способом, указанным нами в двух предыдущих разделах, до тех пор, пока не получим периметр многоугольника, число сторон которого равно 1 2 8 16 12 48, и будем производить действие до восемнадцатого разряда.

ЧЕТВЕРТЫЙ РАЗДЕЛ

О ДЕЙСТВИЯХ

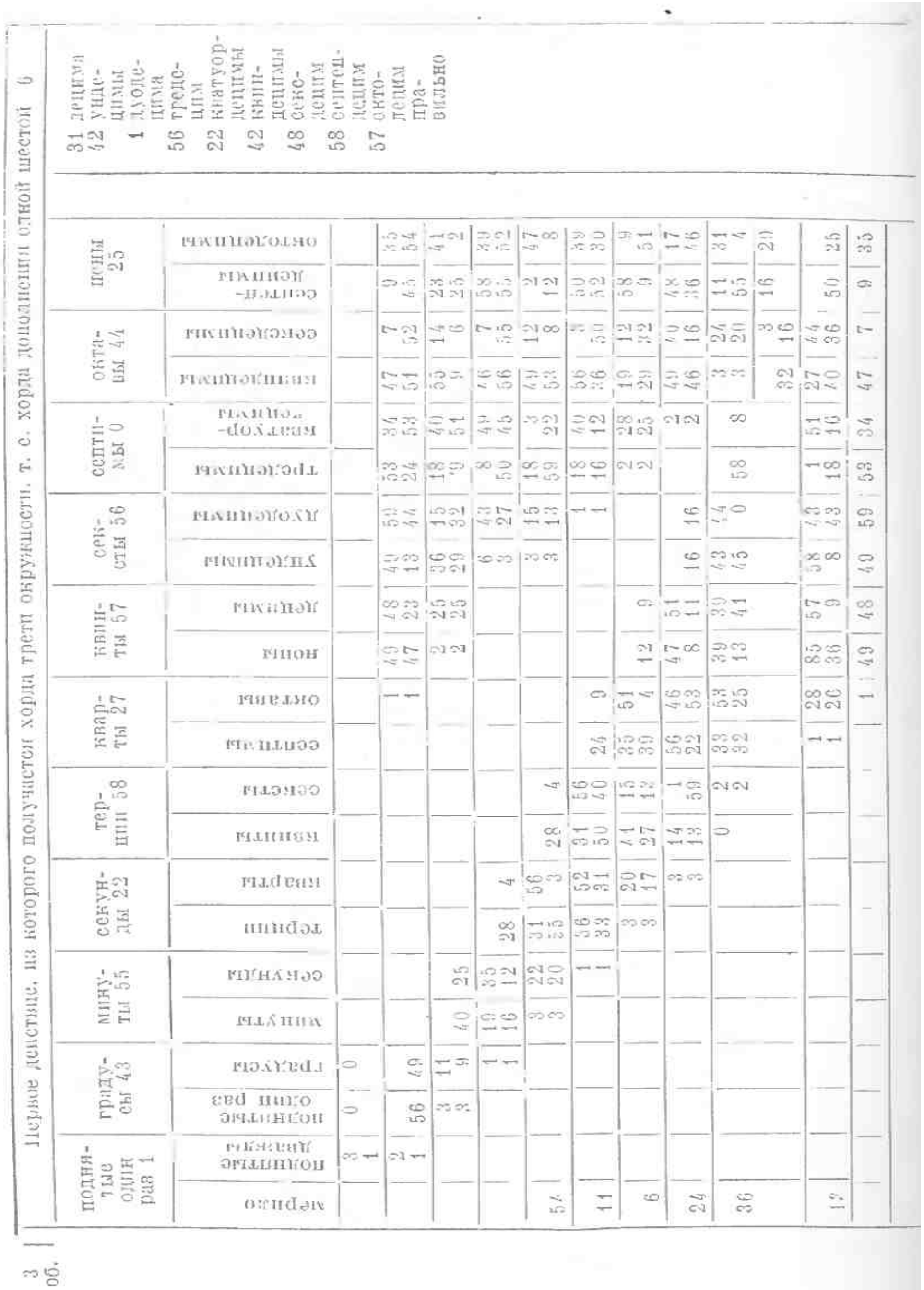
Прибавим диаметр, равный 2 0, к стороне шестиугольника, равной 1 0, получится 3 0, повысим это на разряд, получится 3 0 0. Возьмем корень из этого, прибавим к нему 2 0 и поднимем это на разряд, а затем возьмем корень из этого; мы произведем двадцать восемь таких действий.

При этом мы будем переходить от одного действия к другому только после повторения его два-три раза и, кроме того, будем гарантировать себя проверкой с помощью мерила действия, умножением корня произведения на себя, также повторяемым два-три раза, и прибавлением остатка действия ко второму произведению, при котором сумма должна быть равна числу, если действие правильно.

Мы производим проверку и гарантирование правильности для того, чтобы не вкралась ошибка, так как в дальнейшем она увеличилась бы.

Ввиду большого количества цифр мы не пользуемся теми цифрами, в которых нет необходимости. Способ извлечения корня и возведения корня в квадрат—это то, что мы открыли,—наиболее легкий способ в этом предмете. В этом разделе мы приводим таблицы этих действий, чтобы они были образцом для вычислителей и дорогой для того, кто пожелает убедиться в правильности этого.

Вот эти таблицы [29] [см. стр. 338—345].



3 об.

Первое действие, из которого получается хорда трети окружности, т. е. хорда дополнения одной шестой 6

поднятые один раз 1		градусы 43		минуты 55		секунды 22		терции 58		кварты 27		квинты 57		сексты 56		септимы 0		октавы 44		ноны 25	
мерило	поднятые дважды	поднятые один раз	градусы	минуты	секунды	терции	кварты	квинты	сексты	септимы	октавы	ноны	децимы	ундецимы	дуодецимы	тредецимы	кватуордецимы	квиндецимы	сексдецимы	септендецимы	октодецимы
	3 1	0	0																		
	2 1	56	49								1 1	49 47	48 23	49 13	59 44	53 24	34 53	47 51	7 52	9 45	35 54
		3 3	11 9	40	25							2 2	25 25	36 29	15 32	18 9	40 51	55 9	14 6	23 25	41 2
			1 1	19 16	35 12	28	4							6 3	43 27	8 50	49 45	46 56	7 55	58 55	39 52
54				3 3	22 20	31 55	56 3	28	4					3 3	15 13	18 59	3 22	49 53	12 8	2 12	47 8
11					1 1	36 33	52 31	31 50	56 40	24	9				1 1	18 16	40 12	56 26	3 50	50 52	39 30
6						3 3	20 17	41 27	15 12	35 39	51 4	12	9			2 2	28 25	19 29	12 32	58 9	9 51
24							3 3	14 13	1 59	56 22	46 53	47 8	51 11	16	16		2 2	49 46	40 16	48 36	17 46
36								0	2 2	33 32	53 25	39 13	39 41	43 45	44 0	58	8	3 3	24 20	11 55	31 4
																		32	3 16	16	29
12										1 1	28 26	85 36	57 9	58 8	43 43	1 18	51 16	27 40	44 36	50	25
											1	49	48	49	59	53	34	47	7	9	35

31 децима
42 ундецимы
1 дуодецима
56 тредецим
22 кватуордецимы
42 квиндецимы
48 сексдецим
58 септендецим
57 октодецим
правильно

