Revista Brasileira de História da Matemática – Vol. 22, nº 43 – pp. 102–123
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

UMA HISTÓRIA A RESPEITO DOS LOGARITMOS

Heron Miguez Gonzalez Gomes
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Brasil

Elisangela Pavanelo
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Brasil

(aceito para publicação em janeiro de 2022)

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo apresentar a história do conceito de logaritmos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cuja concepção envolve critérios claros e rigorosos simultâneos a um distanciamento de preconceitos e categorizações prévias tanto o quanto possível. A abordagem que tomamos é bibliográfica, de natureza exploratória, ou seja, é uma pesquisa inicial, em que buscamos explorar vários aspectos de nosso objetivo. Desenvolvemos essa revisão bibliográfica uma em torno da história dos logaritmos, em que percorremos desde sua invenção por Napier no século XVII até as proposições de Euler no século XVIII. Concluímos que não há uma história única, há diversas perspectivas historiográficas possíveis que podem nortear ideologicamente a história contada.

Palavras-chave: Logaritmos. História da matemática. História dos logaritmos. Educação Matemática.

[A Story About Logarithms]

Abstract

This research aims to present the history of the concept of logarithms. It is a qualitative research, whose conception involves clear and rigorous criteria, simultaneously distancing as much as possible from previous prejudices and categorizations. The approach we take is bibliographical, exploratory in nature, that is, it is an initial research, in which we seek to explore various aspects of our objective. We developed this bibliographical review one around the history of logarithms, in which we covered from their invention by Napier in the 17th century to Euler's propositions in the 18th century. We conclude that there is no single story, there are several possible historiographic perspectives that can ideologically guide the story told.

Keywords: Logarithms. History of Mathematics. History of logarithms. Mathematics Education.

1. Introdução:

O gosto por livrarias é um sentimento que necessita ser incentiva, apreciar a possibilidade de tocar, familiarizar-se e ter um primeiro contato com livros antes de comprá-los, traz um sentimento único. Na visita a um desses espaços, a procura pela prateleira geralmente pequena e escondidinha, cujo nome varia entre "matemática" ou "ciências exatas", e olhar para aqueles livros acessíveis de divulgação matemática cuja leitura continua, é algo encantador para um amante da Matemática. Em uma dessas vezes, esbarramos no livro "17 Equações que Mudaram o Mundo" de Ian Stewart, um autor com inúmeras publicações dessa natureza. Nele, o autor enumera 17 equações que considera terem "mudado o mundo" e explica de forma acessível seus impactos na história da humanidade; eis que, entre o Teorema de Pitágoras e o Teorema fundamental do Cálculo, Stewart incluiu a equação: $log xy = log x + log y$. Por que uma propriedade dos logaritmos tão básica e banalmente apresentada em poucas aulas no Ensino Médio estaria ao lado de equações tão importantes? Disso surgiu o interesse pelo estudo da história dos logaritmos, nesse estudo histórico nota-se que eles surgiram com um propósito bastante diferente do atual, como foram a base para a simplificação de cálculos longos por mais de 350 anos em que não existiam as calculadoras e, desse modo, podemos pensar em como estender esse maravilhamento com a história dos logaritmos a uma pesquisa em Educação Matemática.

Neste texto propusemos um retrato de nossa perspectiva da história dos logaritmos, entre os séculos XVII e XVIII, em que nos baseamos em uma bibliografia científica concentrada no triênio 1913–1915, época de intensa produção neste tema, dada a proximidade do tricentenário da publicação inicial de John Napier, inventor dos logaritmos. Encontramos, consultamos e traduzimos também alguns trechos dos escritos originais de John Napier e Henry Briggs, dois matemáticos que propuseram os primeiros sistemas de logaritmos, a partir das traduções do latim para o inglês de Ian Bruce disponibilizadas de forma aberta e gratuita na *internet*. Buscamos entender e apresentar algumas das ideias matemáticas e motivações envolvidas na criação dos logaritmos, suas mudanças e ampliações teóricas, além de suas influências para além da matemática.

