Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 17 nº 33 - pág. 1-16
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

FÓRMULA DE DE MOIVRE, OU DE BINET OU DE LAMÉ: DEMONSTRAÇÕES E GENERALIDADES SOBRE A SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI - SGF

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – Brasil

(aceito para publicação em novembro de 2017)

Resumo

Nosso objetivo, com este trabalho, consiste em apresentar algumas ideias e demonstrações relacionadas com a validez do teorema de De Moivre, ou de Binet ou de Lamé. Todavia, não podemos discutir uma relação explicita dos termos da *Sequência de Fibonacci* – SF, deixando de mencionar e apresentar as possibilidades de generalização do modelo matemático que prevê a reprodução dos “coelhos imortais”. Desse modo, abordamos ainda, a discussão de determinada generalização, indicadas por Brousseau (1965). Hoggat & Wenner (1969) e Alves & Borges Neto (2011), que possibilitam sua extensao ao campo dos números inteiros. Por fim, trazemos ao leitor, a proposição dos modelos relativos às sequências de *Tribonacci*, *Tetranacci*, etc., bem como uma reflexão do comportamento previsto do Teorema de De Moivre, de Binet ou de Lamé para tais sequências, pouco referenciadas nos compêndios de Historia da Matemática.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci, Sequência Generalizada de Fibonacci, Historia da Matemática.

[DE MOIVRE´S FORMULA, OR BINET OR LAMÉ´S FORMULA: PROOF AND SOME GENERALITIES RELATED WITH THE GENERALIZED SEQUENCE OF FIBONACCI - GFS]

Abstract

Our goal, in this work, is to present some ideas and demonstrations related with the validity of the De Moivre´s theore, or the Binet´s or Lamé´s theorem. However, we can not discuss an explicit relationship with the terms of the Fibonacci sequences, negleting to mention and present the possibilities and generalization of the mathematical model that provides the reproduction of the “immortal rabbits”. Thus, we addressed also the discussion of certain generalities, indicated by Brousseau (1965), Hoggat & Wenner (1969) and Alves & Borges

Neto (2011), wich enable its extension to the field of the integers numbers. Finally, we bring to the reader the proposition of the models relating to *sequences of Tribonacci*, *Tetranacci*, etc., as well as an expected behavior predicted by the De Moivre´s theore, or the Binet´s or Lamé´s theorem for those sequences, rarely mentioned in the History Mathematics books.

Keywords: Fibonacci sequence, Generalised Fibonacci Sequence, Mathematics History.

A Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF

A sequência de Fibonacci, de modo recorrente, detém posição invariante em muitos compêndios de História da Matemática - HM (BOLL, 1968, EVES, 1969, ESTRADA el al, 2000, MARIE, 1883, HERZ, 1998, HUNTLEY, 1970, KLEINER, 2012, LIVIO, 2002, SMITH & BEMAN, 1900, TABAK, 2011, VOROB´EV, 1961). Os elementos tradicionalmente discutidos por esses autores assumem ou indicam, como ponto de partida, a emblemática produção de coelhos, como elemento de descrição/significação relativa ao nascedouro de uma sequência recursiva de números inteiros positivos.

Tal sequência é chamada de *Sequencia de Fibonacci* - SF. O termo Fibonacci é a abreviação de filho de Bonaccio, seu pai, como explica Dunlap. Posamentier & Lehmann (2007, p. 22) comentam que "Fibonacci acumulou experiência nos campo da Aritmética e da Álgebra, a partir das viagens que realizou na Europa", entretanto, apesar de ter desenvolvido vários trabalhos nestes campos da Matemática, Leonardo de Pisa (SMITH & BEMAN, 1900, p. 72) ou Leonardo Pisano Bogollo (KRANTZ, 2011, p. 232) é lembrado geralmente em razão do seu problema que descreve "a reprodução dos coelhos imortais" (WELLS, 2005. p. 101), embora seu modelo possa ser empregado ainda para a descrição da reprodução de outros animais e outros modelos da natureza (KOSHY, 2011, p. 110).

Domingues (1991, p. 74) explica que, "provavelmente, para amenizar leitura da obra intitulada *Liber abaci*, ou torná-la mais interessante", Fibonacci incluiu no livro alguns problemas curiosos e estimulantes, dentre os quais, um veio a se tornar especial: "Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?".

Os livros de HM, do ponto de vista notacional, discutem a seguinte sequência recursiva, indicada por $\{f_n\}_{n\in IN}$ e descrita do seguinte modo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 2$. Por outro lado, a mesma formula pode ainda ser expressa por $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para a condição $n > 1$. Dessa forma, vinculamos um modelo matemático que agrega significação real, quando nos atemos ao processo temporal de produção de animais. Por outro lado, chamamos atenção do leitor para a figura 1. Na mesma, vislumbramos um movimento progressivo, produzido por uma sequência recursiva, todavia, no "sentido contrário" ao habitual, discutido apenas, por vários autores, para valores naturais.

