Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 22, nº 45 – pp. 1–20
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

CÁLCULO INTEGRAL DE GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ

Thiago Augusto Silva Dourado
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – IME-USP – Brasil

(aceito para publicação em maio de 2022)

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma tradução do artigo "Sobre uma geometria altamente oculta e a análise dos indivisíveis e infinitos" de Gottfried Wilhelm von Leibniz, publicado na *Acta Eruditorum*, edição de junho de 1686 (número VI), tomado como o trabalho que fundou e aporesentou pela primeira vez o cálculo integral em bases gerais.

Palavras-chave: Matemática, História, Leibniz, Cálculo Diferencial.

[DIFFERENTIAL CALCULUS OF THE GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ]

Abstract

In this work we present a translation of the article "On a highly occult geometry and the analysis of indivisibles and infinites" by Gottfried Wilhelm von Leibniz, published in *Acta Eruditorum*, June 1686 edition (number VI), taken as the work that founded and presented for the first time the integral calculus in general bases.

Keywords: Mathematics, History, Leibniz, Differential Calculus.

Apresentação

O que apresentamos aqui é uma tradução do artigo *"De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum"* de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), publicado em junho de 1686 na *Acta Eruditorum* (número VI, págs. 292–300), onde o autor apresenta pela primeira vez os fundamentos do Cálculo Integral tomado como teoria geral.

Apresentamos conjuntamente, na sequência, as páginas correspondentes à publicação original em latim extraída da revista supramencionada. O leitor perceberá que as iniciais da publicação original contam de G. G. L., de fato estas iniciais são referentes a Gottfried Wilhelm Leibniz, mas Wilhelm escrito em latim como *Guilielmus*. Neste artigo é onde encontramos pela primeira vez publicados o símbolo de integral e uma prova do Teorema Fundamental do Cálculo.

Tradução

G. W. L. SOBRE UMA GEOMETRIA ALTAMENTE Oculta e a Análise dos Indivisíveis e Infinitos, Da Acta Eruditorum Lips., Junho de 1686

Compreendendo que algumas coisas que publiquei nestas Actas para o avanço da Geometria não tenham sido suficientemente entendidas por alguns homens doutos e ainda mais tenham sido alteradas em seu uso e algumas não tenham sido suficientemente compreendidas ou por erro do escritor ou por outra causa, pensei que seria de grande valor adicionar neste lugar o que pode ilustrar os assuntos anteriores. Recebi o tratado do *Sr. Craig*[1] sobre a dimensão das figuras[2], editado no ano anterior em Londres, do qual se deriva claramente que o autor fez avanços não depreciáveis na Geometria interior. Aceita a distinção sugerida alguma vez por mim entre *as dimensões gerais das figuras e as especiais*; na página 1 diz que os geômetras fixaram sua atenção recentemente nela, e reconhece acertadamente muitas falácias dos que tentam provar a impossibilidade da quadratura via esquecimento desta distinção. Também reconhece comigo que são *transcendentes* as figuras que, em geral, outros separam da Geometria, página 26; ademais elogia muitíssimo, páginas 27–29, o método de *tangentes* publicado por mim nas Actas de outubro de 1684[3] por seu engenho, e o considera tão importante que com sua ajuda se reforça o Método das dimensões; opina que proporciona uma solução aos irracionais. No entanto, há algumas coisas sobre as quais pensei que não seria inútil e nem descortês para lhe chamar a atenção tanto a ele como a outros. Pois não sei como é possível crer que quem escreveu um ensaio nas Actas de maio de 84[4], página 233, tenha mudado a abordagem, e que havendo prometido ao princípio nas Actas de outubro de 83 dar a demonstração completa da impossibilidade da quadratura circular reconheceria depois em maio do ano seguinte que ainda não estava suficientemente demonstrada a impossibilidade da quadratura especial. Mas o ensaio de outubro de 83 foi feito pelo Sr. E. T.[5], e o de maio de 84 foi feito

[1] John Craig (1663–1731).

[2] *Methodus figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum quadraturas determinandi.*

[3] *Nova metthodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus*. [Uma tradução deste artigo foi publicado por nós nesta revista, vide: DOURADO, T. A. S.. Cálculo Diferencial de Gottfried Wilhelm von Leibniz. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 22, p. 45-60, 2022.]

[4] Veja nota de rodapé 6 logo abaixo.

[5] Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708).

por mim[6]: neste, por uma parte, indicava este método como meu para não ser acusado em momento algum de usurpar coisa alheia; por outra parte, dissentia amigavelmente do uso que lhe atribuía o Sr. E. T. Pois este pensava da impossibilidade da quadratura indefinida conseguir também a impossibilidade da definida; mas minha ideia havia sido constante (já assinalada quando publiquei a quadratura aritmética no segundo mês do primeiro ano das Actas, já em 82[7]), que não valia a consequência daquela para esta. Para demonstrar isto inclui nas Actas de maio de 84 a presença de uma figura que refletia a quadratura especial (o que posso demonstrar) não somente a geral, tomada ali como admito dos teoremas do Sr. E. T., ainda que apressado e seguro do tema me apartei no modo de provar através do cálculo o que depois explicarei e corrigirei. A isto respondeu o Sr. E. T., privadamente, que ele não havia sacado este método dos meus, senão que havia chegado a ele por seus próprios meios, e o que interessava da objeção, que ele podia demonstrar a consequência das quadraturas indefinidas para as definidas e que nisto se distinguia especialmente seu método; e que minha asseveração se apoiava num cálculo errôneo. E eu voluntariamente reconheci (nas Actas de dezembro de 84, página 587) que se podia demonstrar esta consequência haveria feito o que ninguém até aqui; no entanto, eu sempre duvidei um pouco e depois corroborei com o cálculo correto minha abordagem. Eu havia obtido já este método desde há mais de dez anos; estando juntos em Paris[8], falamos mui frequentemente de temas geométricos; neste tempo ele ia claramente por outros caminhos, mas para mim já era muito familiar aplicar as equações gerais, que hão de ser determinadas pelo desenvolvimento do cálculo, para expressar a natureza da linha buscada, no qual consiste a força do método, tal como observarei em outra parte; não obstante, por sua cortesia e, ao mesmo tempo, por seu engenho, o estimo tanto que facilmente crerei ou que ele chegou a estas coisas por si mesmo, ou que nem sequer recorda em que ocasião passada as mulheres foram expurgadas de tais meditações: particularmente sabendo que também ele, por si mesmo, se distinguiu em coisas mais difíceis, e que se podem esperar de sua capacidade muitas coisas preclaras e as mais grandes descobertas.[9]

---

[6] *De dimensionibus figurarum inveniendis* (Da descoberta das dimensões das figuras). Neste artigo Leibniz está preocupado com um aspecto de áreas retificáveis, em que ele refuta um teorema de Tschirnhaus, e coloca o registro histórico em ordem ao reivindicar prioridade em seu tratamento de formas retificáveis sobre seu ex-amigo Tschirnhaus, demonstrando que um teorema deste último está errado.