43											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	25	
33										3	27	50	45	56	55	55	52	0	44			
									3	27	50	45	56	55	55	52	0					
51								3	27	50	45	56	55	54	56				3	27	50	46
56							3	27	50	45	56	54	57					3	27	50	45	56
31						3	27	50	45	56	27						3	27	50	45	56	55
5					3	27	60	44	58							3	27	50	45	56	55	55
43				3	27	50	22								3	27	50	45	56	55	55	52
25			3	26	55									3	27	50	45	56	55	55	52	1
		2	43										3	27	50	45	56	55	55	52	1	28
	1											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	50
																	0	0 48	38 41	34		
			Проверка путем возведения в квадрат												0	0 22	42 30	34 6	24 44	53 0	10 21	16
														0	0 1	56 40	15 8	46 20	38 10	30 15	17 24	36 46	56 24
											0	0 31	42 30	0 6	43 0	51 55	20 20	8 32	4 21	40 16	36 18	21 54
									0	0 44	25 17	22 55	13 28	38 25	30 15	0 24	22 0	54 58	8 25	9 12	54 20	40 54
							0	0 56	0 0	31 0	32 40	28 20	55 9	11 10	22 29	40 58	36 18	0 54	27 0	53 57	12 52	20 16
					0	0 27	57 40	40 51	8 51	0 20	0 0	16 0	8 42	24 32	10 11	13 15	57 29	30 27	54 39	0 12	56 0	0 0
			0	0 22	48 41	19 34	21 24	52 45	15 20	20 59	32 54	0 8	0 0	19 0	48 41	23 48	45 23	28 20	56 0	0 0	0 30	1 48
	0	0 43	55 39	15 25	46 20	53 10	10 21	9 16	54 26	55 6	6 25	25 39	12 53	0 12	0 0	41 0	4 0	0 0	0 18	22 20	44 12	17 55
		44 44	35 35	4 4	47 47	25 25	57 57	31 31	57 57	53 53	55 55	2 2	55 55	3 3	51 51	59 59	59 59	43 43	50 50	16 16	34 34	
	1	30	49	50	25	8	4	56	4	12	9	54	9	52	16	0	0	32	16 3	10 16	25 27	
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

22*

4

Второе действие, из которого получается хорда дополнения половины одной шестой окружности 12

поднятые один раз 1		градусы 55		[минуты] 54		[секунды] 39		[терции] 57		[кварты] 25		[квинты] 2		[сексты] 41		[септимы] 7		[октавы] 56		[ноны] 38		
мерило	поднятые дважды	поднятые один раз	градусы	[минуты]	[секунды]	[терции]	[кварты]	[квинты]	[сексты]	[септимы]	[октавы]	[ноны]	[децимы]	[ундецимы]	[дуодецимы]	[тредецимы]	[кватуордецимы]	[квиндецимы]	[сексдецимы]	[септендецимы]	[октодецимы]	
	3 1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57		
	2 2	40	25									12 11	17 35	11 27	47 59	3 44	43 30	46 16	39 6	36 47	56 39	48
55		3 3	30 27	48	36								35 34	43 46	49 23	19 59	13 13	30 30	32 48	49 20	16 22	12 59
12			2 2	34 30	22 40	37	21							57 54	25 5	19 30	59 38	59 47	44 41	28 15	53 11	13 42
57				3 3	41 40	50 13	36 51	0	9					3 3	19 17	49 2	21 55	12 55	3 36	13 34	41 33	31 35
10					•1 1	36 36	45 35	55 33	51 17	40	25				2 2	46 46	25 8	16 21	26 16	39 17	7 53	36 51
43							10 7	22 43	34 38	4 39	40	4					16 15	55 27	10 17	21 19	13 39	45 20
19							2 2	38 38	55 24	24 42	10 36	51 28	38 13	12	1		1 1	27 25	53 0	1 5	34 18	25 6
50									30 27	41 2	34 45	23 19	24 23	49 50	55 37	34	1 49	2 2	52 50	56 0	16 10	19 36
34									3 3	38 36	49 22	4 2	0 35	59 10	17 45	47 0	53 45	56	2 16	56	5	43
34										2 2	27 26	1 49	25 14	48 36	32 43	47 43	7 24	52 6	42 3	20	4	

3 [децимы]
9 [ундецим]
14 [дуодецим]
51 [тредецима]
43 [кватуордецимы]
4 [квиндецимы]
22 [сексдецимы]
44 [септендецимы]
46 [октодецимы]
правильно

44											3	12 51	11 49	11 19	49 54	3 50	43 5	46 22	39 15	36 52	56 38		
28										3	51	49	19	54	50	5	22	14	56				
24									3	51	49	19	54	50	5	22	7						
35								3	51	49	19	54	50	4	41				3	51	49	19	54
51							3	51	49	19	54	50	2					3	51	49	19	54	50
24						3	51	49	19	54	25						3	51	49	19	54	50	5
1					3	51	49	18	57							3	51	49	19	54	50	5	22
23				3	51	48	39								3	51	49	19	54	50	5	22	15
48			3	50	54									3	51	49	19	54	50	5	22	15	53
		2	55										3	51	49	19	54	50	5	22	15	53	16
	1											3	51	49	19	54	50	5	22	15	53	16	3
																	0	0 22	44 40	20			
															0	0 46	4 3	20 40	10 19	39 48	36 28	36	
													0	0 14	51 46	39 45	25 38	3 42	36 2	14 36	18 20	42 54	
											0	0 3	9 8	12 15	50 12	45 36	54 33	27 9	57 40	3 51	48 1	9 40	
									0	0 56	38 34	2 50	45 2	8 42	6 5	9 51	6 13	48 18	27 21	17 15	55 1	0 26	
							0	0 41	7 6	51 25	20 50	34 24	12 24	1 42	57 2	8 51	33 3	5 45	50 0	1 28	42 34	29 51	
					0	0 25	2 1	37 50	35 36	6 54	18 4	36 3	24 53	36 12	6 15	1 50	15 0	0 6	18 6	9 9	34 1	6 38	
			0	0 39	57 52	22 15	55 22	1 30	48 1	26 18	39 36	6 57	39 2	23 55	20 1	1 52	16 25	2 58	3 0	1 21	3 8	13 24	
	0	0 55	54 49	35 30	45 35	51 6	18 37	16 3	15 23	1 45	54 0	17 50	5 1	0 22	14 4	38 47	16 6	4 32	26 35	2 28	48 1	6 54	
		56 56	44 44	47 47	11 11	1 1	18 18	0 0	55 55	47 47	0 0	15 15	48 48	46 46	57 57	40 40	56 56	28 28	19 19	48 48	25 25	0 0	
0	1	50	25	48	36	25	21	54	9	10	25	0	4	28	1	0	49	52	16 2	24 56	4 5	0 44	
	3	43	55	22	58	27	57	56	8	44	25	31	42	1	56	22	42	48	58	57	0	0	

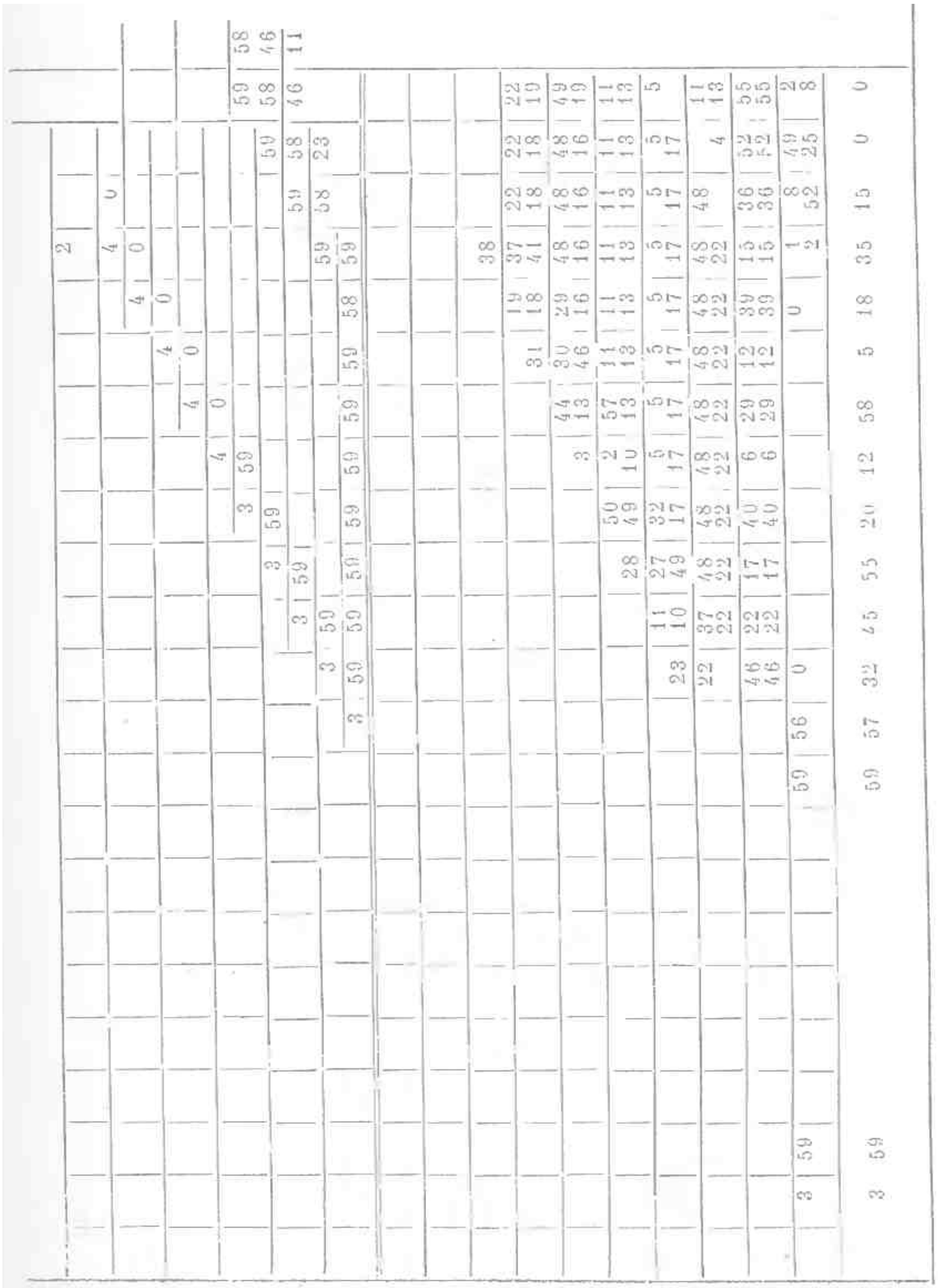
16 об.