Figura 1. Brousseau (1965, p. 2) conjectura a descrição da SF quando avançamos no sentido contrário, para números inteiros negativos

De modo particular, Alves & Borges Neto (2011) discutem e nomeiam por "sequência extendida de Fibonacci" e denotam-na por $\{f_n\}_{n\in Z}$. Não obstante, podemos ainda indicar uma profusão de trabalhos que abordam o modelo conhecido como Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF. Com a intenção de exemplificar, por exemplo, enunciamos, logo em seguida, um teorema discutido em demonstrado por Dresden (2011).

Teorema 1: Para a $F_n^{(k)}$ e n k-ésima Sequência Generalizada de Fibonacci - SGF, temos $F_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - 1}{2+(\text{k}+1)(\alpha_i - 2)} \cdot \alpha_i^{n-1}$, onde os números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ são as raízes da equação $x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \cdots - x - 1 = 0$.

Não nos deteremos aqui na demonstração formal do Teorema 1, conquanto que, nossa atenção se voltará a um caso particular da fórmula acima. Com efeito, os termos $F_n^{(k)}$ descrevem, de modo explícito, os termos da SGF. E, no caso de $F_n^{(2)}$, geralmente, a mesma é descrita da seguinte forma $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ (*), onde $n \geq 1$ e os números irracionais $\alpha = {}^{1+\sqrt{5}}\!/_{2}, \beta = {}^{1-\sqrt{5}}\!/_{2}$. Koshy (2011, p. 79) comenta que "a fórmula explícita de Binet, nomeada assim em virtude de seus descobridor, o matemático Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856), em 1843". Tattersall (2005, p. 30) comenta que "a primeira prova foi fornecida em 1728, pelo sobrinho de Johann Bernoulli. E, em 1843, de modo independente por Binet. Um ano depois, 1843, registrou-se também a contribuição do matemático Gabriel Lamé". Wells (2005, p. 143) assinala que, "embora tais raízes sejam irracionais, essas funções deles são sempre inteiros - os números de Fibonacci". Na próxima seção, apresentamos algumas demonstrações para a fórmula de Binet ou de Lamé.

Algumas demonstrações do Teorema de Binet ou de Lamé

Posamentier & Lehmann (2007, p. 298) buscam convencer o leitor, a partir de uma tabela que dispõe o comportamento da seguinte expressão $\alpha^n \pm \frac{1}{\alpha^n}$, para valores $n \geq 1$. Os autores assinalam que "nós observamos que eles aparecem, alternativamente, como coeficientes de somas e diferenças de potências de $1+\sqrt{5}\big/2$ e $1-\sqrt{5}\big/2$. Sem maiores formalidades, os autores expressam ainda a seguinte identidade: $\alpha^n-(-1)^n\dfrac{1}{\alpha^n}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-(-1)^n\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\alpha^n-\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^n$. Cabe observar, como encontramos em Brousseau (1965, p. 13) a seguinte relação $\alpha-\beta=\sqrt{5}$. Este autor considera, de modo preliminar, a seguinte relação $f_1=\dfrac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta}=1$ e $f_2=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$. Em seguida, procede seu raciocínio, usando o Princípio de Indução Matemática – PIF (RAJI, 2015), assinalando, por exemplo, que $\alpha^2=\alpha+1\therefore\alpha^{n-1}\cdot\alpha^2=\alpha^{n+1}=\alpha^n+\alpha^{n-1}$. Para concluir, observamos:

$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n-\beta^n+\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n+\alpha^{n-1}-(\beta^n+\beta^{n-1})\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n-1}\cdot(\alpha+1)-\beta^{n-1}\cdot(\beta+1)\right)=\frac{\left(\alpha^{n-1}\alpha^2-\beta^{n-1}\beta^2\right)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\therefore f_{n+1}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

Assim, pelo PIF, teremos a validez da propriedade, para todo número $n\in IN$.

Nos artigos de Azevedo (1979), Fisher & Kohlbeccker (1972), Hoggat & Vernner (1969), e na obra de Brousseau (1965, p. 30) identificamos a ideia da representação das relações de Fibonacci por intermédio matricial, nesse sentido, escrevemos $\begin{pmatrix} f_{n+2}\\ f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{n+1}+f_n\\ f_{n+1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} f_2\\ f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$. Dai, escrevemos ainda que $\begin{pmatrix} f_{n+2}\\ f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n+1}\\ f_n\end{pmatrix}$. Dai, empregando a mesma relação recursiva, escrevemos ainda que $\begin{pmatrix} f_{n+2}\\ f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_n\\ f_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{n-1}\\ f_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} f_2\\ f_1\end{pmatrix}$.

Azevedo (1979, p. 163) define a seguinte matriz $F(n):=\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Um pouco mais adiante, ele aponta os seguintes auto-valores de A: $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e

$\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, o que evidencia o emprego de certas noções em Álgebra Linear. Com efeito, diagonalizamos a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, do seguinte modo: $(A - \lambda \cdot I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \therefore |A - \lambda \cdot I| = 0$. E, fazendo as contas, devemos encontrar $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \text{ e } \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta \right.$. Vamos, pois, encontrar os vetores que satisfazem $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. E, fazendo as contas, teremos: $\begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Devemos encontrar $x = \lambda_1 y$ e $x=\lambda_2 y$.