[7] *De vera proportlone circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa* (Sobre as verdadeiras proporções de um círculo para um quadrado circunscrito, expresso em números racionais).

[8] A este respeito, em NADLER, S. M., *Spinoza: A Life*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, página 300, encontramos a seguinte citação que o autor afirma ser de uma carta de G. H. Schuller a Spinoza: *"Ele [Tschirnhaus] conheceu [em Paris] um homem chamado Leibniz de notável erudição, mais hábil nas várias ciências e livre dos preconceitos teológicos comuns. [Tschirnhaus] estabeleceu com ele uma estreita amizade, baseada no fato de que, como ele, está trabalhando no problema do aperfeiçoamento do intelecto e, de fato, considera que não há nada melhor ou mais importante do que isso. Na ética, diz ele, Leibniz é mais praticado, e fala apenas pelos ditames da razão não influenciados pela emoção. Ele acrescenta que na física e especialmente nos estudos metafísicos de Deus e da Alma ele é mais habilidoso [...]"* Sobre a convivência de Leibniz e Tschirnhaus em Paris recomendamos o excelente trabalho HOFMANN, J. E., Tschirnhaus und Leibniz in Paris, in *Akten des II. Internationalen Leibniz- Kongresses* (Wiesbaden, 1975), 47–65.

[9] Aqui Leibniz está comentando com pesar sobre a transformação agora chamada de Tschirnhaus, pela qual os coeficientes de certos termos principais em um polinômio podem ser reduzidos à zero; claramente ele não tem certeza de quem o inventou, ele mesmo ou seu amigo, ou talvez ambos juntos. Sobre isto recomendamos

E já que admiti o erro do cálculo no ensaio mencionado, como disse, que o Sr. Craig repreende ao Sr. E. T. (a qual ele o atribui), para rechaçar o método indefinido, opino que, como argumento *ad hominem*, por isto devo corrigir o erro. Foi revisitada a página 239 das Actas do ano de 1684, onde, comparando a equação $4zz-8hz$ e seguintes com a equação $bzz+caz$ e seguintes, os termos postos fora da fração na equação posterior onde falta z devem ser multiplicados pelo denominador da fração antes de que se comece a comparação, de maneira que em uma ou outra fração todos os termos que carecem da letra z se expressem em uma só fração. Ponha-se $b=1$, o qual sempre pode fazer-se, e, posto que na equação primeira o termo xz falta claramente, se faz na posterior $d=0$, se divide também a equação primeira ou dada por 4 e na fração da equação posterior ou suposta tanto o numerador como o denominador se dividem por g; assim, tanto o termo zz como o termo zz no numerador da fração estão de acordo nas duas partes. Comprando os demais, desde o termo z será $c=2h:a$; desde x^4 será $g=1:16$ ou $\frac{1}{16}$; desde x^3 será $f=-1:6a$; desde x no denominador será $f=-h:8a$. Logo será $h=8:6$ ou $\frac{4}{3}$, o qual é absurdo, posto que h é uma quantidade dada. E surgem também outros absurdos da comparação continuada, posto que será ou c ou $f=0$, contra a conclusão.

Por outro lado, me parece bem neste lugar, para dizer algo interessante, *abrir o caminho das quantidades transcendentes*, já que alguns problemas não são planos nem sólidos nem supersólidos ou de grau algum definido, senão que transcendem qualquer equação algébrica. Mostramos com esta intenção, da maneira que se pode fazer sem cálculo, que a linha quadratriz algébrica do círculo e da hipérbole é impossível. Pois, se se desse esta, se seguiria com sua ajuda o ângulo ou proporção dada de reta a reta, e isto em uma construção geral, e daqui o problema da secção de um ângulo ou mais ainda todos os de encontrar médias proporcionais seriam de grau definido, mas, posto que ante um número de partes do ângulo ou de média proporcionais se requer um ou outro grau da equação algébrica, por isto o problema do número de partes ou médias quaisquer compreendidas em si, é de grau indefinido, e transcende toda equação algébrica. E como tais problemas realmente podem ser propostos em geometria, devem ser considerados sem dúvida alguma entre os primeiros, e são determinados; por isto é necessário também que estas linhas se incluam na Geometria, através da qual problemas podem construir-se; e como podem ser descritas com movimento exato e contínuo, como é evidente na cicloide e semelhantes, realmente devem ser consideradas não mecânicas senão geométricas; sendo assim que por sua utilidade deixam detrás delas a grande distância as linhas da Geometria comum (se se excetua a reta e o círculo), e tem propriedades de momento máximo, que são capazes de demonstração geométrica. *Portanto, a Geometria de Descartes que as excluía foi um erro não menor que o dos antigos*, que desprezavam os lugares sólidos ou lineares como não geométricos.[10]

GARVER, R, The Tschirnhaus Transformation, *Ann. Math.* (2) **29** (1/4) (1927–1928), 319–333.

[10] Marc Parmentier, em *La naissance du calcul différentiel : 26 articles des Acta Eruditorum*, Vrin, Paris, 1989, página 135, discorda dessa avaliação de Leibniz.

Como o método de investigar Quadraturas indefinidas ou suas impossibilidades é para mim somente um caso especial (e, certamente, o mais fácil) de um problema muito maior, que chamo *método inverso das tangentes*, em qual se contém a maior parte de toda a geometria transcendente e o que sempre pôde resolver-se algebricamente, se têm descobertos todos os temas; e, no entanto, até aqui nada disso parece distinguir-se satisfatoriamente; por isso mostrarei como pode resolver-se a mesma quadratura indefinida. Ao igual que antes os algebristas adotaram letras ou números gerais no lugar de quantidades fixadas, nos problemas transcendentes eu adotei equações gerais ou indefinidas no lugar de linhas fixadas, por exemplo, sejam x e y a abcissa e a ordenadas de umas coordenadas existentes, a equação da linha proposta por mim é, $0 = a + bx + cy + exy + fxx + gyy$ etc, com o apoio desta equação indefinida proposta busco realmente a tangente de uma linha finita (pois sempre pode determinar-se até onde convém que seja prolongada), comparando o que encontro com a propriedade dada das tangentes encontro o valor das letras supostas a, b, c, etc., e assim determino a equação da linha proposta, de onde, no entanto, por vezes permanecem algumas coisas arbitrárias; nesse caso podem também encontrar-se enumeráveis linhas que satisfazem a proposta, o que foi o motivo de que muitos, considerando o problema não suficientemente resolvido, pensaram que não era possível. As mesmas questões se estabelecem mediante as séries. Para reduzir o cálculo tenho muitas coisas das que falarei em outro momento. E, se a comparação não procede, determino que a linha proposta não é algébrica senão transcendente.