Двадцать седьмое действие, из которого получается хорда дополнения дуги, являющейся одной 31 4 8 6 24-й окружности

[поднятые один раз] 1		[градусы] 59		[минуты] 59		[секунды] 59		[терции] 59		[кварты] 59		[квинты] 59		[сексты] 59		[септимы] 59		[октавы] 59		[ноны] 23		
[мерило]	[поднятые дважды]	[поднятые один раз]	[градусы]	[минуты]	[секунды]	[терции]	[кварты]	[квинты]	[сексты]	[септимы]	[октавы]	[ноны]	[децимы]	[ундецимы]	[дуодецимы]	[тредецимы]	[кватуордецимы]	[квиндецимы]	[сексдецимы]	[септендецимы]	[октодецимы]	
	3	59	59	59	59	59	59	59	59	57	33	45	55	20	12	58	5	18	35	15		
	3	59							59	56	0							0	1			
										1 1	32 31	45 59	55	20	12	58	5	18	34 59	22	49	
											0	45 43							34	52 59	11 46	18
												1 1	51							52	24 59	31 25
													3 3	19							25 59	6 58
														0 0	12						25	7
															0 0	56						
																2 2	4					
																	1 1	16				
																		2 2	32			

11 [децим]
28 [ундецим]
50 [дуодецим]
3 [тредецимы]
14 [кватуордецим]
31 [квиндецима]
19 [сексдецим]
38 [септендецим]
43 [октодецим]
правильно

1
59
38
21
58
23



17

Двадцать восьмое действие, из которого получается хорда дополнения дуги, являющейся одной 1 2 8 16 12 48-й окружности

[поднятые один раз] 1		[градусы] 59		[минуты] 59		[секунды] 59		[терции] 59		[кварты] 59		[квинты] 59		[сексты] 59		[септимы] 59		[октавы] 59		[ноны] 50			47 [децим] 52 [ундецимы] 12 [дуодецимы] 30 [тредецимы] 48 [кватуордецим] 37 [квиндецим] 49 [сексдецим] 54 [септендецимы] 40 [октодецим] правильно
[мерило]	[поднятые двайкды]	[поднятые один раз]	[градусы]	[минуты]	[секунды]	[терции]	[кварты]	[квинты]	[сексты]	[септимы]	[октавы]	[ноны]	[децимы]	[ундецимы]	[дуодецимы]	[тредецимы]	[кватуордецимы]	[квиндецимы]	[сексдецимы]	[септендецимы]	[октодецимы]		
	3	59	59	59	59	59	59	59	59	59	23	11	28	50	3	14	31	19	38	43			
	3	59							59	56	0							0	1				
										3 3	23 19	11 59	28	50	3	14	31	19	37 59	1	40		
											3 3	11 7	59						38	41 59	20 44	59	49
												3 3	28 27	59						41	35 59	3 44	11 13
													0	50 47							35	18 59	58 56
														2 2	0							19 0	2 0
															3 3	12						19	
																2 2	28						
																	3 3	16					
																		3 3	36				

																		2				
																		4	0			
																	4	0				
																4	0					
															4	0						
														4	0							
													3	59								59
												3	59								59	41
											3	59								59	40	47
										3	59							59	58	50		
									3	59	59	59	59	59	59	59	58	59				
																		54				
																37	49 48	53 11	6 4	6 4	6 4	
														30	48 47	36 12	23 49	12 49	12 49	12 49	12 50	
												52	11 11	29 48	30 18	17 18	17 18	17 18	17 18	17 18	17 18	
										50	47 46	51 19	8 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20 4	20	
										49	10 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57 49	57	39	44 10	
									1 1	41 41	35 35	44 44	25 25	1 1	37 37	15 15	39 39	47 47	9 9	52 52	2 2	
3	59							59	56	0							0	1 2	41 41	40 35	37 19	
	59								59	23	11	28	50	3	14	31	19	36	43	0	0	

Вычтем этот квадрат из квадрата диаметра.
Останется квадрат стороны. Он таков:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17

17 об.

ПЯТЫЙ РАЗДЕЛ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОЙ СТОРОНЫ ВПИСАННОГО В КРУГ МНОГОУГОЛЬНИКА С 1 2 8 16 12 48 СТОРОНАМИ

Квадрат, вычисленный в двадцать восьмом действии, был такой [30]:

Кварты 6		Квинты 4		Сексты 1		Септимы 14		Октавы 59		Ноны 36		Децимы 14		33 ундецимы 36 дуодецим 49 тредецим 25 кватуордецим правильно
	октавы	ноны	децимы	ундецимы	дуодецимы	тредецимы	кватуордецимы	квиндецимы	сексдецимы	септендецимы	октодецимы			
	36 36	48	31	9	56	45	28	40	21	17				
	0	48	16											
			15 12	8	1									
			3 2	1 49	55 52	31	16							
				12 11	3 55	14 54	12 26	30	1					
					7 7	19 16	46 49	10 29	20 59	9	36			
						2 2	56 49	40 52	21 34	7 59	24 48	51	16	
							6 6	47 40	46 25	7 22	35 29	8 33	44 51	
								7 7	20 16	45 49	5 29	34 59	53 31	
									3 3	55 50	35 32	35 47	22 30	
										5	2	47	52	
									12	12 8	8 2	2 29	30 59	
							12	12 8	8 2	2 29	29 59	59 12	12 14	

[Продолжение]

					12	12 8	8 2	2 28	29 59	58	36		
			12	12 8	8 1	2	14						
	6	12	4										
									1	54			
							3	3 18	36 2	1 24	16 0	19	
					3	1 36	24 6	2 56	12 0	0 33	36 8	4 24	26 19
			1	5 24	34 3	2 56	24 0	0 36	14 3	7 16	42 32	35 27	24 21
	0	0 24	6 0	0 11	56 0	0 14	57 13	8 46	24 35	13 84	46 8	19 24	48 8
		24 24	7 7	34 34	57 57	51 51	5 5	51 51	9 9	55 55	10 10	34 34	26 26
0	36	0	16	0	1	3	16	58	1	21 5	36 2	3 47	12 56
0	36	48	31	9	56	45	28	40	21	17	0	0	0

18 | ШЕСТОЙ РАЗДЕЛ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРИМЕТРОВ ВПИСАННОГО В КРУГ И ОПИСАННОГО ОКОЛО НЕГО МНОГОУГОЛЬНИКОВ, КОТОРЫЕ ПОДОБНЫ ДРУГ ДРУГУ И ЧИСЛО СТОРОН КАЖДОГО ИЗ КОТОРЫХ ЕСТЬ 805 306 368

Умножим корень, полученный в пятом разделе, являющийся величиной одной стороны, на число сторон указанного многоугольника, поднятое которого есть 1 2 8 16 12 48. Получится периметр вписанного в круг многоугольника в тех частях, в которых диаметр есть сто двадцать [31].