Portanto, os autovetores correspondentes, podem ser descritos como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$. No que segue, tomaremos $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Reparemos que os vetores anteriores não foram normalizados, todavia, avaliaremos a seguinte expressão:

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & \lambda_2 + 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 - \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 + 1 - \lambda_2^2 \\ -\lambda_1 - 1 + \lambda_1^2 & -\lambda_2 - 1 + \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - 2 \end{pmatrix} \therefore B = P^{-1}AP = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - 2 \end{pmatrix}$$

Logo, conseguimos diagonalizar a matriz anterior, obtendo $\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - 2 \end{pmatrix}$. Por fim, desde que conhecemos as raízes da equação, substituindo, encontraremos que:

$$B = P^{-1}\cdot A\cdot P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1+2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}+2 & 0 \\ 0 & -(\frac{1-\sqrt{5}}{2})-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5+\sqrt{5}/2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -5-\sqrt{5}/2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5}/2 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \therefore B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix}, n \geq 0$$

O que pode ser obtido por Indução Matemática. Ademais, precisamos ainda observar que:

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = \underbrace{\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\cdots\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)}_{n \text{ fatores}} = PB^nP^{-1}.$$

Dessa forma, usando a relação obtida anteriormente, estabelecemos:

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B^n \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+1} & \lambda_2^{\,n+1} \\ \lambda_1^{\,n} & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1} & -\lambda_1^{\,n+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{\,n+1} \\ \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} & -\lambda_1^{\,n}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{\,n} \end{pmatrix} \underset{substituindo}{\overset{\lambda_1\lambda_2=-1}{=}} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1} & \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} \\ \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} & \lambda_1^{\,n-1}-\lambda_2^{\,n-1} \end{pmatrix}$$

Para concluir, com um argumento semelhante ao de Raji (2015, p. 33), estabelecemos que:

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}^{n}\begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1} & \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} \\ \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} & \lambda_1^{\,n-1}-\lambda_2^{\,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1}+\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} \\ \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}+\lambda_1^{\,n-1}-\lambda_2^{\,n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n}(\lambda_1+1)-\lambda_2^{\,n}(\lambda_2+1) \\ \lambda_1^{\,n-1}(\lambda_1+1)-\lambda_2^{\,n-1}(\lambda_2+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n}(\lambda_1^{\,2})-\lambda_2^{\,n}(\lambda_2^{\,2}) \\ \lambda_1^{\,n-1}(\lambda_1^{\,2})-\lambda_2^{\,n-1}(\lambda_2^{\,2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+2}-\lambda_2^{\,n+2} \\ \lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1} \end{pmatrix}$$

Ou seja, encontramos a seguinte relação

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n+2}-\lambda_2^{\,n+2} \\ \lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1} \end{pmatrix} \leftrightarrow f_{n+1} = \frac{\lambda_1^{\,n+1}-\lambda_2^{\,n+1}}{\sqrt{5}} \text{, ou ainda, } f_n = \frac{\lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

Outra noção empregada para demonstrar a relação esplícita dos termos da SF, diz respeito a noção de função geradora (BROUSSEAU, 1965, p. 29), relativamente à expressão $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $f_1 = 1 = f_2$. E, assumindo que $f_0 = 0$ e tomando a função geradora correspondente da sequência de Fibonacci: $g(\mathrm{x}) = f_0 + f_1 x^1 + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots + f_n x^n +$ (BROUSSEAU, 1975, p. 13). Em seguida, Koshy (2011, p. 220) comenta que "desde que as ordens dos coeficientes de f_{n-1} e f_{n-2} são de 1 e 2 menores do que f_n, respectivamente, encontramos os termos correspondentes $x \cdot g(x), \mathrm{x}^2 \cdot g(x)$":

$$\begin{cases} g(\mathrm{x}) = f_1 x^1 + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots + f_n x^n + \cdots \\ x \cdot g(\mathrm{x}) = f_1 x^2 + f_2 x^3 + f_3 x^4 + \cdots + f_{n-1} x^n + \cdots \\ x^2 \cdot g(\mathrm{x}) = f_1 x^3 + f_2 x^4 + f_3 x^5 + \cdots + f_{n-2} x^n + \cdots \end{cases}$$ o que conduz a seguinte expressão: $g(x) - x \cdot g(x) - \mathrm{x}^2 \cdot g(x) = f_1 x^1 + (f_2 - f_1) \cdot x^2 + (f_3 - f_2 - f_1) x^3 + \cdots + (f_n - f_{n-1} - f_{n-2}) x^n + \cdots$

Recordando que $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$, com $f_1 = 1 = f_2$, determinamos: $g(x) - x \cdot g(x) - \mathrm{x}^2 \cdot g(x) = x \leftrightarrow g(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\dfrac{1}{1 - \alpha x} - \dfrac{1}{1 - \beta x} \right]$. Em seguida, escrevemos: $\sqrt{5} g(x) = \left[\dfrac{1}{1 - \alpha x} - \dfrac{1}{1 - \beta x} \right] = \sum_0^\infty (\alpha x)^n - \sum_0^\infty (\beta x)^n = \sum_0^\infty (\alpha^n - \beta^n) x^n$ e, obtemos que: $g(x) = \sum_0^\infty \dfrac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta} x^n$ e podemos compará-la com a expressão algébrica inicial e, assim, obter (*). Ideia semelhante é identificada na obra de Hoggat (1969, p. 127), quando acentua que "o fato inconteste que consiste tornar explícita a sequência $(f_n)_{n \in IN}$, e não mais recursiva, quando expressa em termos do número ϕ, é devido a simplicidade da função geradora $g(x)$ que esconde toda sequência".