Suposto isto, eu encontro a *espécie de transcendência* (pois algumas transcendentes dependem da secção geral de uma razão ou de logaritmos, outras da secção general de um ângulo, ou de arcos do círculo, outras de algumas questões indefinidas mais complexas); por isto, ademais das letras x e y, adoto ainda uma terceira, como ν, que significa uma quantidade transcendente, e com estas três formo uma equação geral para a linha proposta, a partir da qual busco a tangente da linha segundo meu método das tangentes publicado nas Actas de outubro de 84,[11] o qual não continha as transcendentes. Então, comparando o que encontro com a propriedade dada das tangentes da curva, acho não somente as letras adotadas a, b, c, etc., mas também a natureza especial da transcendente. Ainda que por vezes possa suceder que hão de serem utilizadas muitas transcendentes, alguma vez de naturezas diferentes entre si, e se terão transcendentes de transcendentes, e isto se prolonga até o infinito; no entanto, podemos estar contentes com as mais fáceis e mais úteis; e geralmente podem usar-se técnicas particulares para abreviar o cálculo, e está permitido para reduzir o problema a termos simples, temas que são próprios deste lugar. Aplicando este método às Quadraturas, ou ao descobrimento das linhas quadratrizes (nos quais sempre sem exceção se dá uma propriedade das tangentes), é evidente não somente de que modo se encontra, se a quadratura indefinida é impossível algebricamente, senão também de que modo descoberta esta impossibilidade pode-se encontrar a quadratriz transcendente,[12] a qual até agora não foi realizado. Ademais me

[11] Vide nota de rodapé 3.

[12] Leibniz chama essa curva de *quadratrix* em *De dimensionibus figurarum*, e mais tarde Jacob Bernoulli (1654–1705) a chama de integral, que realmente significa a soma total ou totalidade de uma quantidade. Em maio de 1690, na página 218 das Actas, ele escreve: *"Ergo et horum Integralia aequantur."* Este é o primeiro uso da palavra *integral* em seu sentido matemático atual.

parece que não adiciono em vão que a Geometria com este método é levada muito mais adiante dos limites propostos por Viète e Descartes. Estendendo-se por esta razão a Análise certa e geral até os problemas que não são de grau definido e ademais não são expressos mediante equações algébricas.

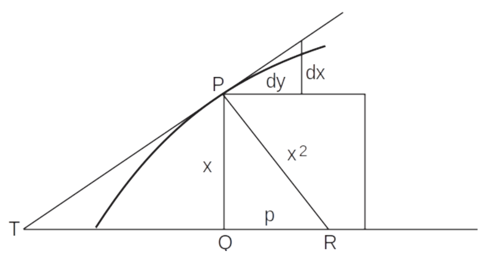
Ademais, para tratar com o cálculo os problemas transcendentes nos quais se encontram dimensões e tangentes, dificilmente pode-se encontrar algo mais útil, mais breve e mais universal que meu *Cálculo de diferenças* ou *Análise dos indivisíveis ou infinitos*, do qual se contém uma pequena parte como prova ou corolário em meu método de tangentes editado nas Actas de outubro de 84[13] e aceito nessa forma pelo Sr. Craig; e o mesmo Sr. Craig suspeitou que nele se continha algo profundo, e por isso na página 29 de seu livreto[14] tentou derivar do teorema barrowniano (a soma dos intervalos entre as ordenadas e as perpendiculares da curva até o eixo e das dirigidas ao eixo é igual ao semiquadrado da última ordenada), em cuja execução, no entanto, se desviou um tanto de seu escopo, do qual não me surpreendo. Por isso penso que seria conveniente para ele e para outros *oferecer neste lugar uma aproximação ao tema, cuja utilidade parece tão evidente*. Pois deste modo os teoremas e problemas, que eram dignos de admiração, se desenvolvem com tal facilidade que já não é necessário aprendê-los e tê-los em conta senão como são estudados a maior parte dos teoremas e problemas da Geometria vulgar por quem a tem por elementar. Assim, pois, procedo no caso anteriormente dito. Seja a ordenada x, a abcissa y, e seja p, como disse, o intervalo entre a perpendicular e a ordenada, vê-se rapidamente, com meu método, que é $pdy = xdx$, o qual também observou o Sr. Craig; convertida esta equação diferencial em soma, será $\int pdy = \int xdx$.[15] Do que expus no método de tangentes, é evidente que d, $\frac{1}{2}xx = xdx$; portanto a recíproca $\frac{1}{2}xx = \int xdx$ (pois como as potências e as raízes nos cálculos comuns, as somas e as diferenças ou $\int$ e d são recíprocas). Temos, por conseguinte, $\int pdy = \frac{1}{2}xx$. Que é o que queríamos demonstrar.[16] Prefiro empregar dx e semelhantes, antes que letras em seu lugar, porque dx é uma certa modificação da letra x, e

[13] Vide nota de rodapé 3.

[14] Vide nota de rodapé 2.

[15] Esta foi a primeira vez que o símbolo de integral apareceu publicado, embora Leibniz o utilizasse em seus escritos pessoais desde 1675. Num manuscrito não publicado de 29 de outubro de 1675, intitulado *Analyseos tetragonisticae pars secunda*, ele escreve: *Utile erit scrib i* $\int$ *pro omnia, ut* $\int l = omm$ *. l, id est summa ipsorum* l . [*Será útil escrever* $\int$ *para omn., de modo que* $\int l = omm$ *. l, isto é, a soma de todos os* l .]

[16] Eis aqui o Teorema Fundamental do Cálculo e a figura sobre a qual Leibniz discorre é a seguinte:



com sua ajuda sucede que, quando o trabalho se faz com a letra x somente, o cálculo evidentemente procede com suas potências e diferenciais, e se expressam as relações transcendentes entre π e outras. Por esta razão também se podem expressar as linhas transcendentes mediante uma equação, por exemplo: seja um arco a, x o seno, será $a = \int dx : \sqrt{2x - xx}$, e se a ordenada da cicloide é y, será $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, esta equação expressa perfeitamente a relação entre a ordenada e a abcissa x, e a partir dela podem-se demonstrar todas as propriedades da cicloide. E deste modo o cálculo analítico se estende a todas as linhas que até agora têm sido excluídas não por outra causa senão porque as consideraram inadequadas para ele; também se derivam daqui as interpolações de Wallis[17] e outros inumeráveis casos.