Em seguida concluímos nosso trabalho, a partir de concepções de história, de historiografia, que se relaciona às várias ideologias que orientam pesquisas históricas e as características específicas à história da matemática.

2. Metodologia de pesquisa

Bicudo (2012) define o ato de pesquisar associado a uma busca por uma interrogação, que se diferencia de perguntas a serem respondidas, problemas a serem solucionados ou hipóteses a serem testadas, trata-se de um conceito que subordina esses três citados, como perspectivas de se abordar a interrogação.

A interrogação da nossa pesquisa foi: como podemos contar a história da criação do Logaritmo, a partir dos documentos históricos sobre o tema?

Entendemos que nossa pesquisa é de cunho qualitativo, pois esta não visa às verdades amplamente generalizadas, mas sim, foca-se em experiências mais contidas e aproveita essa característica para priorizar dados descritivos, que, segundo Garnica (2001, p. 44), só existem quando há um interlocutor e uma troca de informações antes desconhecidas pelo ouvinte.

A pesquisa qualitativa, segundo Bicudo (2012, p.19),

> *"pressupõe perquirir, de modo atento e rigoroso, o que nos chama a atenção e nos causa desconforto e perplexidade. A priori, não há um modo correto ou certo de pesquisar. Isso significa dizer que não há um padrão de procedimentos a serem seguidos que garantam a investigação seja bem sucedida, dando-nos certeza sobre o encontrado, em termos científico-filosóficos."*

Ou seja, para a autora, pesquisar qualitativamente envolve uma investigação sobre algo que seja impactante e incômodo ao pesquisador, para isso, devem ser adotados critérios claros e rigorosos, mesmo que não haja métodos fixos pré-estabelecidos que garantam o sucesso da pesquisa.

A pesquisa em educação e, em especial, em educação matemática convém ser desenvolvida segundo as metodologias qualitativas, tendo em vista que se trata de uma área das ciências humanas, em que os métodos possibilitam, como já foi explicitado, uma análise interpretativa de situações diversas como a vivência em uma escola ou na sala de aula, por exemplo. Mas, acima disso, segundo Bicudo (2012, p.16), a pesquisa qualitativa em educação possibilita a percepção das complexidades humanas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem, associadas a todo um contexto histórico, social e político.

Dentro das perspectivas qualitativas que propusemos, optamos, em específico, por uma pesquisa que combina as definições de pesquisa exploratória e pesquisa bibliográfica de Oliveira (2016). Segundo esta autora, um estudo exploratório tem como objetivo explicar um fenômeno de maneira geral, através de levantamentos bibliográficos, documentais e da delimitação temática.

Neste trabalho procuramos, a partir de pesquisas bibliográficas, realizar um estudo exploratório sobre a histórica do logaritmo, seus precursores, a necessidade do conceito e a evolução do tema na história da matemática.

3. Uma história dos logaritmos

Neste capítulo, apresentaremos um panorama histórico dos logaritmos. Levando em conta os conteúdos viáveis para discussão na Educação Básica, delimitamos o período desde sua invenção por John Napier no início do século XVII, até a consolidação do conceito de função logarítmica por Euler no século XVIII.

Para este levantamento bibliográfico e documental, nossas fontes principais partem de uma série de produções científicas publicadas entre 1913 e 1915, ao redor do tricentenário da publicação inicial da obra de Napier, como o *Memorial do Tricentenário de Napier* editado por Cargill Gilston Knott, uma coletânea de ensaios comunicados em um Congresso Internacional realizado em Edimburgo em julho de 1914 focados nos desenvolvimentos iniciais dos logaritmos e na vida de Napier (KNOTT, 1915). Destacamos também uma coletânea de artigos sobre a história dos logaritmos, nesse caso com uma visão mais ampla indo do século XVII até o século XIX, publicados por Florian Cajori na revista *The American Mathematical Monthly* em 1913. Dentre produções mais recentes, citamos Bruce (2002) com uma relevante análise da matemática envolvida na construção dos sistemas de logaritmos de Briggs e Mendes e Soares (2019), cujo livro é um excelente panorama histórico dos logaritmos em língua portuguesa.