No que concerne ao raciocínio anterior, tendo com o escopo a descrição de uma formula explícita para a SF, vale considerar as explicações de Koshy, quando recorda que:

> *"Funções geradoras fornecem um instrumento poderoso para a solução de equações recorrentes lineares com coeficientes contantes, como veremos em breve. Em 1718, o matemático francês Abraham De Moivre (1667 – 1754) inventou uma funçao geradora com o intuito de resolver a sequência recorrente de Fibonacci*" (KOSHY, 2011, p. 215)

Por outro lado, deparamos argumentos relativamente mais imediatos, que permitem que alcancemos o mesmo resultado. Por exemplo, seguindo uma estratégia verificada em Walser (2001, p. 67), sabemos que $x^2 = x + 1 \therefore x^n = f_n \cdot x + f_{n-1}$ (WALSER, 2001, p. 68), com $n \geq 2$. Fato que pode ser inferido por Indução Matemática. Basta notar que: $x^n = x^{n-1} \cdot x = \left(f_{n-1} \cdot x + f_{n-2} \right) x = f_{n-1} \cdot x^2 + f_{n-2} x = f_{n-1} \cdot (x+1) + f_{n-2} x =$ $= (f_{n-1} + f_{n-2}) x + f_{n-1} = f_n \cdot x + f_{n-1}$. Por fim, desde que conhecemos as duas raízes da equação $x^2 = x+1$, escrevemos: $\alpha^n = f_n \cdot \alpha + f_{n-1}$ e $\beta^n = (1-\alpha)^n = f_n \cdot (1-\alpha) + f_{n-1}$. Substraindo as equações anteriores, e cancelando o termo f_{n-1}, estabelecemos: $\alpha^n - (1-\alpha)^n = \sqrt{5} f_n = (\alpha - \beta) f_n$ e decorre o resultado desejado como indicamos por (*), nos parágrafos iniciais.

Vejamos agora a descrição de Vorobe´v (1961) tendo em vista a fórmula que apontamos em (*). Neste sentido, Vorobe´v (1961, p. 12) observa a possibilidade de construção de inúmeras sequências que satisfazem a condição $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, como por exemplo: $\left(2,5,7,12,19,31,\ldots\right);\left(1,3,4,7,11,18,29,\ldots\right);\left(-1,-5,-6,-11,-17,\ldots\right)$. Não obstante, no caso da SF e da SGF, ocorre a necessidade de definirmos as seguintes condições iniciais $f_1 = 1, f_2 = 1$ (VOROBE´V, 1961, p. 11). Vamos, pois, considerar, três sequências quaisquer: $\left(a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\right);\left(b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots\right);\left(c_1,c_2,c_3,c_4,\ldots\right)$ que satisfazem a fórmula recursiva de Fibonacci. Vorobe´v (1961, p. 20) enuncia o lema 1.

Lema 1: Seja uma sequência $\left(a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\right)$ que satisfaz $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n \geq 2$. Então, dado $c \in IR$, teremos que a sequência $\left(ca_1,ca_2,ca_3,ca_4,\ldots,ca_n,\ldots\right)$ é ainda uma sequência que satisfaz a mesma relação.

Demonstração: De fato, considerando a validade da identidade recursiva $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \therefore c \cdot a_{n+1} = c \cdot a_n + c \cdot a_{n-1}$. Isto é, $\left(ca_1,ca_2,ca_3,ca_4,\ldots,ca_n,\ldots\right)$ é outra sequência que obedece ainda a fórmula $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n \geq 2$.

Lema 2: Sejam duas sequências $\left(a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\right)$ e $\left(b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots\right)$ que satisfazem $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para $n \geq 2$. Então, a sequência $\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,\ldots,a_n+b_n,\ldots\right)$ satisfaz a mesma realação.

Demonstração: Vorobe´v (1961, p. 21) considera as duas relações $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ e $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ que são válidas segundo nossos pressupostos. Assim, decorre que: $(a_{n+1} + b_{n+1}) = a_n + a_{n-1} + b_n + b_{n-1} = (a_n + b_n) + (a_{n-1} + b_{n-1})$. Decorre, pois, o resultado.

Um pouco mais adiante, Vorobe´v (1961, p. 21) comenta que "dadas duas soluções $\left(a_n\right)_{n\in IN}$ e $\left(b_n\right)_{n\in IN}$ da fórmula recorrente $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, cujos termos não são proporcionais, Mostraremos que outra solução qualquer $\left(c_n\right)_{n\in IN}$, poderá ser escrita da seguinte forma $c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot b_2$, onde as constantes c_1, c_2 podem ser determinadas. Neste sentido, o autor apresenta a expressão $c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot b_2$ como uma solução geral da fórmula recorrente anterior.