Falta, para que não pareça que não me atribuo demasiado a mim mesmo o que menosprezo aos demais, que diga em poucas palavras que em minha fórmula se deve especialmente aos insignes matemáticos de nosso século neste gênero da Geometria. Os primeiros, *Galileu*[18] e *Cavalieri*[19],começaram a descobrir as obscuríssimas artes de *Cónon*[20] e *Arquimedes.*[21] Mas a Geometria cavalieriana dos indivisíveis foi somente a infância de uma ciência renascente. Melhores soluções aportaram três homens célebres, *Fermat*[22], encontrando o método dos máximos e mínimos[23], *Descartes*[24], mostrando a razão de expressar por equações as linhas da Geometria comum (mas excluiu as transcendentes), e o *Pe. Gregório de São Vicente*[25], descobrindo muitas coisas valiosas. A isto adiciono a extraordinária regra de *Guldin*[26] sobre o movimento do centro de gravidade[27]. Mas também

---

[17] Wallis descobriu seu famoso produto para π quando estava tentando calcular a integral $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ e, portanto, encontrar a área de um círculo de raio unitário. Resolveu o problema de integrar $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ para potências inteiras de n, baseando-se no método dos indivisíveis de Cavalieri, mas, incapaz de lidar com potências fracionárias, usou interpolação, palavra que introduziu neste trabalho. Sua interpolação usou o conceito de continuidade de Kepler, e com ele descobriu métodos para calcular integrais que mais tarde foram usados por Newton em seu trabalho sobre o teorema binomial. Newton escreveu: "*Sobre o início de meus estudos matemáticos, assim que as obras do nosso célebre conterrâneo, Dr. Wallis, caíram em minhas mãos, considerando a Série, pela Intercalação da qual ele exibe a Área do Círculo e a Hipérbole* [...]".

[18] Galileo di Vincenzo Bonaulti de Galilei (1564–1642).

[19] Bonaventura Cavalieri (1598–1647).

[20] Cónon de Samos (280 a.C.–220 a.C.).

[21] Arquimedes de Siracusa (287 a.C.–212 a.C.).

[22] Pierre de Fermat (1601–1665).

[23] Além deste trabalho que tornou Fermat conhecido, ele é responsável pela criação do que hoje conhecemos como "plano cartesiano". Em *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos) [Ouvres, 1, 91–103], escrito em 1629, mas publicado somente em 1679, ele apresenta na introdução seu princípio fundamental: "*Sempre que em uma equação se achem duas quantidades incógnitas, teremos um lugar geométrico, cujo extremo descreve uma linha reta ou curva.*"

[24] René Descartes (1596–1650).

[25] Gregório de São Vicente (1584–1667).

[26] Paulo Guldin (1577–1643).

[27] Neste trabalho, publicado 1622, Guldin aceitou que o centro de gravidade de todo corpo grande tenta se mover de modo que coincida com o centro de gravidade do universo. Uma consequência interessante foi que ele argumentou que a Terra estaria em constante movimento.

estes permaneciam dentro de certos limites, que transgrediram com novos aportes *Huygens*[28] e *Wallis*[29], ilustres geômetras. E é bastante provável que os temas de Huygens deram ocasião aos mais grandes achados a *Heurat*[30] e os de Wallis a *Neile*[31] e *Wren*[32], que foram os primeiros que demonstraram a retificação das curvas. E, no entanto, nada tira de elogio merecidíssimo dos descobrimentos. Seguem as estes o escocês *James Gregório*[33] e o inglês *Isaac Barrow*[34], que enriqueceram admiravelmente este tipo de ciência com grandes teoremas. Ademais, *Nicolau Mercator*[35], de Holstein, matemático e ilustríssimo, que foi o primeiro, que eu saiba, que deu uma quadratura por série infinita[36]. E não só realizou o mesmo descobrimento independentemente, senão que também o aperfeiçoou com uma razão universal um geômetra de profundíssimo engenho, *Isaac Newton*[37], que se dera a conhecer seus pensamentos, os que entendo que tem, nos proporcionaria sem dúvidas novos caminhos para extraordinários aumentos e tratados da ciência.

Correspondeu-me a mim, então principiante nestes estudos, que desde um único aspecto de uma demonstração sobre a magnitude da superfície esférica se me aparecera de repente a grande luz. Pois eu sabia que em geral a figura formada pelas perpendiculares à curva, aplicadas ordenadamente no eixo (os raios no círculo), é proporcional à superfície do sólido formado pela rotação da figura em relação ao eixo. Muito satisfeito com este primeiro teorema (ignorando que isto era conhecido por outros), imaginei rapidamente o triângulo que em todas as curvas eu chamava característico, cujos lados são indivisíveis (ou, falando mais precisamente, infinitamente pequenos) ou quantidades diferenciais. A partir daqui, com pouco trabalho redigi numerosos teoremas, parte dos quais encontrei depois em Gregório e Barrow. Então não usava o cálculo algébrico; adicionando-o logo encontrei minha quadratura aritmética e muitas outras coisas. Mas não sei por que nesta tarefa não me satisfazia o cálculo algébrico, e ante as dificuldades das figuras me via obrigado a demonstrar ainda muitas coisas que houvera querido analisar, até que finalmente

---

28 Christiaan Huygens (1629–1695).
29 John Wallis (1616–1703);
30 Hendrik van Heuraet (1634–1660).
31 William Neile (1637–1670).
32 Christopher Wren (1632–1723).
33 James Gregório (1638–1675).
34 Isaac Barrow (1630–1677).
35 Nicolau Mercator (1620–1687).
36 A este respeito, o próprio Leibniz escreveu em *De operis argumento et auxiliis*, de 1676: *"Mercator melhorou muito a questão* [ou seja, o problema das quadraturas] *de uma maneira totalmente nova e muito elegante: ele considerou que um número fracionário poderia ser expresso por uma série infinita de números inteiros, tal que* $\frac{1}{1+x}$ *é igual à quantidade:* $1-\frac{x}{1+x}$*, e* $\frac{x}{1+x}$ *igual a* $x-\frac{x^2}{1+x}$*, e* $\frac{x^2}{1+x}$ *a* $x^2-\frac{x^3}{1+x}$ *e assim por diante, e então uma vez que todos os termos foram coletados* $\frac{1}{1+x}$ *é igual à série:* $1-x+x^2-x^3$ *etc. De fato, em virtude da aritmética do infinito, a soma de todo* 1 *é a última abscissa novíssima* x*; e a soma de todos os* x *é a última abscissa novíssima* $\frac{x^2}{2}$*. De fato, seja uma curva, como a hipérbole, cuja abcissa é* x*, e ordenada* $\frac{1}{1+x}$*, ou então,* $1-x+x^2-x^3$ *a soma de todas as ordenadas anteriores, ou a área da figura, será* $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ *etc. , como é conhecido pelas quadraturas das parábolas."*
37 Isaac Newton (1643–1727).