Analisamos também as obras originais de Napier: *mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) e *mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), além da *Arithmetica logarithmica* (1624) de Henry Briggs, os três livros em traduções do latim para o inglês por Ian Bruce, da Universidade de Adelaide na Austrália, em um projeto que busca disponibilizar de forma livre e gratuita textos originais de matemáticos do século XVII e XVIII, disponíveis no endereço web: *17centurymaths.com*. Compreendemos a complexidade envolvida em uma tradução e possíveis distanciamentos dos significados originais escritos no século XVII, por isso não adotamos esses documentos como fontes únicas para esse capítulo e consultamos os vários outros autores já apresentados que também analisaram essas obras em momentos históricos e contextos diversos.

3.1 A invenção: os logaritmos de John Napier

A história dos logaritmos desafia concepções de história lineares, tendo em vista que, ao contrário da ordem adotada na maioria dos currículos modernos em que primeiro se introduz a notação exponencial e suas propriedades e em momento mais avançado, os logaritmos, segundo Cajori (1913a) os primeiros logaritmos surgiram antes da consolidação da notação moderna de exponencial a^n, isso porque não eram definidos a partir de funções exponenciais, mas sim de uma incomum mistura de cinemática, geometria e sequências numéricas. Se hoje derivamos e integramos as funções logarítmicas e as aplicamos na física, geografia e no tratamento de dados, naquele momento, os logaritmos surgiram com o objetivo de simplificar longos cálculos trigonométricos através de gigantescas tabelas em um mundo sem computadores e calculadoras.

O primeiro matemático a publicar sobre os logaritmos de que temos notícia foi o escocês John Napier (1550–1617), cujo trabalho se divide em dois livros: *Mirifici* *logarithmorum canonis descriptio* (1614) e *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), que chamaremos respectivamente de *descriptio* e *constructio.* Apesar da ordem de publicação, Moulton (1915, p. 5) aponta que, *constructio*, de publicação póstuma, é o trabalho principal do autor, teria sido escrito ao longo de muitos anos e antes de *descriptio*, contendo o processo de construção de sua tabela de logaritmos, enquanto *descriptio* teria sido escrito em um espaço mais curto de tempo e traz a fundamentação matemática do conceito, as tabelas que o acompanhavam e algumas possíveis aplicações, para que fossem lidos e aceitos pela comunidade matemática da época. Podemos observar essa ânsia pela aceitação da comunidade e os principais objetivos do trabalho no próprio prefácio de *descriptio*:

> "*Já que nada é mais tedioso, caros matemáticos, na prática das artes matemáticas, que os grandes atrasos sofridos nas tediosas e longas multiplicações e divisões, na procura por razões e na extração de raízes quadradas e cúbicas — inclusive, não só considerando a perda de tempo, mas também o aborrecimento dos vários erros bobos que podem surgir: tenho, portanto, revirado minha mente, e, através dessa arte certa e eficiente, posso ser capaz de melhorar esse processo dadas essas dificuldades postas. Ao fim, após muitas reflexões, finalmente encontrei um caminho incrível para encurtar esses procedimentos, e talvez a maneira como esse método surgiu seja exposta em outro lugar: sinceramente, levando tudo isso em conta, não poderia existir nada mais útil do que o método que descobri. Os números associados com multiplicações, divisões e longas e árduas extrações de raízes quadradas e cúbicas são todos rejeitados neste trabalho, e, em seu lugar, outros números os substituem, que desempenham o papel desses rejeitados apenas por meio de adições, subtrações, e divisões por 2 e por 3. Como o segredo é melhor se partilhado com todos, como todas as boas coisas o são, é uma tarefa prazerosa expor esse método para o uso público de todos os matemáticos. Então, estudantes de matemática, aceitem e aproveitem livremente este trabalho que foi produzido pela minha benevolência, Adeus.*" (NAPIER, 1614, tradução nossa)

É possível perceber nesse prefácio a principal premissa dos logaritmos de Napier: simplificar operações aritméticas, substituindo multiplicações por somas, divisões por diferenças e raízes por divisões nas palavras do matemático, para isso, seriam necessárias gigantescas tabelas com uma grande quantidade de números com muitas casas decimais para garantir precisão ao método.