Lema 3: Dadas duas soluções $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ e $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ não proporcionais, então $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$.

Demonstraçáo: De fato, raciocinando por contradição, se ocorresse que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, teremos ainda a seguinte relação de proporção derivada $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_2}{b_2} \therefore \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2} \leftrightarrow \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$.

Ora, repetindo o processo indutivo, escreveremos: $\cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \cdots = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ o que contradiz nossa hipótese relativamente a não proporcionalidade das duas soluções.

Para concluir, Vorobe´v (1961, p. 22) recorda que uma solução da fórmula recursiva ficará completamente determinada, na medida em que, fixamos os dois primeiros elementos. Dai, tomando uma outra solução $(d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots)$, buscaremos encontrar as constantes $c_1, c_2 \in IR$ de modo que: $\begin{cases} c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot b_1 = d_1 \\ c_1 \cdot a_2 + c_2 \cdot b_2 = d_2 \end{cases}$. Ora, podemos obter os coeficientes dos sistema anterior, indicados por: $c_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ e $c_1 = \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$. É fácil verificar a necessidade de que $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$. Ora, o próximo argumento consiste em descrever todas as soluções do tipo $\left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right) \cdot a_1 + \left(\frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \right) \cdot b_2$ e, com isto, "obtemos a descrição de todas as soluções da equação recorrente $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$" (VOROBE´V, 1961, p. 23).

A perspectiva implementada por este autor consiste, pois, em determinar duas soluções quaisquer, não proporcionais. E, com isto, descrevemos todas as outras. Vorobe´v, (1961) lança uma investigação sobre soluções que descrevem progressões geométricas. Com tal escopo, considera $(1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots)$, com a restrição de que $a_1 = 1$. Ora, desde que buscamos satisfazer $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \therefore q^{n+1} = q^n + q^{n-1} \leftrightarrow q^2 = q + 1$. Ora, mais uma vez encontramos os números $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Todavia, isto significa que encontramos duas sequências $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots)$ e $(1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots)$ que preenchem as condições que indicamos há pouco. Vorobe´v (1961, p. 24) acentua que todas as sequências da forma $(c_1 + c_2, c_1\alpha + c_2\beta, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \ldots, c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \ldots)$ são soluções, chamada por Walser (2001, p. 89) de combinação linear de duas séries geométricas. Para concluir, tendo como referência os números iniciais presentes na solução particular, oriunda da produção de coelhos, estabelecemos: $\begin{cases} c_1 + c_2 = f_1 = 1 \\ c_1\alpha + c_2\beta = f_2 = 1 \end{cases}$. Mais uma vez, fazendo as contas, devemos determinar que: $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. E, finalmente, seu termo geral, será dado por $f_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} =$

$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\alpha - \beta} \therefore f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, como indicamos em (*).

Cabe assinalar que as sequências obtidas, que indicamos por $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots)$ e $(1, \beta, \beta^2, \beta^3, \ldots)$, permitem ainda a descrição da sequência de ouro indicada por $(1, \alpha, 1+\alpha, 1+2\alpha, 2+3\alpha, 3+5\alpha, 5+8\alpha, \ldots, f_{n-1} + f_n\alpha, \ldots)$ (HUNTLEY, 1970, p. 50). O processo anterior envolvendo a substituição de potências das raízes do tipo α^n ou β^n por fatores lineares, era conhecido por Leonhard Euler (WALSER, 2001, p. 68). Ademais, Brousseau (1971, p. 15) emprega um raciocínio semelhante ao de Vorobe´v, quando busca determinar os coeficientes que satisfazem o termo geral indicado $f_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot \beta^n$.

Como mencionamos nos parágrafos anteriores, semelhabntemente ao trabalho de Alves & Borges Neto (2011) sobre a descrição da SF no campo dos inteiros, Hoggat & Vernner (1969, p. 28) escrevem, simplesmente, que: $f_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\left(1/\alpha\right)^n - \left(1/\beta\right)^n}{\alpha - \beta}$.

Em seguida, observa que $\alpha \cdot \beta = -1 \therefore f_{-n} = \dfrac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = \dfrac{(-1)^n(\beta^n - \alpha^n)}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$, definindo a fórmula de Binet ou de Lamé para números inteiros. E ainda, estabelecem a seguinte identidade $f_{-n} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) = (-1)^{n+1} \cdot f_n$, que confere o caráter de simetria da SF (BROUSSEAU, 1975, p. 33). Tal relação proporciona uma significação mnemônica implementado pelos autores Alves & Borges Neto (2011, p. 136), no sentido de indicar os valores progressivos, correspondentes aos índices negativos. Ora, podemos verificar outras propriedades herdadas da sequência original e, ademais, conjecturar a generalização do modelo oriundo do Teorema de De Moivre ou de Lamé ou Binet.