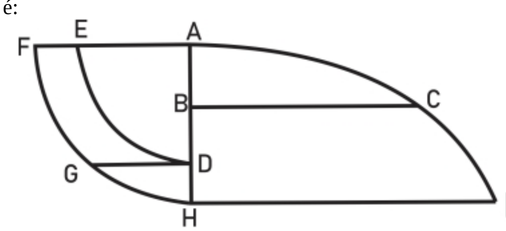
encontrei o verdadeiro suplemento da Álgebra para as transcendentes, isto é, meu cálculo dos infinitamente pequenos, ou diferencial ou somatório ou de quadraturas, e, se não me engano, é o que chamo acertadamente *análise dos indivisíveis e dos infinitos*, que, uma vez encontrado, tudo o que antes me causava admiração neste campo me pareceu um jogo e uma brincadeira. Desde aqui não só é possível construir insignes tratados, senão também o método muito geral pouco antes exposto, com o qual se determinam ou as quadratrizes, ou outras linhas algébricas ou transcendentes buscadas na medida em que é possível. Antes de terminar advirto que nas equações diferenciais ninguém esqueça precipitadamente GD, como na expressão anterior $a=\int dx:\sqrt{2x-xx}$, porque neste caso, no que as x se consideram como crescendo uniformemente, se pode esquecer: mas nisto muitos se equivocaram, e se fecharam o caminho para coisas posteriores, devido ao fato de que deste modo se tira estes indivisíveis, como aqui dx, sua generalidade (de forma que possa aceitar-se qualquer progresso das x), do que, no entanto, nascem inumeráveis transfigurações e equipolências de figuras.

Terminados já estes escritos, veio a minhas mãos que o Sr. E. T. comunicou nas Actas de março deste ano, página 176, onde não propõe questões nem elegantes nem dignas de serem resolvidas[38]. No entanto, parece que há uma linha ax^3 (fig. VIII[39] lá) desde as linhas dos senos, e que sempre o retângulo AH em GD é igual ao espaço $\sqrt{a^6-x^6}$. E na fig. IX[40], se o quadrado BC em BD ou x deverá ser igual sempre ao cubo de a, satisfará um paraboloide, cuja equação é $4a^3yy=25x^5$. De igual forma se pode determinar a

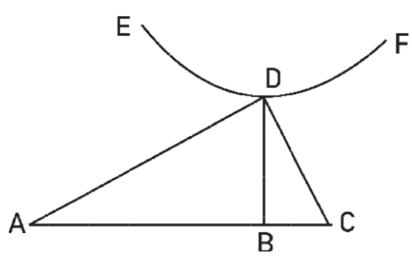
[38] Os problemas que faz referência Leibniz, os que foram propostos por Tschirnhaus são:

- Se a curva *ACI*, e *FGH* o círculo quadrante (fig. VIII – veja nota de rodapé 35), sucederá que *FGH* é o arco *GH*, como *AH* é a *HB*; e a perpendicular baixada *GD* terá o quadrante contínuo *ED* igual à reta *BC*, e será evidente que a curva *CI* é mecânica.
- Determinar a curva donde (fig. IX) o quadrado *BE* na linha *BD* seja sempre igual ao cubo da linha dada.
- Encontrar uma curva de maneira que o produto das três linhas *AD, BD, BC* (fig. IX) seja sempre igual ao cubo.

[39] A figura correspondente é:



[40] A figura correspondente é:



questão para outras potências. Mas se AB, DB, $BC =$ cubo dado, a questão volta a quadratriz da figura, o valor de cuja ordenada ax^3 dividido por $\sqrt{a^6 - x^6}$. No entanto, em qualquer tipo de relação dada entre as retas AB, BC, CD, AD, DB, na dita fig. IX encontrar uma linha é um problema que coincide com a busca de uma quadratura. Mas, se na reta AC se toma um ponto fixo L, surgem novas relações de outras naturezas, como se se dá uma relação entre LC e CD, ainda que este problema também receba uma solução.

Versão original em latim

vam ſumitur, circumferentia autem per verticem tranſit, ſectionem conicam in vertice oſculatur, adeoq; aſſumto arcu, quantum ſatis eſt parvo, ab ea non differt ad ſenſum. Quæ cauſa eſt, cur focus ſpeculi concavi circularis abſit a ſpeculo quarta parte diametri, quia focus parabolæ a vertice abeſt quarta parte parametri, & focus parabolæ atque circuli oſculantis coincidunt. Eadem in omni alio linearum & utilium proprietatum genere, pro re nata locum habent. Quæ *quantum conferant ad ſubtilitates Geometricas in uſum vitæ transferendas*, nemo talium intelligens non videt. Nobis vero aditum aperuiſſe, ne forte periret hæc meditatio, nunc quidem ſatis fuit. Nec injucundum erit conſiderare, quomodo ita tandem controverſia Geometrarum de Angulo contactus, quæ pleriſque inanis viſa eſt, in veritates defierit ſolidas & profuturas.

G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET Analyſi Indiviſibilium atque infinitorum, Addenda his quæ dicta ſunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586.

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum *Dn. Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimenſiones figurarum generales & ſpeciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogiſmos complures tetragoniſmi impoſſibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe *Tranſcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præſtantiſſimam & cujus ope Methodus dimenſionum valde ju-

vetur,

MENSIS JUNII A. M DC LXXXVI. 293

vetur, optimo contra irrationalitates remedio suppeditato. Sunt tamen nonnulla, de quibus monere eum aliosque, nec inutile, nec ipsi ingratum fore putavi. Nescio enim quomodo factum sit, ut crediderit eum qui schediasma Act. Maji 84 p. 233 scripsit, retractasse sententiam, & cum initio Act. Octobr. 83 proposuisset omnimodam dare demonstrationem impossibilitatis tetragonismi circularis, postea agnovisse Majo anni sequentis, nondum satis demonstratam esse impossibilitatem tetragonismi specialis. Cum tamen schediasma Octobr. 83 sit a Dn. D.T. schediasma vero Maji 84 a me sit profectum: qui partim eandem methodum & mihi asserebam, ne aliquando rei alienæ usurpatæ accusarer, partim ab usu quem ei tribuebat Dn.D.T. amice dissentiebam. Nam putabat ille ex indefiniti tetragonismi impossibilitate, sequi & cujusque definiti impossibilitatem: meum vero constans dogma fuerat (jam tum indicatum, cum tetragonismum arithmeticum ederem mense secundo anni primi actorū, nempe 82) ab illa ad hanc non valere consequentiam. Quod ut probarem, instantiam cujusdam figuræ attuli in Actis Maji 84, quæ tetragonismum specialem recipit, (quod possum demonstrare) non vero generalem, ut ex ipsis Dn.D.T. theorematis ibi ostendere susceperam; quanquam festinus & rei certus in modo probandi per calculum nonnihil aberraverim, quod postea explicabo & corrigam. Ad hæc Dn. D. T. privatim respondit, se methodum istam non ex meis hausisse, sed in eam proprio Marte devenisse, & quod ad objectionem attineret, se consequentiam illam a tetragonismis indefinitis ad definitos posse demonstrare, inque eo potissimum methodum suam eminere; instantiam vero meam pravo calculo niti. Ego vero lubens fassus sum (in Actis Decembr. 84 p. 587) si eam consequentiam demonstrare possit, facturum quod hactenus nemo; semper tamen subdubitavi, & correcto calculo postea instantiam meam roboravi, de quo mox. Quanquam autem ego hanc methodum jam habuerim ante decennium & amplius, cum una essemus Parisiis, & de rebus Geometricis creberrime loqueremur, quo tempore ipse per alias plane vias incedebat, mihi vero jam tum familiarissimum erat æquationes generales adhibere pro exprimenda natura lineæ quæsitæ, progressu calculi determinandas, in quo methodi nervus consistit, quale quid alibi nuspiam animadverteram; attamen candori ejus pariter &