A simplificação de cálculos associadas a grandes tabelas já era uma prática conhecida na época, a técnica da *prosthaphaeresis* envolvia fórmulas trigonométricas como $sen\,a\,.\,sen\,b=\frac{1}{2}$, que permitiam transformar multiplicações de senos em somas e diferenças de cossenos, ambas as funções já tabeladas, minuto a minuto por vários matemáticos. Segundo Bruce (2002), Regiomontanus (1436–1476) já teria produzido tabelas de senos através de técnicas ptolomaicas considerando um triângulo retângulo de hipotenusa 10.000.000, logo com uma precisão de 7 casas após a vírgula, sua obra foi publicada de forma póstuma, em 1540.

Tendo em vista que o método era de conhecimento público amplo entre os admiradores da matemática, segundo Moulton (1915, p.6), é possível que os métodos da *prosthaphaeresis* também tenham inspirado ou motivado os trabalhos de Napier, um indicativo disso é que o matemático enfatiza em quase todas as suas proposições que os logaritmos se aplicam a senos, e suas tabelas possuem logaritmos apenas das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Podemos observar esse foco nos versos de Napier escritos logo após o prefácio de *descriptio*:

> *"SOBRE OS LOGARITMOS.*
> *Pelos quais todos os senos, tangentes, e secantes, são trazidos a vocês por um trabalho longo e prolixo;*
> *E que esta pequena tabela de Logaritmos, Caro Leitor, traz-lhes todos de uma vez, sem grande trabalho."* (NAPIER, 1614, tradução nossa)

Na mesma obra, Napier define logaritmo através de uma relação que foi posteriormente associada ao que hoje chamaríamos de uma conexão entre progressões aritméticas e progressões geométricas. A relação entre esses dois tipos de sequências numéricas e algumas consequências matemáticas remontam à antiguidade. Mendes e Soares (2019) afirmam que a genealogia desse tipo de raciocínio começa na Babilônia, em tabletes de argila em que foram identificadas sequências de potências de números como 225, 9, 16 e 100, segundo os autores, estariam associadas possivelmente a "cálculos de interesse"; além disso, em seu livro Arenário, Arquimedes desenvolveu longas sequências das potências de 2, em que se evidenciam noções de adição de expoentes que hoje descrevemos pela propriedade $a^m + a^n = a^{m+n}$. Contudo, não é possível estabelecer relações causais entre essas produções matemáticas e o tipo de sistematização e objetivos dos logaritmos do século XVII (MENDES; SOARES, 2019).

Em suas proposições iniciais sobre a definição dos logaritmos, Napier constrói inicialmente uma semirreta dividida em segmentos congruentes, o matemático explica o processo através de noções físicas como tempo e velocidade, o ponto P que descreve a semirreta a partir de um ponto de origem A, define os pontos B, C, D, E, F, G e assim por diante em intervalos iguais de tempo, logo em velocidade constante, portanto, são definidos infinitos pontos que dividem a semirreta AO em infinitos segmentos congruentes (NAPIER, 1614). Pode-se observar a construção geométrica na figura 1.

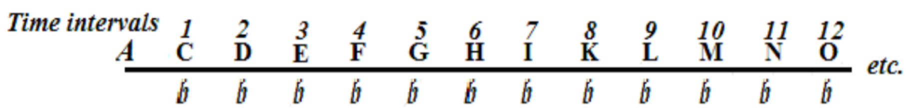

Figura 1 – Semirreta dos logaritmos
Fonte: NAPIER, 1614.

É definido também um segmento de reta $\alpha\omega$ que vai decrescendo progressivamente ao longo de intervalos iguais de tempo, porém, agora com uma velocidade variável, que diminui proporcionalmente ao que resta no segmento após cada corte multiplicado por uma constante de proporcionalidade β, assim, surgem os segmentos $\lambda\omega$, $\delta\omega$, $\epsilon\omega$, e assim por diante (NAPIER, 1614), é possível observar com essa construção na figura 2 abaixo.