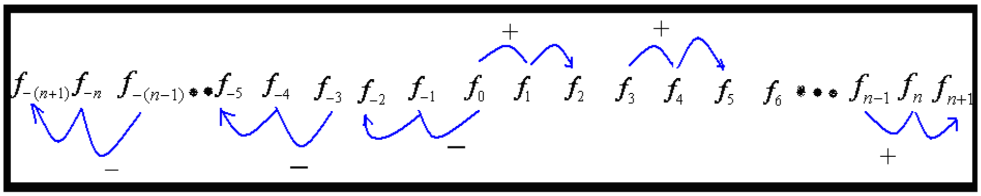

Figura 2. Alves & Borges Neto (2011) descrevem o processo de obtenção da sequência de Fibonacci, descrita para índices inteiros.

Brousseau (1971, p. 28) discute a noção de Sequências Lineares Recursiva de ordens superiores - SLR. Seu termo geral, como indicado por Brousseau, pode ser indicado por $T_{n+1} = a_1 \cdot T_n + a_2 \cdot T_{n-1} + a_3 \cdot T_{n-2} + \cdots + a_k \cdot T_{n-k+1}$, onde $a_i ' s \in IR, T_i \in IR$. Ademais, identificamos ainda a equação auxiliar, determinada por $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$, a qual, pode possuir raizes reais distintas, raizes reais com multiplicidade e raizes complexas (BROUSSEAU, 1971, p. 28). Um pouco mais adiante, Brousseau apresenta ainda as sequências recursivas (ALFRED, 1963, p. 81) de 3ª e 4ª ordem, respectivamente: $T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}$ e $T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, vinculadas a outras duas equações $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ e $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Na literatura especializada (BROUSSEAU, 1967, PRUIT, 1967, SCKERMAN, 1982, YALAVIGI, 1972, WADILL & SACKS, 1967, WADDILL, 1992, WHITFORD, 1977), a primeira SLR é chamada de *Sequência Tribonacci*, enquanto que a segunda indicada há pouco, recebe o nome de *Sequência Tetranacci*. Tendo em vista nossa atenção maior voltada ao teorema de Binet ou Lamé, inclusive algumas generalidades vinculadas com a sequência de Fibonacci original, enunciaremos nossos dois e ultimos teoremas.

Teorema 2: Dada a sequência definida por $T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2}$ (SCKERMAN, 1982). Escrevemos $T_n = \dfrac{\rho^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\rho-\overline{\sigma})} + \dfrac{\sigma^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\sigma-\overline{\sigma})} + \dfrac{\overline{\sigma}^{n+2}}{(\overline{\sigma}-\rho)(\overline{\sigma}-\sigma)}$, aonde $\rho = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1\right)$ e $\sigma = \dfrac{1}{6}\left(2 - \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \sqrt{3}i\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)$.

A ideia implementada por Sckerman envolve, mais uma vez, o emprego do instrumento poderoso, já mencionado, conhecido como função geradora (WADDILL, 1992, p. 11). Para tanto, ele escreve $f(x) = T_0 + T_1x + T_2x^2 + T_3x^3 + T_4x^4 + \cdots + T_nx^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} T_ix^i$.

Fato que conduz a determinação da seguinte função $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - x - 1}$. Ora, tendo como arrimo as fórmulas de Cardanno, inferimos, facilmente, as raízes da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, indicadas por este autor, pelos seguintes valores: $\rho = 1,8393;\ \sigma = -0,4196 + 0,6063i,\ \ \overline{\sigma} = -0,4196 - 0,6063i$. De modo semelhante, podemos determinar uma fórmula fechada para a *Sequência Tetranacci* (ALDRED, 1963, BERSTEIN, 1976, GERDES, 1977, PARKER, 1964). Nessa situação, devemos empregar a seguinte função geradora $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^3 - x^2 - x - 1}$. Nosso ultimo teorema, fornece uma generalização recente da relação apontada em (*).

Teorema 3: Dados $a, b \in IR^+$. Então, poderemos escrever $f_n^* = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{4b + a^2}}$, aonde $\alpha = a/2 + 1/2\sqrt{4b+a^2},\ \beta = a/2 - 1/2\sqrt{4b+a^2}$.

Demonstração: Maynard (2008, p. 104) considera, de modo preliminar, a seguinte equação $x^2 = ax + b$ e suas raízes reais designadas por α, β. De imediato, depreendemos que $f_0^* = \dfrac{\alpha^0 - \beta^0}{\sqrt{4b+a^2}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{4b+a^2}} = 0$ e que $f_1^* = \dfrac{\alpha^1 - \beta^1}{\sqrt{4b+a^2}} = \dfrac{\sqrt{4b+a^2}}{\sqrt{4b+a^2}} = 1$. Em seguida, assumindo por indução $f_n^* = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{4b+a^2}}$, escrevemos: $f_{n+1}^* = a \cdot f_n^* + b \cdot f_{n-1}^* =$

$$= a \cdot \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{4b + a^2}} \right) + b \cdot \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{4b + a^2}} \right) = \left(\frac{a\alpha^n - a\beta^n + b\alpha^{n-1} - b\beta^{n-1}}{\sqrt{4b + a^2}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n-1}(\mathrm{a}\,\alpha + \mathrm{b}) - \beta^{n-1}(\mathrm{a}\,\beta + \mathrm{b})}{\sqrt{4b + a^2}} \right) = \left(\frac{\alpha^{n-1} \cdot \alpha^2 - \beta^{n-1}\beta^2}{\sqrt{4b + a^2}} \right) = \left(\frac{\alpha^{n`+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{4b + a^2}} \right) \therefore f^*_{n+1} = \left( \frac{\alpha^{n`+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{4b + a^2}} \right)$$