Qq ingenio

ingenio tantum tribuo, ut facile credam vel ipſum per ſe in hæc incidiſſe, vel ſaltem non amplius meminiſſe qua olim occaſione talium meditationum ſemina fuerint jacta: præſertim cum ſciam etiam difficiliora ipſum per ſe præſtitiſſe, & multa præclara maximique momenti ab ejus ingenio poſſe expectari.

Quoniam vero in inſtantiæ ſupradictæ calculo erratum a me, ut dixi, admiſſum eſt, quod Dn. Craigius Dno. D.T (cui id tribuerat) tanquam argumentum opinor ad hominem objecit, ut ipſam methodum indefinitam refutaret, ideo corrigere calculum debeo. Inſpiciatur Actorum anni 1684 pagina 239, ubi æquationem $4zz-8hz$, &c. conferendo cum æquatione $bzz+caz$ &c. debent in æquatione poſteriore termini ubi abeſt z, extra fractionem poſiti, multiplicari per fractionis nominatorem, antequam comparatio inſtituatur, ut in utraque fractione omnes termini carentes litera z, una fractione comprehendantur. Ponatur & $b=1$ quod ſemper fieri poteſt, & quia in æquatione priore terminus xz plane abeſt, fiat in poſteriore $d=0$, dividatur & æquatio prior ſeu data per 4, & in poſterioris ſeu ſuppoſititiæ æquationis fractione tam numerator quam nominator dividatur per g: ita tam terminus zz utrobique, quam terminus zz in nominatore fractionis utrobique conſentient. Cætera comparando, ob terminum z, fiet $c=2h:a$; ob x^4 fiet $g=1:16$, ſeu $\frac{1}{16}$; ob x^3 fiet $f=-1:6a$; ob x in nominatore fiet $f=-h:8a$. Ergo fit $h=8:6$, ſeu $\frac{4}{3}$ quod abſurdum, nam h eſt quantitas data. Oriuntur & aliæ ex comparatione continuata abſurditates, nam fit vel c vel $f=0$, contra jam concluſa.

Cæterum placet hoc loco, ut magis profutura dicamus, *fontem aperire Tranſcendentium Quantitatum*, cur nimirum quædam problemata neque ſint plana, neque ſolida, neque ſurſolida aut ullius certi gradus, ſed omnem æquationem Algebraicam tranſcendant. Eademque opera modum oſtendemus, quomodo ſine calculo demonſtrari poſſit, lineam quadratricem Algebraicam circuli & hyperbolæ eſſe impoſſibilem. Si enim illa daretur, ſequeretur ejus ope angulum aut rationem ſive logarithmum ſecari poſſe in data ratione rectæ ad rectam, idque una generali conſtructione, & proinde problema ſectionis anguli vel inventionis quotcunque mediarum proportionalium foret certi gradus, cum tamen pro alio numero partium

partium anguli aut mediarum proportionalium, alius atque alius gradus æquationis Algebraicæ requiratur, & ideo problema intellectum in genere de numero partium aut mediarum quocunque, ſit gradus indefiniti, & omnem Algebraicam æquationem tranſcendat. Quoniam tamen nihilominus talia problemata revera in Geometria proponi poſſunt, imo inter primaria haberi debent, & determinata ſunt; ideo neceſſe utique eſt, eas quoque lineas recipi in Geometriam, per quales ſolas conſtrui poſſunt; & cum eæ exacte continuoque motu deſcribi poſſint, ut de cycloide & ſimilibus patet, revera cenſendas eſſe non Mechanicas ſed Geometricas; præſertim cum utilitate ſua lineas communis Geometriæ (ſi rectam circulumque exceperis) multis paraſangis poſt ſe relinquant, & maximi momenti proprietates habeant, quæ prorſus Geometricarum demonſtrationum ſunt capaces. *Non minor ergo Carteſii Geometria eas excludentis, quam veterum lapſus fuit,* qui loca ſolida aut linearia tanquam minus Geometrica rejiciebant.

Quoniam etiam methodus inveſtigandi Tetragoniſmos indefinitos aut eorum impoſſibilitates, apud me caſus tantum ſpecialis eſt, (& quidem facilior) problematis multo majoris, quod appello *Methodum Tangentium inverſam*, in quo maxima pars totius Geometriæ tranſcendentis continetur, & quod ſi Algebraice ſemper poſſet ſolvi, omnia reperta haberentur, & vero nihil adhuc de eo extare video ſatisfaciens, ideo oſtendam quomodo non minus abſolvi poſſit, quam Tetragoniſmus ipſe indefinitus. Cum igitur antea Algebraiſtæ aſſumerent literas ſeu numeros generales pro quantitatibus quæſitis, ego in talibus problematibus tranſcendentibus aſſumſi æquationes generales ſeu indefinitas pro lineis quæſitis v. g. abſciſſa & ordinata exiſtentibus x & y, æquatio pro linea quæſita mihi eſt, $o = a + bx + cy + exy + fxx + gyy$ &c. ope hujus æquationis indefinite propoſitæ, revera finitæ (ſemper enim determinari poteſt, quouſque aſſurgi opus ſit) quæro lineæ tangentem, & quod invenio, id cum proprietate tangentium data conferens, reperio valorem literarum aſſumtitiarum, a, b, c, &c. atque adeo æquationem lineæ quæſitæ definio, ubi tamen interdum quædam manent arbitrariæ; quo caſu etiam innumeræ lineæ reperiri poſſunt, quæſito ſatisfacientes, quod in cauſa fuit, ut multi problema non ſatis definitum a poſteriori videntes, putarent,

Qq 2 nec

nec in poteſtate eſſe. Eadem per ſeries quoque præſtantur. Ad calculum autem contrahendum multa habeo, de quibus alias. Quod ſi comparatio non procedat, pronuntio lineam quæſitam non eſſe Algebraicam, ſed tranſcendentem.