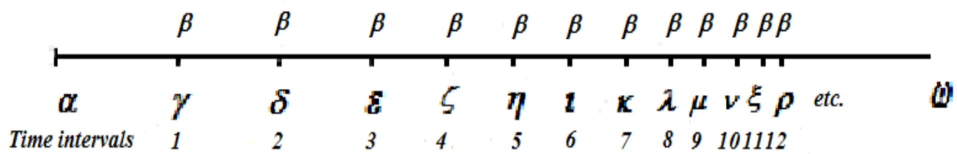

Figura 2 – Segmento de reta dos proporcionais
FONTE: NAPIER, 1614.

Napier usa o tempo como recurso para estabelecer uma relação entre segmentos de AO e $\alpha\omega$, ao mesmo tempo em que $\alpha\omega$ decresce para $\lambda\omega$, o ponto P que descreve a semirreta AO está em C, logo há um segmento AC, que é definido como o logaritmo de $\lambda\omega$, por consequência, AD é logaritmo de $\delta\omega$, AE é logaritmo de $\epsilon\omega$, e assim por diante. Numericamente, Napier implicitamente define a medida de AC igual a 1, logo cada logaritmo seguinte é o número sucessor na sequência dos naturais. Além disso, a medida de $\alpha\omega$ é definida como 10^7 e seu logaritmo igual a zero, o que discutiremos de forma mais aprofundada na análise do livro *constuctio.*

De forma a simplificar esse raciocínio através de nossa matemática ocidental contemporânea, podemos relacionar a semirreta dos logaritmos a uma progressão aritmética e a semirreta dos proporcionais a uma progressão geométrica, na primeira inicia-se no 0 a uma razão igual a 1, a segunda inicia-se em 10^7 e é decrescente a uma razão de 0,9999999, assim, cada termo geral a_i da PA é o logaritmo de Napier correspondente ao termo genérico g_i da PG, sendo $a_i = i$ e $g_i = (0{,}9999999)^i \bullet 10000000$, logo, para Napier, $log\, 10^7 = 0$, $log\, 9999999 = 1$, $log\, 9999998 = 2$, e assim por diante.

Ao longo do livro 1 de *descriptio*, Napier apresenta várias consequências dessa definição, discute algumas proposições análogas à equação $log\, a + log\, b = log\, ab$, apresenta alguns exemplos de problemas geométricos resolvidos com a ajuda dos logaritmos, além de instruções de como encontrar aproximações para os não presentes nas tabelas que acompanhavam a obra. O livro 2 é dividido em 2a e 2b, em 2a, o autor desenvolve uma série de aplicações dos logaritmos a problemas trigonométricos, em 2b, continua esse processo, mas agora dentro da geometria esférica, importante para a astronomia e para a navegação, duas áreas conectadas e de grande relevância econômica naquele momento. Em alguns exemplos ao longo dos livros, Napier usa os logaritmos para substituir números que não são senos, como as medidas dos lados de um triângulo, que eram usados na regra dos senos, por exemplo. Essas tentativas de mostrar a utilidade dos logaritmos a várias áreas do conhecimento matemático associadas a um certo rigor matemático reforçam os objetivos de Napier de ser reconhecido pela comunidade científica com essa obra.

Por sua vez, *constuctio* é a obra que apresenta o caminho que Napier percorreu na construção de suas tabelas de logaritmos. Publicado 2 anos após sua morte por seu filho Robert Napier, é um livro mais fragmentado, o que fica evidente quando o próprio Robert chama atenção em seu prefácio que nas primeiras proposições o pai chamava os logaritmos de números artificiais, já que esses trechos teriam sido escritos anos antes da adoção do termo logaritmo, ao mesmo tempo, em um apêndice que acompanha *constructio*, são estabelecidas bases para o que seria o sistema de logaritmo de base 10 que Henry Briggs desenvolveria muitos anos depois, logo, posteriores a *descriptio*.