Множимое		6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
	множитель	кварты	квинты	сексты	септимы	октавы	ноны	децимы	ундецимы	дуодецимы	тредецимы	кватуордецимы	
Поднятое пять раз	1	6	4	1	14	59	36	14	33	36	19	25	
Поднятое четырежды	2		12	8	2	29	59	12	29	17	12	38	50
Поднятое трижды	8		0	48 0	0 32	8 1	7 52	52 4	1 48	52 4	4 24	48 2	3 32
Поднятое дважды	16			1	36 1	0 4	16 3	15 44	44 9	3 36	44 8	9 48	36 5
Поднятое один раз	12				1	12 0	0 48	12 2	11 48	48 7	2 12	48 6	7 36
Число	48					4	48 3	0 12	48 11	47 12	12 28	11 48	12 26
Произведение		6	16	59	28	1	34	51	46	14	49	46	
		подвитые один раз	части	минуты	секунды	терции	кварты	квинты	сексты	септимы	октавы	ноны	

Этот [периметр] меньше окружности круга и, как мы показали во втором разделе, этот периметр относится к избытку между суммой сторон подобного ему описанного многоугольника над этим периметром, как половина корня того, что получено при двадцать восьмом действии, которая такова:

Части	Минуты	Секунды	Терции	Кварты	Квинты	Сексты	Септимы	Октавы	Ноны	Децимы	Ундецимы	Дуодецимы	Тредецимы	Кватуордецимы	Квиндецимы	Сексдецимы	Септендецимы	Октодецимы
59	59	59	59	59	59	59	59	59	55	23	56	6	15	24	18	54	57	20
К избытку над нею половины диаметра, которая такова [32]:									4	36	3	53	44	35	41	5	2	49

Это четыре числа, находящиеся в пропорции, второе из которых неизвестное. Первый разряд первого числа—поднятое один раз, первый разряд четвертого—ноны, поэтому [первый разряд] их произведения—октавы, а [первый разряд] частного от деления этого на третье—ноны. То, что следует после нон, мы не используем. Таким образом, мы отбрасываем большинство цифр и говорим, что 6 17 относятся к неизвестному, как шестьдесят к 4 36 децимам. Мы умножаем первое на четвертое и понижаем [на разряд], получается двадцать девять нон. Если мы прибавим это к периметру вписанного многоугольника, получится периметр многоугольника, описанного около круга:

Поднятые один раз	Части	Минуты	Секунды	Терции	Кварты	Квинты	Сексты	Септимы	Октавы	Ноны
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	15

Это превышает окружность круга и величина суммы превышения и недостатка есть двадцать девять нон, если диаметр—сто двадцать. Поэтому в частях, в которых окружность есть триста шестьдесят, эта величина заведомо меньше двадцати девяти нон. Как мы показали в третьем разделе, величина одной октавы окружности круга, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров земли, меньше четырех пятых толщины конского волоса, равного одной шестой ширины среднего ячменного зерна. Поэтому то, что меньше двадцати девяти нон этой окружности, меньше двух пятых толщины волоса. Поэтому разность между двумя указанными периметрами, один из которых меньше действительной окружности круга, а другой— больше ее, не превосходит двух пятых толщины волоса. Поэтому, если мы прибавим половину разности между [периметрами] обоих многоугольников к меньшему и отнимем ее от большего или, лучше, восполним то, что находится в разряде нон у меньшего [периметра], т. е. [добавим] 14 нон, и отбросим то, что находится в этом разряде у большего, т. е. 15 нон, то получится так [33]:

Величина окружности, если диаметр—сто двадцать									
поднятые один раз	части	минуты	секунды	терции	кварты	квинты	сексты	септимы	октавы
6	16	59	68	1	34	51	46	14	50

Поэтому разность между этим и тем, что есть в действительности, не превосходит одной пятой толщины конского волоса, т. е. одной шестой ширины среднего ячменного зер-
18 об. на. | Это и есть то, что мы хотели доказать.

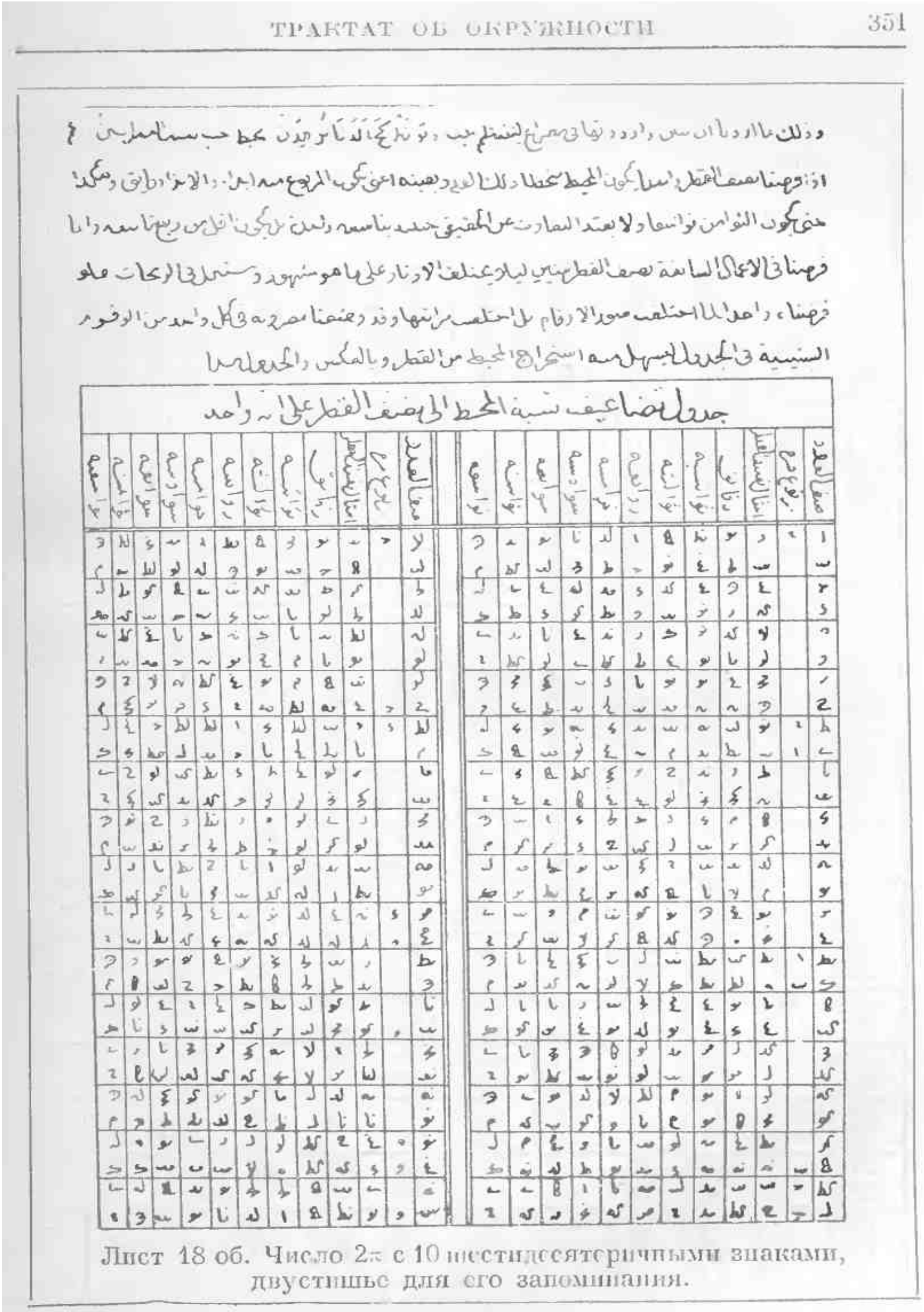
Я выразил это в стихе в следующем двустишьи [34]:

ва йав нат ках а лад на му фа-йадну

мухитун хейсу нисфу-л-кутри сину

6 16 59 28 1 34 51 46 14 50

— окружность, если половина диаметра—60. Далее, если мы примем половину диаметра за единицу, то окружность будет выражаться в точности тем же числом, но пониженным [на разряд], т. е. его поднятые станут частями, части—минутами и так далее до октав, которые станут нонами. В этом случае разность с истинным не превзойдет одной ноны, или, вернее, будет меньше четверти ноны. В предыдущих действиях мы принимали половину диаметра за шестьдесят лишь для того, чтобы хорды не отличались от того, что общепринято и обычно приводится в таблицах. Если же принять половину диаметра за единицу, то цифры [величин хорд] не изменятся, а изменятся только их разряды. Мы привели произведения этого на все шестидесятеричные цифры в таблице, чтобы облегчить определение окружности по диаметру и обратно. Вот эта таблица:



Лист 18 об. Число 2π с 10 шестидесятеричными знаками, двустишье для его запоминания.