Quo poſito, ut ipſam *Tranſcendentiæ ſpeciem* reperiam, (aliæ enim tranſcendentes pendent a ſectione generali rationis, ſeu a Logarithmis, aliæ a ſectione generali anguli, ſeu ab arcubus circuli, aliæ ab aliis indefinitis quæſtionibus magis compoſitis) ideo præter literas x & y aſſumo adhuc tertiam ut v, quæ tranſcendentem quantitatem ſignificat, & ex his tribus formo æquationem generalem ad lineam quæſitam, ex qua lineæ tangentem quæro, ſecundum meam methodum tangentium in Actis Octobr. 84 publicatam, quæ nec tranſcendentes moratur. Deinde id quod invenio comparans cum data proprietate tangentium curvæ, reperio non tantum literas aſſumtitias a,b,c,&c. ſed & ſpecialem tranſcendentis naturam. Quanquam autem aliquando fieri poſſit, ut plures adhibendæ ſint tranſcendentes, naturæ quandoque inter ſe diverſæ, & dentur tranſcendentes tranſcendentium, & omnino talia procedant in infinitum, tamen facilioribus & utilioribus contenti eſſe poſſumus; & plerumq; peculiaribus artificiis uti licet ad calculum contrahendum, problemaque quoad licet ad terminos ſimplices revocandum, quæ non ſunt hujus loci. Hac autem methodo ad Tetragoniſmos applicata, ſeu ad inventionem linearum quadratricium (in quibus utique ſemper tangentium proprietas data eſt) patet non tantum, quomodo inveniatur, an quadratura indefinita ſit Algebraice impoſſibilis, ſed & quomodo impoſſibilitate hac deprehenſa reperiri poſſit quadratrix tranſcendens, quod hactenus traditum non fuit. Adeo ut videar non vane aſſeruiſſe, Geometriam hac methodo ultra terminos a Vieta & Carteſio poſitos in immenſum promoveri. Cum hac ratione Analyſis certa & generalis ad ea porrigatur problemata, quæ nullius ſunt certi gradus, atque adeo Algebraicis æquationibus non comprehenduntur.

Porro quoniam ad problemata Tranſcendentia, ubicunque dimenſiones tangentesque occurrunt, calculo tractanda, vix quicquam utilius, brevius, univerſalius fingi poteſt *calculo* meo *differentiali* ſeu *analyſi indiviſibilium atque infinitorum*, cujus exiguum tantum velut

ſpecimen

MENSIS JUNII A. M DC LXXXVI. 297

ſpecimen ſive corollarium continetur in Methodo illa mea Tangentium in Actis Octobr. 84 edita, & Dn. Craigio tantopere probata; & ipſe Dn. Craigius ſuſpicatus eſt, aliquid altius in ea latere, ac proinde pag. 29 ſui libelli inde derivare conatus eſt theorema Barrovianum (quod ſumma intervallorum, inter ordinatas & curvæ perpendiculares in axe ſumtorum, & ad axem applicatorum, æquetur ſemiquadrato ordinatæ ultimæ) in cujus executione tamen nonnihil a ſcopo deflexit, quod in nova methodo non miror; ideo gratiſſimum ipſi aliisq; fore arbitror, *ſi hoc loco aditum rei, cujus tam late patet utilitas, patefecero*. Nam inde omnia hujusmodi theoremata ac problemata, quæ admirationi merito fuere, ea facilitate fluunt, ut jam non magis ea diſci teneriq; neceſſe ſit, quam plurima vulgaris Geometriæ theoremata illi ediſcenda ſunt, qui ſpecioſam tenet. Sic ergo in caſu prædicto procedo. Sit ordinata x, abſciſſa y, intervallum inter perpendicularem & ordinatam quod dixi ſit p, patet ſtatim methodo mea fore $pdy = xdx$ quod & Dn. Craigius ex ea obſervavit; qua æquatione differentiali verſa in ſummatricem, fit $\int pdy = \int xdx$. Sed ex iis quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe $d, \frac{1}{2} xx = xdx$; ergo contra $\frac{1}{2} xx = \int xdx$ (ut enim poteſtates & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ & differentiæ ſeu $\int$ & d, reciprocæ ſunt). Habemus ergo $\int pdy = \frac{1}{2} xx$. Quod erat dem. Malo autem dx & ſimilia adhibere, quam literas pro illis, quia iſtud dx eſt modificatio quædam ipſius x, & ita ope ejus fit, ut ſola quando id fieri opus eſt litera x, cum ſuis ſcilicet poteſtatibus & differentialibus calculum ingrediatur, & relationes tranſcendentes inter x & aliud exprimantur. Qua ratione etiam lineas tranſcendentes æquatione explicare licet, verbi grat. Sit arcus a, ſinus verſus x, fiet $a = \int \overline{dx : \sqrt{\overline{2x - xx}}}$, & ſi cycloidis ordinata ſit y, fiet: $y = \sqrt{\overline{2x - xx}} + \int \overline{dx : \sqrt{\overline{2x - xx}}}$, quæ æquatio perfecte exprimit relationem inter ordinatam y & abſciſſam x, & ex ea omnes cycloidis proprietates demonſtrari poſſunt; promotusque eſt hoc modo calculus analyticus ad eas lineas, quæ non aliam magis ob cauſam hactenus excluſæ ſunt, quam quod ejus incapaces crederentur: Interpolationes quoque Walliſianæ & alia innumera hinc derivantur.

Quod ſupereſt, ne nimium mihi aſcribere aut detrahere aliis

Qq 3 videar,

298 ACTA ERUDITORUM

videar, paucis dicam quid potiſſimum inſignibus noſtri ſeculi Mathematicis in hoc Geometriæ genere mea ſententia debeatur. Primi *Galilæus* & *Cavallerius* involutiſſimas *Cononis & Archimedis* artes detegere cœperunt. Sed Geometria indiviſibilium Cavalleriana, ſcientiæ renaſcentis non niſi infantia fuit. Majora ſubſidia attulerunt triumviri celebres, *Fermatius* inventa methodo de maximis & minimis, *Carteſius* oſtenſa ratione lineas Geometriæ communis (tranſcendentes enim excluſit) exprimendi per æquationes, & *P. Gregorius a S. Vincentio* multis præclaris inventis. Quibus egregiam *Guldini* regulam de motu centri gravitatis addo. Sed & hi intra certos limites conſtitere, quos transgreſſi ſunt novo aditu aperto, *Hugenius* & *Walliſius*, Geometræ inclyti. Satis enim probabile eſt, Hugeniana *Heuratio*, Walliſiana *Neilio* & *Wrennio*, qui primi curvis æquales rectas demonſtravere, pulcherrimorum inventorum occaſionem dediſſe. Quod tamen meritiſſimæ laudi inventionum nil detrahit. Secuti hos ſunt *Jacobus Gregorius* Scotus, & *Iſaacus Barrovius* Anglus, qui præclaris in hoc genere theorematibus ſcientiam mire locupletarunt. Interea *Nicolaus Mercator*, Holſatus, Mathematicus & ipſe præſtantiſſimus, primus, quod ſciam, quadraturam aliquam dedit per ſeriem infinitam. At idem inventum non ſuo tantum Marte aſſecutus eſt, ſed & univerſali quadam ratione abſolvit profundiſſimi ingenii Geometra, *Iſaacus Neutonus*, qui ſi ſua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere intelligo, haud dubie nobis novos aditus ad magna ſcientiæ incrementa compendiaque aperiret.