Nas primeiras proposições de *constructio*, Napier aborda questões relacionadas a precisão de cálculos e representação numérica. Sobre isso, cabe destacar que em sua época, os números decimais não eram padronizados como hoje, segundo Hobson (1914), apesar de já existirem algumas outras notações menos convenientes para casas decimais, o uso sistemático do ponto decimal teria sido inventado de forma independente pelo próprio Napier, contudo, uma padronização da notação só ocorreria no século XVIII. Apesar disso, o uso de números decimais em *constructio* se restringia apenas entre as operações envolvidas no processo de cálculo para determinar os números das tabelas com o máximo de precisão possível, os resultados finais eram sempre inteiros. Logo, funções trigonométricas como seno não eram definidas em uma circunferência unitária como hoje, eram adotados raios muito maiores, no caso de Napier, para representar senos com precisão de minutos, o raio da circunferência trigonométrica escolhido (ou o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo) foi 10000000 ou 10^7, que seria o seno de 90º (NAPIER, 1619).

Seguindo as aproximações que já traçamos com a matemática atual, os senos estariam em progressão geométrica que decresceria a cada multiplicação do chamado seno completo (10^7) por uma razão constante. Com o objetivo de identificar com o máximo de precisão os senos já determinados por tabelas conhecidas nessa progressão, Napier escolheu a razão inteira que resultaria no decrescimento mais lento possível, ou seja, $1-\frac{1}{10^7}=0{,}9999999$, dessa forma os termos inicialmente diferem em apenas uma unidade a cada multiplicação são ainda mais próximos (NAPIER, 1619).

Napier define que seu logaritmo de 10^7 vale zero, crescendo de um em um a cada decrescimento da PG pela razão 0,9999999, disso podemos constatar as diferenças desse sistema quando comparado ao que temos hoje, em que zero é o logaritmo de 1 e nossa “progressão geométrica”, a função logarítmica, é crescente. Além disso, o sistema de Napier não comportava ainda a ideia de base, contudo, dado que os números menores que 10^7 tinham logaritmos positivos, Napier já reconhecia a existência de logaritmos negativos para os números maiores que 10^7, ainda não era consolidada a nomenclatura positivo/negativo para números, Napier usa termos que podem ser traduzidos como abundante/defectivo. (NAPIER, 1619)

Apesar de ser matematicamente possível, na prática, seria inviável calcular todos os números da tabela multiplicando um a um, por isso, Napier identificava padrões, em sua primeira coluna de logaritmos, foram determinados 50 números, o último era 9999900,0004950, muito próximo de 9999900, ou seja, multiplicar 10000000 por 0,9999999 50 vezes equivale quase a 10^7 multiplicado pela razão $1-\frac{1}{10^5}=0{,}9999900$, dessa forma, Mouton (1915) aponta a importância da proposição que estabelece que logaritmos de números proporcionais são igualmente espaçados, segundo este autor, isso possibilitou a Napier agrupar várias operações, assim, poderia agora avançar seus logaritmos de 50 em 50, através de uma nova razão. Repete-se esse processo várias vezes com razões ainda maiores segundo a mesma ideia.

Além desses processos, para simplificar os cálculos Napier determinou também constantes que poderiam ser somadas ou subtraídas aos logaritmos para multiplicar ou dividir os números correspondentes na PG por 10, 2 ou outros números úteis. Segundo Hobson (1914), considerando a propriedade que hoje escrevemos $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$, essas constantes também são logaritmos eram obtidas a partir da diferença entre dois logaritmos cujos logaritmandos divididos resultem no multiplicador pretendido, por exemplo, para encontrar o logaritmo de 10, efetua-se a diferença entre o logaritmo de 10^7, zero, e o logaritmo mais próximo possível de 10^6, o resultado: 23025842,34. Bastava então somar ou subtrair esse número a um logaritmo para multiplicar ou dividir o logaritmando por 10, o que facilitava muito adaptar um número que se aproximava em seus algarismos a algum seno procurado, faltando apenas uma mudança de ordem decimal.