352 ДЖЕМШИД ГИЯСЭДДИН КАШИ

Таблица кратных отношения окружности к поло

ряд числа	поднятые один раз	кратные половины диаметра	их минуты	их секунды	их терции	их кварты	их квинты	их сексты	их септимы	их октавы	их ноны
1	0	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50
2		12	33	58	56	3	9	43	32	29	40
3		18	50	58	24	4	44	35	18	44	30
4		25	7	57	52	6	19	27	4	59	20
5		31	24	57	20	7	54	18	51	14	10
6		37	41	56	48	9	59	10	37	29	0
7		43	58	56	16	11	4	2	23	43	50
8		50	15	55	44	12	38	54	9	58	40
9	0	56	32	55	12	14	13	45	56	13	30
10	1	2	49	54	40	15	48	37	42	28	20
11		9	6	54	8	17	23	29	28	43	10
12		15	23	53	36	18	58	21	14	58	0
13		21	40	53	4	20	33	13	1	52	50
14		27	57	52	32	22	8	4	47	27	40
15		34	14	51	0	23	42	56	33	42	30
16		40	31	51	28	25	18	48	19	57	20
17		46	48	50	56	26	52	40	6	12	10
18		53	5	50	24	28	27	31	52	27	0
19	1	59	22	49	52	30	2	23	38	41	50
20	2	5	39	49	20	31	37	15	24	56	40
21	11	11	56	48	48	33	12	7	11	11	30
22		18	13	48	16	34	46	58	57	26	20
23		24	30	47	44	36	21	50	43	41	10
24		30	47	47	12	37	56	42	29	56	0
25		37	4	46	40	39	31	34	16	10	50
26		43	21	46	8	41	6	26	2	25	40
27		49	38	45	36	42	41	17	48	40	30
28	2	55	55	45	4	44	15	9	34	55	20
29	3	2	12	44	32	45	51	1	21	10	10
30	3	8	29	44	0	47	25	53	7	25	0

RBHM, Vol. 23, nº 46, pp. 23–142, 2023

вине диаметра, если она принята за единицу

рид числа	подпятые один раз	кратные половины диаметра	их минуты	их секунды	их терции	их кварты	их квинты	их сексты	их септимы	их октавы	их ноны
31	3	14	46	43	28	49	0	44	53	39	50
32		21	3	42	56	50	35	36	39	54	40
33		27	20	42	24	52	10	28	26	9	30
34		33	37	41	52	53	45	20	12	24	20
35		39	54	41	20	55	20	11	58	39	10
36		46	11	40	48	56	55	3	44	54	0
37		52	28	40	16	58	29	55	31	8	50
38	3	58	45	39	45	0	4	47	17	23	40
39	4	5	2	39	13	1	39	39	3	38	30
40		11	19	38	41	3	14	30	49	53	20
41		17	36	38	9	4	49	22	36	8	10
42		23	53	37	37	6	24	14	22	23	0
43		30	10	37	5	7	59	6	8	37	50
44		36	27	36	33	9	33	37	54	82	40
45		42	44	36	1	11	8	49	41	7	30
46		49	1	35	29	12	43	41	27	22	20
47	4	55	18	34	57	14	18	33	13	37	10
48	5	1	35	34	25	15	53	24	59	52	0
49		7	52	33	53	17	28	16	46	6	50
50		14	9	33	21	19	3	8	32	21	40
51		20	16	32	49	20	38	0	18	36	30
52		26	43	32	17	22	12	52	4	51	20
53		33	0	31	45	23	47	43	51	6	10
54		39	17	31	13	25	22	35	37	21	0
55		45	34	30	41	26	57	27	23	35	50
56		51	51	30	9	28	32	19	9	50	40
57	5	58	8	29	37	30	7	10	56	5	30
58	6	4	25	29	5	31	42	2	42	20	20
59		10	42	28	33	33	16	54	28	35	10
60	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50	0

20 | СЕДЬМОЙ РАЗДЕЛ

О ТОМ, ЧТО ДАЕТ В ПРЕДЫДУЩИХ ДЕЙСТВИЯХ ПРЕНЕБРЕЖЕНИЕ ИЗБЫТОЧНЫМИ И НЕДОСТАТОЧНЫМИ ДРОБЯМИ В ПОСЛЕДНЕМ РАЗРЯДЕ

Знай, что в последнем разряде при этих действиях разница, [т. е. ошибка], не достигает полной единицы этого разряда и не превосходит этого до последнего разряда последнего действия.

В самом деле, в последнем разряде первого действия было пятьдесят семь, и здесь был недостаток на двадцать в следующем, т. е. девятнадцатом разряде, ибо остаток при вычислении был 3 16 27, и если мы разделим это на разность обоих квадратов, т. е. 3 27 50 45, получится 56 40 [25]. Это мы и принимаем, восполняя дробь, за 57. Квадрат при втором действии имеет этот недостаток, т. е. двадцать, но уже в восемнадцатом разряде. Если вычесть его из остатка второго действия, т. е. 2 56 5, останется 2 55 45. Разделим это на разность обоих квадратов, т. е. 3 51 49, получится 45 28, а там мы считали, что при делении 2 56 5 на разность обоих квадратов получилось 46, так что у нас имелся недостаток тридцать два в девятнадцатом разряде. По этому же правилу мы находим, что последний разряд третьего действия имеет недостаток шесть в следующем разряде, при четвертом—избыток пятнадцать, при пятом—недостаток двадцать восемь, при шестом—недостаток пятнадцать, при седьмом—избыток двадцать два, при восьмом—недостаток шесть, при девятом—недостаток двадцать четыре, при десятом—избыток восемнадцать, при одиннадцатом—недостаток четыре, при двенадцатом—избыток двенадцать, при тринадцатом—недостаток пять, при четырнадцатом—недостаток шестнадцать, при пятнадцатом—недостаток семнадцать, при шестнадцатом—избыток девять, при семнадцатом—[избыток] шестнадцать, при восемнадцатом—избыток восемь, при девятнадцатом—недостаток три, при двадцатом—недостаток семнадцать, при двадцать первом—недостаток четырнадцать, при двадцать втором—избыток двадцать семь, при двадцать третьем—три, при двадцать четвертом—единица, при двадцать пятом—восемнадцать, при двадцать шестом—пятнадцать, при двадцать седьмом—десять и при двадцать восьмом—двадцать шесть,—все они в девятнадцатом разряде для корня и в восемнадцатом разряде для квадрата следующего действия; последние семь из этих величин—избытки. Таким образом, квадрат двадцать восьмого действия имеет избыток десять, однако, в восемнадцатом разряде. Поэтому последний разряд избытка над ним квадрата диаметра, т. е. семнадцать в семнадцатом разряде, имеет недостаток десять в восемнадцатом разряде, и последний разряд корня из этого, который мы приняли за двадцать пять, имеет недостаток пятьдесят два в пятнадцатом разряде, а последний разряд произведения, т. е. периметра, который мы приняли за сорок шесть в девятом разряде, имеет недостаток пятьдесят четыре в десятом разряде, и поэтому лучше принять для стороны последний разряд за двадцать четыре, а последний разряд для периметра [многоугольника], вписанного в круг, за сорок пять. Здесь производятся восполнение четырнадцати нон и отбрасывание пятнадцати нон.

Я растянул речь об этом для того, чтобы знали, что пренебрежение в этих действиях избыточными и недостаточными дробями в последнем разряде не приводит к [изменению] одной целой ноны в величине окружности. Мы привели эти величины также в таблице, чтобы переписчики сделали меньше ошибок.