Mihi contigit adhuc tironi in his ſtudiis, ut ex uno aſpectu cujusdam demonſtrationis de magnitudine ſuperficiei ſphæricæ, ſubito magna lux oboriretur. Videbam enim generaliter figuram factam ex perpendicularibus ad curvam, axi ordinatim applicatis, (in circulo radiis) eſſe proportionalem ſuperficiei ipſius ſolidi, rotatione figuræ circa axem geniti. Quo primo theoremate (cum aliis tale quid innotuiſſe ignorarem) mirifice delectatus, ſtatim comminiſcebar triangulum, quod in omni curva vocabam characteriſticum, cujus latera eſſent indiviſibilia (vel accuratius loquendo infinite parva) ſeu quantitates differentiales; unde ſtatim innumera theoremata nullo negotio condebam, quorum partem poſtea apud Gregorios & Barrovium deprehendi. Nec dum vero Algebraico calculo utebar,

quem

MENSIS JUNII A. M DC LXXXVI. 299

quem cum adjeciſſem, mox quadraturam meam Arithmeticam aliaque multa inveni. Sed neſcio quomodo non ſatisfaciebat mihi calculus Algebraicus in hoc negotio, multaque quæ analyſi voluiſſem, præſtare adhuc cogebar figurarum ambagibus, donec tandem verum Algebræ ſupplementum pro tranſcendentibus inveni, ſcilicet meum calculum indefinite parvorum, quem & differentialem aut ſummatorium aut tetragoniſticum, & ni fallor, ſatis apte *analyſin indiviſibilium & infinitorum* voco, quo ſemel detecto, jam ludus jocusque viſum eſt, quicquid in hoc genere ipſe antea fueram admiratus. Unde non tantum inſignia compendia, ſed & methodum generaliſſimam paulo ante expoſitam condere licuit, qua ſive quadratrices, ſive aliæ quæſitæ lineæ algebraicæ vel tranſcendentes, prout poſſibile eſt, determinantur. Antequam finiam, illud adhuc admoneo, ne quis in æquationibus differentialibus, qualis paulo ante erat $a = fdx : \sqrt{1-xx}$ ipſam dx temere negligat, quia in caſu illo, quo ipſæ x uniformiter creſcentes aſſumuntur, negligi poteſt: nam in hoc ipſo peccarunt plerique, & ſibi viam ad ulteriora præcluſere, quod indiviſibilibus iſtiusmodi, velut dx, univerſalitatem ſuam (ut ſcilicet progreſſio ipſarum x aſſumi poſſet qualiscunque) non reliquerunt; cum tamen ex hoc uno innumerabiles figurarum transfigurationes & æquipollentiæ oriantur.

Scriptiuncula hac jam abſoluta, venere in manus meas, quæ Dn. D.T in Martio hujus anni Actorum pag. 176 communicavit. Ubi nonnullas quæſtiones elegantes propoſuit, & ſolvi dignas. Video autem lineam ACI (fig. VIII ibi) eſſe quandam ex lineis ſinuum, ſemperque rectangulum AH in GD eſſe æquale ſpatio ABCA. Et in fig. IX ſi quadratum BC in BD ſeu X ſemper æquale debeat eſſe dato cubo ab a, ſatisfacere paraboloeidem, cujus æquatio eſt $4a^3yy = 25X^5$. Similiter rem determinare licet pro aliis potentiis. Sin AD, DB, BC = cubo dato, res redit ad quadratricem figuræ, cujus ordinatæ valor eſt aX^3 diviſ. per $\sqrt{a^6 - X^6}$. In genere autem data relatione quacunque inter rectas AB, BC, CD, AD, DB in dicta fig. IX invenire lineam, problema eſt, quod coincidit cum inventione quadraturarum. Sed ſi in recta AC aſſumatur punctum fixum L, novæ oriun-

oriuntur alterius naturæ relationes, ut si data sit relatio inter LC & CD, quod problema tamen itidem solutionem recipit.

VVILHELMI MOLYNEUX OBSERVATIO DE Insecto Hibernico, vocato Connough-VVorm. Excerpta ex Transact. Philos. Ang. M. Febr. 1685. num. 168. pag. 876. seqq.

HAud exiguum naturæ privilegium est, quod experientia teste, Hiberniæ regnum animalibus venenatis in totum carere deprehenditur: id quod eo usque etiam aliqui extensum volunt, ut extranea quoque animantia veneno prædita, illuc vel casu vel data opera advecta, continuo expirare perhibeant, quamprimum solum contingant Hibernicum. Quemadmodum vero alias vix ulla regula ab omni exceptione immunis est; ita & generalem hujus ptærogativæ ambitum, unico licet exemplo, limitare hactenus ausi sunt ejus regni incolæ, dum certam vermis speciem, quam *Connough-Worm* appellant, communi suffragio pro venenosa agnoverunt, pecoribus inprimis eam summe noxiam judicantes. Non indignum proinde sua curiositate putavit Molyneusius, Societatis Philosophicæ Dublinensis Secretarius, si in rei hujus veritatem curatius inquireret. Hinc non afferri solum sibi jussit vermem ejusmodi, tametsi patria ejus prope 40 milliaribus Dublino distaret; sed & naturam ac historiam ipsius ab hominibus istius regionis sedulo sciscitatus est. Et figuram quidem insecti talem deprehendit, qualem *Fig. 1 & 2.* exhibent: compertum tamen est, id quandoque ad pollicis crassitiem & longitudinem tribus unciis majorem excrescere. At de natura ejus ac speciatim de noxa vermi huic imputata certi nihil, sed cuncta meris saltem conjecturis nixa perdiscere percontanti licuit. Cæterum morbus, quem pecoribus infligere creditur insectum hoc, consistit in tumore capitis, &, quæ peculiaris ipsius nota characteristica habetur, ingenti inflatione ac procidentia ani, in tantum, ut aliquando plus quam semipedis longitudine propendeat Rectum. Pecoribus ita affectis Angli quidem patres familias medicinam adhibent ex acantho, ruta, allio, butyro & cerevisia, in unum commixtis: verum

TAB. IX. FIG. 1 & 2.

Hiberni,

Thiago Augusto Silva Dourado
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – IME-USP – campus de São Paulo – Brasil

E-mail: thiago.dourado@ime.usp.br