Um pouco mais adiante, Maynard (2008, p. 105), comenta ainda a possibilidade da recíproca do Teorema 3. Neste caso, o autor considera uma sequência definida por $s_n = c(\alpha^n - \beta^n)$, com $c, \alpha, \beta \in IR$. Notando que $\alpha, \beta \in IR$ são as raízes da equação $(x-\alpha)(x-\beta)$, ou seja, temos ainda $x^2 - (\alpha + \beta)\mathrm{x} - \alpha\beta = 0$. Daí, Maynard observa que $s_0 = 0, s_1 = c(\alpha - \beta)$. E, escrevendo ainda $a := \alpha - \beta, b := -\alpha\beta$. Segue que $s_n = c(\alpha^n - \beta^n) = c\left(\alpha^{n-2}(a\alpha + b) - \beta^{n-2}(a\beta + b)\right) = a \cdot s_{n-1} + b \cdot s_{n-2}$. Ou seja, a sequência $\left(s_n\right)_{n \in IN}$ é de fato a SGF.

Considerações Finais

O problema abordado neste trabalho envolveu o estudo de demonstrações para a formula de De Moivre, ou de Binet ou de Lamé. No contexto histórico, se mostra inconteste, a grande quantidade de figuras ilustres do passado que se debruçaram sobre as propriedades aritméticas originadas da SF (DECAILLOT-LAULAGNET, 1991, p. 106). Cabe, por exemplo, assinalar um episódio relatado por Decaillot- Laulagnet (1991, p. 106), quando menciona que François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891), ressalta a influência do pensamento de Leonardo de Pisa, presente em um documento publicado na Itália, apenas em 1877. Acrescenta ainda que, as propriedades aritméticas da SF, que atraíram o interesse de Pierre Fermat e Bernard Frénicle foram, provavelmente, suscitadas pelas notas/manuscritos produzidos bem antes por Gabriel Lamé, em 1844.

Hodiernamente, Sury (2004, p.1) assinala a diversidade de métodos empregados com o escopo de determinar, de modo explicito, os termos que comparecem na SF e na SGF. Não obstante, nem todos se apresentam de uma maneira acessível, como os que buscamos apresentar nas seções anteriores. Por exemplo, Sury recorda a possibilidade do método da determinação das soluções exponenciais de equações de diferenças, determinadas pelos números da SF ou da SGF, ou ainda, pelo método que envolve o uso de identidades polinomiais e métodos de convergência de séries na variável complexa (KOVACS, 2002). Incidentalmente, alguns aspectos relacionados com a formula de Binet aparecem num escrito de Augustus De Morgan (1806 – 1871), bem antes do nascimento de

J. P. Marie Binet (FISHER & KOHLBECCKER, 1972, p. 178). Já em outro escrito, Sury (2010) intitula a fórmula fechada, em seu trabalho, por fórmula de Cauchy – Binet.

Como registramos nos livros de HM, Fibonacci não nos deixou apenas um enorme legado extraído pelas incontáveis implicações e generalizações deste modelo, uma vez que, Smith & Beman (1900) assinalam que seus manuscritos foram uma fonte inspiradora para matemáticos que trabalharam com Aritmética e Álgebra. E, séculos depois, deparamos uma fórmula fechada que fornece todos seus termos, inclusive, com índices negativos. O fato é que, parafraseando o ponto de vista de Krantz (2011, p. 36), quando desejamos convencer alguém sobre um teorema, preliminarmente, nos convencemos do próprio fato. Dessa forma, a validez da fórmula que apontamos em (*), é indubitável, todavia, não perseguimos convencer o leitor, sobre a autoria da fórmula, posto que, nem mesmo nós estamos convencidos de tal fato.

Bibliografia

ALFRED, Brother. U. 1963. Exploring recurrent sequences. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 1, nº 2**, April, 81 – 84.

ALVES, Francisco. R. V. & BORGES NETO, H, 2011. A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos Inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. In: *Boletim GEPEM*. **vol. 1, nº 53**. 135 – 140.

AZEVEDO, A. J. C. 1979. Fibonacci Numbes. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 17, nº 2**, April, 162 – 165.

BERNSTEIN, Leon. 1976. A Formula for Fibonacci Numbers From a New Approach to Generalized Fibonacci Numbers. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 14, nº 4**, November, 358 – 368.

BOLL, Marcel. 1968. Histoire de Mathematiques. Onzième édition. Paris: Presses Universitaire de France.

BROUSSEAU, Brother. A. 1965. An introducion to Fibonacci Discovery. The Fibonacci Association.

BROUSSEAU, Brother. A. 1967. A Fibonacci generalization. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 5, nº 2**, April, 171 – 175.

BROUSSEAU, Brother. A. 1971. Linear Recurssion and Fibonacci Sequences. The Fibonacci Association Publishers.