A partir de todos esses métodos e outros talvez não escritos, Napier construiu uma tabela de números em progressão geométrica com 69 colunas, em que aproximou todos os senos de 0º a 90º minuto a minuto a algum número com logaritmo definido, ao se deparar com um intervalo de dois números próximos, um maior e um menor, escolhia-se sempre a média aritmética entre os dois. Com isso, as tabelas de logaritmos dos senos totalizaram 90 páginas, uma para cada grau, com seus 60 minutos, há um exemplo de como eram organizadas a tabelas na figura 3, com um trecho da página correspondente ao ângulo 43º.

min.	***Sine***	***Logarithm***	***Differential +/-***	***Logarithm***	***Sine***	***min.***
50	**6925630**	**3673561**	**407356**	**3266205**	**7213574**	**10**

Figura 3 – Exemplo da tabela de logaritmos de Napier
Fonte: Napier, 1619.

Cabe ressaltar que vários autores, como Hobson (1914), Moulton (1915) e Ian Bruce nas notas de tradução de Napier (1619), apontam vários erros nos cálculos de Napier, especialmente nas últimas casas numéricas, é possível observar isso no próprio *constructio* em que Napier chega a resultados um pouco diferentes utilizando dois caminhos distintos, cada um possivelmente com uma carga diferente de erro numérico.

O apêndice de *constructio* contém a proposição inicial de um novo sistema de logaritmos em que $\log 1=0$ e os logaritmos de um número qualquer são encontrados a partir dos logaritmos de números primos, como todo número pode ser decomposto em primos, bastaria somar os logaritmos correspondentes dada a propriedade $\log a + \log b = \log ab$. Isso é a base do trabalho de Henry Briggs, cuja relação com Napier e contribuições aos logaritmos serão discutidas na seção 3.2.

Sobre disputas da invenção dos logaritmos, Cajori (1913a) escreve que o relojoeiro suíço Jost Bürgi publicou suas tabelas de logaritmos em 1620, porém, na época, sem as explicações que eram prometidas na primeira página, que só seriam tornadas públicas em 1856. Cajori (1913a) aponta, ainda que a construção de suas tabelas era muito semelhante à de Napier, com a diferença de que sua progressão geométrica era crescente a uma razão de $1+\frac{1}{10^4}$(ou seja, 1,0001) e, para ele, $\log 10^8$ era igual a 0, ao invés do $\log 10^7$ adotado por Napier. Cajori (1915) aponta que, segundo relatos de Benjamin Bramer e Johannes Kepler, os logaritmos de Bürgi foram desenvolvidos de forma independente dos de Napier, talvez até antes, contudo, o próprio Kepler, na introdução de seu livro *Rudolphine Tables*, critica duramente a demora de Bürgi em publicar seu trabalho: “Justus Byrgius [versão em latim de Jost Bürgi] foi levado a esses mesmos logaritmos muitos anos antes do sistema de Napier aparecer; mas sendo um homem indolente e pouco comunicativo, em vez de criar seu filho para o benefício público, o abandonou no nascimento” (KEPLER, 1627 apud CAJORI, 1915, pp. 102–103). O desabafo acalorado de Kepler nos mostra como a comunidade científica do século XVII valorizava publicações científicas em linguagem matemática formal, estruturadas de forma quase euclidiana, em torno proposições, definições e demonstrações, o que, ao contrário de Bürgi, Napier conseguiu realizar com *descriptio*, e sendo assim reconhecido como inventor dos logaritmos.

A definição de logaritmo de Napier e sua possível analogia a progressões aritméticas e geométricas prevaleceu durante todo o século XVIII; em 1808, C. F. Kaussler, em um livro didático, teria optado por sua definição, por ter menos “buracos e obscuridades”, mesmo que vários trabalhos já definissem o conceito a partir dos exponenciais (CAJORI, 1913d).

3.2 Os impactos iniciais dos logaritmos de Napier: navegação, astronomia e os novos logaritmos de Henry Briggs

No século XVII, as tecnologias de transporte e comunicação eram bastante limitadas, com isso, novas produções científicas poderiam levar anos para se disseminar para outros países, Hobson (1914) traz algumas informações a respeito desse processo para os logaritmos de Napier a partir de escritos dos matemáticos da época. Segundo o autor, Kepler publicou em 1620 como dedicatória em seu livro *Ephemeris* uma carta que teria enviado a Napier em 28 de julho de 1619, parabenizando-o pela invenção dos logaritmos levando em conta as contribuições do conceito matemático para a astronomia. Kepler fez a sua revisão da obra de Napier, apontando alguns erros menores, e ainda publicou sua própria tabela de logaritmos com algumas mudanças em 1624. Cabe destacar que Napier morrera 2 anos antes do envio da carta de Kepler, que desconhecia esse fato, um sinal das dificuldades de comunicação da época.