Вот эта таблица:

Таблица того, чем пренебрегается в последнем разряде действия				
действие		чем пренебрегается		избыток и недостаток
1		20		Н
	2		32	Н
3		6		Н
	4		15	Н
5		28		Н
	6		15	Н

[Продолжение]

7	22	И
8	6	И
9	24	И
10	18	И
11	4	И
12	12	И
13	5	И
14	16	И
15	17	И
16	9	И
17	16	И
18	8	И
19	3	И
20	17	И
21	14	И
22	27	И
23	3	И
24	1	И
25	18	И
26	15	И
27	10	И
28	26	И
квадрат диаметра	10	И
диаметр	52	И
окружность	54	И

ВОСЬМОЙ РАЗДЕЛ

О ПЕРЕВОДЕ ВЕЛИЧИНЫ ОКРУЖНОСТИ В ИНДИЙСКИЕ ЦИФРЫ, ЕСЛИ ПОЛОВИНА ДИАМЕТРА—ЕДИНИЦА

Так как окружность равна шести половинам диаметра
20 об. | с дробью, которую мы вычислили до нон, приведем эту дробь к знаменателю десять пять раз повторенных тысяч, так как одна доля этого знаменателя превосходит одну нону не более чем на половину децимы [36]. [Для облегчения действия с этим] мы привели произведения этого на все девять цифр в таблице. Вот эта таблица:

ТРАКТАТ ОБ ОКРУЖНОСТИ 357

Лист 20 об. Число 2π с 17 десятичными знаками, двустишья для его запоминания.

Таблица кратных отно

целые		дро						
их десятки	кратные половины диаметра	единицы тысяч повторенных пять раз	тысяч, повторенных четыре раза			тысяч, повторенных три раза		
			сотни	десятки	единицы	сотни	десятки	единицы
нуль	шесть	два	восемь	три	единица	восемь	пять	три
0	6	2	8	3	1	8	5	3
1	2	5	6	6	3	7	0	6
1	8	8	4	9	5	5	5	9
2	5	1	3	2	7	4	1	2
3	1	4	1	5	9	2	6	5
3	7	6	9	9	1	1	1	8
4	3	9	8	2	2	9	7	1
5	0	2	6	5	4	8	2	4
5	6	5	4	8	6	6	7	7
6	2	8	3	1	8	5	3	0

шения окружности к диаметру

би

тысяч тысяч			тысяч						
сотни	десятки	единицы	сотни	десятки	единицы	сотни	десятки	единицы	числа
нуль	семь	единица	семь	девять	пять	восемь	шесть	пять	
0	7	1	7	9	5	8	6	5	1
1	4	3	5	9	1	7	3	0	2
2	1	5	3	8	7	5	9	5	3
2	8	7	1	8	3	4	6	0	4
3	5	8	9	7	9	3	2	5	5
4	3	0	7	7	5	1	9	0	6
5	0	2	5	7	1	0	5	5	7
5	7	4	3	6	6	9	2	0	8
6	4	6	1	6	2	7	8	5	9
7	1	7	9	5	8	6	5	0	10

Знай, что два, стоящие в последнем [справа] разряде дробей, находятся в разряде минут по отношению к шести, являющимся целыми, если принять, что десять таких минут составляют целую единицу. Если угодно, мы можем назвать этот разряд десятыми. Восемь, стоящие справа от них, находятся в разряде секунд, и мы будем называть их десятичными секундами. Три за восемью [находятся] в разряде терций, мы будем называть их десятичными терциями и так далее по правилам исчисления астрономов. При этом мы исходим из простейшего знаменателя, а именно: из единицы [с нулями] Этот метод в счете с помощью индийских цифр открыт нами, так же как его расположение в таблице.

Мы выразили эти цифры слева направо в стихе в следующем двустишьи [37]:

ва-бахджа хахджи саз а за тах хаваху

мухитун ли-кутрин хува' снани минху

6 2 8 3 1 8 5 3 0 7 1 7 9 5 8 6 5

— окружность, если диаметр—два

и по-персидски:

шаш ва до хашт ва се йек хашт ва пандж ва се сефра

бахафт ва йекра [хафт] ва нох пандж ва хашт ва шаш

пандж аст

Шесть и два, восемь и три, один, восемь и пять и три, нуль с семью и единицей, [семь] и девять, пять и восемь и шесть, пять есть это.

ДЕВЯТЫЙ РАЗДЕЛ

О СПОСОБАХ ДЕЙСТВИЯ С ЭТИМИ ДВУМЯ ТАБЛИЦАМИ

Если величина половины диаметра известна в локтях, фарсангах или других мерах, запишем это цифрами джумала или индийскими цифрами, в каком из этих двух [видов] мы хотим, и умножим это на отношение окружности [к диаметру], для чего войдем в таблицу и начнем с высшего из ее разрядов. То, что мы находим, записываем где-либо. Затем переходим к следующему разряду и записываем то, что мы находим, под ним ниже на разряд. Затем [переходим] к следующему [разряду] и записываем то, что мы находим, под ним, также ниже на разряд и так далее, пока не закончим. Далее складываем все вместе и отбрасываем при этом то, что выходит за пределы того, что находится против последнего разряда, взятого сначала, или даже против нескольких последних, если не требуется уточнения или если круг мал.

То, что получится,—это величина окружности в тех частях, в которых известна половина диаметра, причем высший разряд этого повышен на один разряд по отношению к высшему разряду половины диаметра, безразлично, является ли он нулем или числом, например, если высший разряд половины диаметра—четырежды поднятые, высший разряд произведения—пять раз поднятые, если кварты, высший разряд произведения—терции, если десятки тысяч, [высший разряд произведения]—сотни тысяч, если десятичные терции, [высший разряд произведения]—десятичные секунды. Понижение цифр джумала происходит справа налево, а понижение индийских цифр—слева направо.

Пример. Мы хотим узнать величину окружности круга, половина диаметра которого—шестьсот пятьдесят тысяч восемьсот сорок четыре и одна восьмая локтя или фарсанга.

Записываем это так:

19

Цифрами джумала					
целые				дроби	
трижды поднятые	дважды поднятые	один раз поднятые	локти или фарсанги	минуты	секунды
3	0	47	24	7	30

Действие с цифрами джумала													
трижды поднятые	3	0	18	50	58	24	4	44	35	18	44	30	
дважды поднятые	0		0	0								0	0
один раз поднятые	47			4	55	18	34	57	14	18	33	13	37
локти или фарсанги	24				2	30	47	47	12	37	56	42	30
минуты	7					0	43	58	56	16	11	4	2
секунды	30						3	8	29	49	0	47	26
произведение, т. е. окружность		0	18	55	56	14	14	36	28	15	26	17	35
			трижды поднятые	дважды поднятые	один раз поднятые	локти или фарсанги	минуты	секунды	терции	кварты	квинты	сексты	септимы

Индийскими цифрами								
целые						дроби		
сотни тысяч	десятки тысяч	тысячи	сотни	десятки	единицы	десятые	десятичные секунды	десятичные терции
6	5	0	8	4	4	1	2	5

	Действие с индийскими цифрами																		
сотни тысяч	6	3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9	0
десятки тысяч	5		3	1	4	1	5	2	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2
тысячи	0			0	0														0
сотни	8				5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6	7
десятки	4					2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1	8
единицы	4						2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	2
десятые	1							0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	2
десятичные секунды	2								1	2	5	6	6	3	7	0	6	1	4
десятичные терции	5									3	1	4	1	5	9	2	6	5	4
произведение, т. е. окружность		4	0	8	9	3	7	4	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1	9
		тысячи тысяч	сотни тысяч	десятки тысяч	тысячи	сотни	десятки	единицы	десятые	десятичные секунды	десятичные терции	десятичные кварты	[десятичные квинты]	[десятичные сексты]	[десятичные септимы]	[десятичные октавы]	[десятичные ноны]	[десятичные децимы]	[десятичные ундецимы]
		целые							дроби										

Другой вид, так же с индийскими цифрами, при котором
налево, каждый

								3	1	4	1	5	9	2	6	5
							1	2	5	6	6	3	7	0	6	1
						0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7
					2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7
				2	5	1	3	2	7	4	1	2	2	8	7	1
			5	0	2	6	5	4	8	2	4	5	7	4	3	6
		0	0	0												
	3	1	4	1	5	9	2	6	3	3	5	8	9	7	9	3
3	7	6	9	9	1	1	1	8	4	3	0	7	7	5	1	9
4	0	8	9	3	7	4	2	4	3	4	6	4	1	5	4	1
							тысячи 6 раз	сотни	десятки	единицы	сотни	десятки	единицы	[сотни]	[десятки]	[единицы]
								тысячи 5 [раз]			тысячи 4 [раза]			тысячи 3 [раза]		
тысячи тысяч	сотни тысяч	десятки тысяч	тысячи	сотни	десятки	единицы	десятые	десятичные секунды	[десятичные терции]	[десятичные кварты]	[десятичные квинты]	[десятичные сексты]	[десятичные септимы]	[десятичные октавы]	[десятичные ноны]	[десятичные децимы]
Целые							Если угодно, выразим эту дробь, как две повторенных тысяч и так далее до конца со это, как две десятые, четыре десятичные далее до конца. Это [требует] крайнюю									