BROUSSEAU, Brother. A. 1975. Symmetric Sequences. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 13, nº 1**, February, 33 – 42.

DECAILLOT-LAULAGNET, Anne, M. 1991. Edouard Lucas (1842 – 1891) Le parcours original d´un scientifique français dans le doixième moitié du XIXe siècle (thése de doctorat). Université Renné Descartes, PARIS VII.

DOMINGUES, Hygino. 1991. Fundamentos de Aritmética. São Paulo: Editora Atual.

DUNLAP, Richard. 1980. Elementary Number Theory. London: Allyn and Bacon Inc.

ESTRADA, et al. 2000. História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

EVES, Howard. 1969. An introduction to the History of Mathematics. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston.

FAUVEL, John. & MAANEM, V. 2002. History in Mathematics Education. The ICMI study. New York: Klumer Academic Publishers.

FISHER, P. S. & KOHLBECCKER, E. E. 1972. A generalized Fibonacci Sequence. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 10, nº 4**, October, 337 – 344. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 10, nº 4**, October, 337 – 344.

GERDES, Walter. 1977. Convergent Generalized Fibonacci Sequences. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 15, nº 2**, April, 156 – 161.

HOGGAT, Jr. V. 1969. Fibonacci and Lucas Numbers. The Fibonacci Association. Santa Clara: University of Santa Clara.

MARIE, Maximilien. M. 1883. Histoire de Sciences, Physique et Mathematique: de Thales a Diophanto. Tome I. Paris: Gauthier & Villar Librarie.

HERZ, Fischler, R. 1998. A mathematical history of Golden Number. New York: Dover Publications Inc.

HOGGAT, Jr. & VENNER, E. 1969. Fibonacci and Lucas Numbers. Santa Clara: Fibonacci Association Publishers.

HUNTLEY, H. E. 1970. The divine proportion: a study in mathematical beauty. New York: Dover Publications Inc.

KLEINER, Israel. 2012. Excursions in the History of Mathematics. New York: Springer.

KOSHY. T. 2011. Fibonacci and Lucas Numbers and Applications. New York: John Willey and Sons.

KOVACS, Istvan. 2002. An Analytic Aspect of the Fibonacci Sequence. In: *Alabama Journal of Mathematics*. **v. 20, nº 23**, p. 1- 23.

KRANTZ, Steven. G. 2011. The proof is in the Pudding: the changing nature of the mathematical proof. New York: Springer.

LIVIO, Mario. 2002. The Golden Ratio: the history of Phi. New York: Broadway Books.

MAYNARD, Philipp. 2008. Generalised Binet Formulae. In: *Applied Probability*. **v. 67, nº 2**, 104 – 105.

PARKER, Francis. D. 1964. On The General Term of A Recursive Sequence. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 2, nº 1**, February, 67 – 72.

POSAMENTIER, Alfred, S. & LEHMANN, Ingmar. 2007. The Fabulous Fibonacci Numbers. New York: Prometheus Books.

PRUIT, Robert. 1967, Fibonacci and Lucas Numbers in the Sequence of Golden Numbers. In: *The Fibonacci Quartely*. **v. 5, nº 2**, April, 175 – 179.

RAJI, Wissam. 2015. An introductory Course in Elementar Number Theory. Ohio: University of Ohio.

SCKERMAN, W. R. 1982. Binet´s formula for Tribonacci sequence. In: *The Fibonacci Quartely*. **v. 5, nº 3**, October, 209 – 222.

SMITH, David. E. & BEMAN, Wooster, W. 1900. A brief History of Mathematics. Chicago: Open Court Publishing Company.

SURY, B. 2004. A parente of Binet´s formula. In: *Mathematics Magazine Draft*. **v. 77, nº 4**, 1- 2.

SURY, B. 2010. Trigonometric Expression for Fibonacci and Lucas Numbers. In: *Acta Math. Univ. Comenianae*. v. 74, nº 2, 199 – 208.
TABAK, John. 2011. Algebra: sets, symbols, and the language of thought. New York: Facts on File Inc.
VOROB´EV. N. N. 1961. Fibonacci Numbers. Oxford: Pergamon Press.
TATTERSALL, James. J. 2005. Elementary Number Theory in Nine chapters. Cambridge: Cambridge University Press.
YALAVIGI, C. C. 1972. Properties of Tribonacci Numbers. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 10, nº 3**, April, 231 – 247.
WADDILL, E. Marcellus & SACKS, Louis. 1967. Another generalized Fibonacci Sequences. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 5, nº 3**, April, 209 – 223.
WADDILL, E. 1992. The tetranacci sequences and generalizations. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 30, nº 1**, February, 9 – 20.
WALSER, Hans. 2001. The Golden Section. New York: The Mathematical Association of America.
WELLS, David. 2005. Prime Numbers: the most misterious figures in Math. New Jersy: Johhn Wiley and Sons.
WHITFORD, A. K. 1977. Binet's Formula Generalized. In: *The Fibonacci Quarterly*. **v. 15, nº 1**, February, 21 – 22.

Francisco Regis Vieira Alves
Departamento de Matemática – IFCE – Brasil

E-mail: fregis@ifce.edu.br