начинаем действие справа и повышаем разряд за разрядом друг под другом

3	5	8	9	7	9	3	2	5	5	десятичные терции
4	3	5	9	1	7	3	0		2	десятичные секунды
1	7	9	5	8	6	5			1	десятые
1	8	3	4	6	0				4	единицы
8	3	4	6	0					4	десятки
6	9	2	0						8	сотни
0	0	0							0	тысячи
2	5								5	десятки тысяч
0									6	сотни тысяч
9	3	4	5	4	3	1	2	5	произведение, т. е. окружность	
[сотни]	[десятки]	[единицы]	[сотни]	[десятки]	[единицы]					
тысячи тысяч			тысячи			сотни	десятки	единицы		Названия разрядов
[десятичные ундецимы]	[десятичные дуодецимы]	[десятичные тредецимы]	[десятичные кватуордецимы]	[десятичные квиндецимы]	[десятичные сексдецимы]	[десятичные септедецимы]	[десятичные октодецимы]	[десятичные новдецимы]		

Дроби

шесть раз повторенные тысячи, четыреста тридцать четыре пять раз знаменателем десять шесть раз повторенных тысяч. Если угодно, выразим секунды, три десятичные терции, четыре десятичные кварты и так степень времени действия

19 об. | Самое легкое будет, если отбросить несколько последних разрядов и оставить только то, что влияет на ту величину, которую мы не хотим отбросить. Например, если мера—фарсанг и мы хотим в произведении не отбрасывать пальцы, то, так как палец равен трем четвертям терции фарсанга, т. е. приблизительно трети десятичной квинты [его], искомое получится, если мы будем учитывать [шестидесятеричные] кварты и десятичные сексты и отбросим то, что за ними.

Если же круг мал, например, половина его диаметра есть сто двадцать семь [с половиной] локтей, то мы поступаем так:

Целые	1	0	6	2	8	3	2
	2		1	2	5	6	6
	7			4	3	9	8
Дроби	5				3	1	4
		0	8	0	1	1	0
		Целые				Дроби	

Получится восемьсот один и одна десятая локтя, это величина окружности.

Если же известна величина окружности и мы хотим узнать диаметр, запишем ее и разделим на отношение окружности [к диаметру]. Ищем в таблице наибольшее число, меньшее величины окружности по своим цифрам. Если оно

Если угодно, мы запишем цифры строки частного на полях схемы действия против тех чисел, которые мы искали.

Пример. Мы хотим узнать диаметр круга, если локти окружности по величине равны тому числу, которое мы раньше принимали за диаметр. Поступаем так:

[Строка частного]	Действие с помощью счета джумала						
дважды поднятые 28	окружность	3	0	47	24	7	30
	то, что ищем	2	55	55	45	4	44
один раз поднятые 46	остаток		4	51	39	2	46
	то, что ищем		4	49	1	35	29
локти 25	остаток			2	37	27	17
	то, что ищем			2	37	4	47
минуты 3	остаток				0	22	30
	то, что ищем				0	18	51
секунды 35	остаток					3	39
	то, что ищем						

Строка частного		Индийскими цифрами									
сотни тысяч 1	окружность	0	6	5	0	8	4	4	1	2	5
	то, что ищем	0	6	2	8	3	1	8	5	3	1
десятки тысяч 0	остаток			2	2	5	2	5	5	9	4
	то, что ищем			0	0	0	0	0	0	0	0
тысячи 3	остаток			2	2	5	2	5	5	9	4
	то, что ищем			1	8	8	4	9	5	5	6
сотни 5	остаток				3	6	7	6	0	3	8
	то, что ищем				3	1	4	1	5	9	3
десятки 8	остаток					5	3	4	4	4	5
	то, что ищем					5	0	2	6	5	5
единицы 5	остаток						3	1	7	9	0
	то, что ищем						3	1	4	1	6
десятые 0	остаток								3	7	4
	то, что ищем								0	0	0
десятичные секунды 6	остаток								3	7	4
	то, что ищем								3		

21

ДЕСЯТЫЙ РАЗДЕЛ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗНОСТИ МЕЖДУ ТЕМ, ЧТО ОБЩЕПРИНЯТО И УПОТРЕБЛЯЕТСЯ ЛЮДЬМИ, И ТЕМ, ЧТО МЫ ПОЛУЧИЛИ

Знай, что владеющие этой наукой считают, что окружность равна трем и одной седьмой диаметра и, значит, шести и двум седьмым половины диаметра. Если мы запишем это цифрами джумала и найдем разность между этим и тем, что получено у нас, получится вот что:

Отношение окружности к половине диаметра по общепринятому исчислению	6	17	8	34	12	8	34	17	8	34
Согласно тому, что получено у нас .	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50
Разность между ними	0	0	9	6	10	33	42	30	53	44

Отсюда находим, что эта разность в круге, половина диаметра которого—три тысячи шестьсот локтей, есть приблизительно девять и одна десятая локтя.

Автор «Подарка царю» [38] считает, что половина диаметра выпуклости неподвижных звезд равна семидесяти тысячам семидесяти трем с половиной диаметрам земли и находит окружность, считая ее тремя и одной седьмой диаметра, равной четыремстам сорока тысячам четыремстам шестидесяти двум диаметрам земли. Если же мы вычислим это в соответствии со значением, полученным нами, то разница между ними будет равна ста семидесяти [семи] диаметрам земли с дробью, меньшей четверти. Таким образом, на один градус выпуклости неподвижных звезд приходится приблизительно половина диаметра земли, аллах знает это лучше всех.

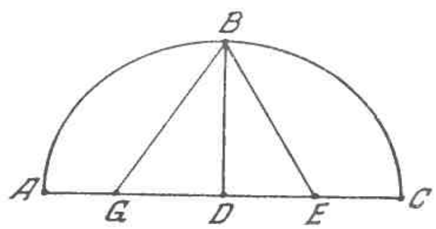
Числовые цифры данного 7 7 3	439822 439 18	97 82 85
Цифра дроби 5	3	14
Произведение	440284	78
То, что в «Подарке» . .	440462	
Разность между ними .	177	

Отсюда понятно, что если умножить половину диаметра на шесть целых и семнадцать минут, то окружность получится более близкой [к истинной], чем если умножить диаметр на три и одну седьмую, это же и более легко.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОШИБОК АБУ-Л-ВАФА И АБУ РЕЙХАНА [БИРУНИ]

Приведем первое предложение первой книги «Алмагеста» [39]. Пусть ABC—полукруг на диаметре ADC, центр—D, а линия BD перпендикулярна к диаметру. Разделим CD



пополам в E и соединим BE. Построим EG, равную BE, и соединим BG. Тогда DG—сторона десятиугольника, а BG—сторона пятиугольника.

Так как CD делится пополам в E и DG прибавлена в ее направлении, то поверхность, [построенная] на CG

24

и DG вместе с квадратом DE, равна квадрату EG по шестому предложению второй [книги] «Начал» [40]. Поэтому это равно квадрату EB, т. е. [вместе взятым] квадратам ED, DB. Отбросим общий квадрат ED, останется: поверхность на CG и DG равна квадрату DB, т. е. квадрату CD. Поэтому линия CG делится в точке D на две части в среднем и крайнем отношении [41], так как произведение всей линии на ее меньшую часть равно квадрату более длинной части. Отсюда следует, что DG относится к CD, как CD к CG по семнадцатому предложению шестой [книги] «Начал» [42]. При этом более длинная часть CD есть хорда одной шестой круга по пятнадцатому предложению четвертой [книги] «Начал» [43]. Поэтому DG—хорда одной десятой круга по разъяснению двенадцатого предложения тринадцатой [книги] «Начал» [44], а BG, стягивающая обе, есть хорда одной пятой круга по тринадцатому предложению тринадцатой [книги] «Начал» [45].

Я говорю, что CG равна хорде дополнения стороны пятиугольника, т. е. хорде трех десятых окружности. Как ты уже знаешь из предыдущего, сумма квадратов хорды дуги и хорды ее дополнения равна квадрату диаметра. Сумма квадратов BG, CG равна квадрату диаметра, так как квадрат диаметра равен четырем квадратам половины диаметра, квадрат CG равен сумме квадрата половины диаметра CD, квадрата DG, и удвоенной поверхности на CD и DG, а квадрат BG равен сумме квадратов половины диаметра BD и DG. Поэтому сумма квадратов CG, BG равна сумме удвоенного квадрата половины диаметра, удвоенного квадрата DG и удвоенной поверхности на CD и DG, но, как ты знаешь из предыдущего, квадрат половины диаметра равен поверхности на CG и DG и, значит, равен сумме поверхности на CD и DG и квадрата DG. Поэтому сумма удвоенной поверхности на CD и DG и удво-
21 об. енного квадрата DG равна удвоенному квадрату | половины диаметра и сумма квадратов DG, CG равна четырем квадратам половины диаметра и, значит, квадрату диаметра.

Таким образом, если BG—сторона пятиугольника, то CG—хорда трех десятых [окружности], а это и есть искомое.

Птолемей в третьем предложении первой книги «Алмагеста» доказал, что разность между поверхностью на хорде одной из двух дуг и на хорде дополнения другой и поверхностью на хорде дополнения первой дуги и на хорде второй равна поверхности на диаметре и на хорде разности между обеими дугами. Он доказал также в четвертом предложении той же книги, что сумма поверхности на хорде одной из двух дуг и на хорде другой [дуги] и поверхности на хорде [дополнения] суммы дуг и на диаметре равна поверхности на хорде дополнения одной из двух дуг и на хорде дополнения другой [46]. Поэтому сумма квадрата хорды дуги и поверхности на хорде [дополнения] результата ее удвоения и на диаметре равна квадрату хорды дополнения этой дуги.

Если эти правила ясны, перейдем к определению хорды полутора частей, проверим то, что, по мнению Абу-л-Вафа, есть хорда половины части, выясним ошибку при его вычислении, найдем дугу половины части и проверим ее правильность. Это вычисление таково:

Объяснение действия	Поднятые два раза	Поднятые один раз	Части	Минуты	Секунды	Терции	Кварты	Квинты	Сексты	Септимы	Октавы
Пять квадратов четверти диаметра, т. е. сумма квадрата половины диаметра и его четверти	1	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Корень из этого, т. е. сумма стороны десятиугольника и четверти диаметра, т. е. EG . .	0	1	7	4	55	20	29	39	6	54	20
Вычтем из этого четверть диаметра, останется сторона десятиугольника, т. е. DG .	0	0	37	4	55	20	29	39	6	54	20

[Продолжение]

Сумма квадрата этого и квадрата половины диаметра, т. е. квадрат стороны пятиугольника	1	22	53	4	39	30	20	53	0	40	0
Сторона пятиугольника, т. е. BG	0	1	10	32	3	13	44	21	54	54	55
Линия CG, т. е. хорда трех десятых,—хорда дополнения одной пятой круга до его половины	0	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20
Хорда трети круга, т. е. дополнение одной шестой, которое было раньше в четвертом разделе	0	1	43	55	22	58	27	57	56	0	44
Поверхность на хорде одной шестой и на хорде дополнения одной пятой	1	37	4	55	20	29	39	6	54	20	0
Поверхность на хорде одной пятой и на хорде дополнения одной шестой	2	2	10	7	56	1	47	58	39	33	50
Разность между ними	0	25	5	12	35	32	8	51	45	13	50
Разделим ее на диаметр, получится хорда трети одной десятой круга, т. е. хорда двенадцати частей . . .	0	0	12	32	36	17	46	4	25	52	37
Ее квадрат	0	2	37	20	14	11	20	19	37	39	52

[Продолжение]

Вычтем ее из квадрата диаметра, останется квадрат хорды 168 частей	3	57	22	39	45	48	39	40	22	20	8
Корень из него . . .	0	1	59	20	33	27	31	40	36	15	34
Затем прибавим к этому корню величину диаметра, поднимем это на один разряд и возьмем корень из этого. Получится хорда 174 [частей]		1	59	50	7	57	32	27	1	7	40
Прибавим диаметр к этому корню, поднимем это на разряд, возьмем корень из этого. Получится хорда [177 частей]		1	59	57	31	57	51	48	7	9	7
Таким же образом получим хорду 178 [частей] 30 [минут] . .		1	59	59	22	59	22	14	35	8	41
Вычтем квадрат этого, т. е. поднятое суммы диаметра и хорды 177 частей, которое было раньше, из квадрата диаметра. Останется квадрат хорды полутора частей . . .	0	0	2	28	2	8	11	52	50	53	
Корень из этого, т. е. хорда полутора частей	0	0	1	34	24	42	19	1	57	12	

Мы записали в клетках, свободных от цифр, красные нули для отличения их от нулей, полученных при действии

Объяснение действия	Первое действие—проверка того, что, по мнению Абу-л-Вафа, есть хорда половины части										Второе действие—проверка того, что мы привели о хорде половины части										
	поднятые два раза	поднятые один раз	части	минуты	секунды	терции	кварты	квинты	сексты	септимы	поднятые два раза	поднятые один раз	части	минуты	секунды	терции	кварты	квинты	сексты	септимы	октавы
Если хорда дуги	0	0	0	31	24	55	54	55	.	.	0	0	0	31	24	56	58	35	58	41	47
То ее квадрат	0	0	0	16	26	56	8	20	52	31	0	0	0	16	26	57	15	2	9	46	
Вычтем его из квадрата диаметра, останется квадрат хорды ее дополнения	3	59	59	43	33	3	51	39	7	29	3	59	59	43	33	2	44	57	50	14	
Хорда ее дополнения . .	0	1	59	59	55	53	15	53	41	11	0	1	59	59	55	53	15	37	0	47	26
Вычтем квадрат хорды этой дуги из квадрата хорды ее дополнения, останется поверхность на диаметре и на хорде дополнения удвоенной данной дуги	3	59	59	27	6	7	43	18	14	58	3	59	59	27	6	5	29	55	40	28	
Разделим это на диаметр. Получится хорда дополнения удвоенной данной дуги	0	1	59	59	43	33	3	51	39	7	0	1	59	59	43	33	2	44	57	50	14
Возведем это в квадрат	3	59	58	54	12	19	57	10	29	59	3	59	58	54	12	15	30	25	59	27	

Так как в конце таблицы первого действия мы получили из хорды, которая, по мнению Абу-л-Вафа, есть хорда половины части, хорду утроенной этой дуги, равную 1 34 14 39 7 59, что меньше хорды полутора частей, которую мы получили в предыдущей таблице равной 1 34 14 42 19 1, на три терции одиннадцать кварт с дробью, то отсюда понятно, что найденное Абу-л-Вафа меньше хорды половины части приблизительно на треть указанной разности, так что окружность, полученная из этого, является неправильной.

То же, что получается в конце таблицы второго действия, в точности совпадает с хордой половины части, откуда понятно, что то, что мы привели для хорды половины дуги в конце таблицы второго действия, правильно.

Что касается проверки дуги двух частей,

то то, что помещено в седьмой строке второго действия, т. е. квадрат хорды дополнения одной части, есть	3	59	58	54	12	15	30	25	59	27	
Если мы вычтем диаметр из этого, пониженного на разряд, останется хорда дополнения двух частей	0	1	59	58	54	12	15	30	25	59	27
Квадрат ее	3	59	55	36	50	14	10	48	21	7	51
Если мы вычтем это из квадрата диаметра, останется квадрат хорды двух частей	0	0	4	23	9	45	49	11	38	52	9
Поэтому корень из этого есть правильное [значение] хорды двух частей	0	0	2	5	39	26	22	29	28	32	25

ТРАКТАТ ОБ ОКРУЖНОСТИ 379

Так как Абу Рейхан [Бируни] при определении периметра многоугольника подсчитал, что это 2 5 39 43 36, понятно, что он здесь ошибся, так как это превосходит правильное [значение] на семнадцать терций четырнадцать кварт, хотя в своих таблицах он привел синус одной части, т. е. половину хорды двух частей, совершенно правильно [47].

Это последнее из того, что мы хотели изложить, слава аллаху, господину обоих миров. Благодаря щедрости аллаха эта книга окончена.