Hobson (1914) aponta ainda as conversas que Napier manteve com Edward Wright, matemático que trabalhava com navegação e logo viu nos logaritmos uma importante contribuição para essa área, Wright seria também o primeiro tradutor para o inglês de descriptio, mas faleceu em 1615, e o trabalho foi concluído por seu filho.

Nesses dois contatos estabelecidos com a obra de Napier, podemos observar como rapidamente se percebeu a relevância dos logaritmos em uma matemática aplicada tanto à astronomia, quanto à navegação, ambas muito relevantes economicamente na Europa do século XVII, apesar disso, Bruce (2002) afirma que haviam limitações nos logaritmos de Napier ao lidar com números que não fossem senos, o logaritmo de 1, por exemplo, era um número gigantesco, inconveniente para cálculos que não envolvessem funções trigonométricas, o que poderia reduzir seu potencial.

Outro diálogo de Napier com outro matemático mencionado por Hobson (1914) é com Henry Briggs, professor de geometria em Oxford, que, em conversa por carta em 1615 com o arquebispo Ussher, disse estar desenvolvendo um trabalho com os "novos e admiráveis" logaritmos de Napier. Briggs visitou Napier ainda em 1615, novamente em 1616 e teria repetido em 1617, mas Napier faleceu naquele ano. No prefácio de constructio, Robert Napier reforça essa relação amistosa entre os dois matemáticos (NAPIER, 1619) e, segundo Bruce (2002), os dois teriam discutido um novo modelo de tabela no encontro de 1616, usando uma sequência de números crescentes ao invés da decrescente e um logaritmo de 1 igual a 0, contudo, a decisão pela base 10 seria de autoria exclusiva de Briggs.

O trabalho de Briggs, publicado no livro *Arithmetica Logarithmica* em 1624 envolveu um sistema de logaritmos de base 10, muito próximo ao que é ensinado hoje nas escolas brasileiras, em que $log\,1=0$, $log\,10=1$, por consequência, $log\,100=2$, $log\,1000=3$, e assim por diante. Segundo Bruce (2002), diferentemente dos logaritmos de Napier que foram todos obtidos a partir de extrapolações lineares de um único logaritmo determinado, Briggs calculou os seus partindo de vários logaritmos de números primos, levando em conta que qualquer número pode ser decomposto em primos e a tão importante propriedade $log\,a \bullet b = log\,a + log\,b$, assim, bastaria decompor o logaritmando em números primos e somar os logaritmos destes.

Bruce (2002) faz uma descrição aprofundada dos métodos de cálculo de Briggs, o cálculo de logaritmos de resultados não inteiros envolvia a extração de várias raízes quadradas sucessivas. Através de métodos numéricos já conhecidos de extração de raízes, Briggs efetuou inicialmente sucessivas raízes do número 10, compreendendo que, pela propriedade que hoje escrevemos $log\,a^n = n\,log\,a$, a cada raiz efetuada, o logaritmo de 10, igual a 1, era dividido por 2 sucessivamente, como pode-se visualizar na tabela 1.

O Matemático continuou o processo até a 54ª raiz, 1,00000000000000012781914932003235, observando que nessa e nas 3 anteriores extrair a raiz quadrada era quase equivalente a uma divisão por 2 na parte fracionária dos números, o que possibilitou-lhe estabelecer, por aproximação, uma proporção linear entre números dessa sequência e seus logaritmos, já que os dois decresciam praticamente na mesma taxa nesse ponto, pela metade, como é possível observar na tabela 1, nos grifos das linhas 51 a 55 as partes decimais das raízes são aproximadamente: 2045, 1022, 0511, 0255, 0127, todos multiplicados por 10^{-18}, se aproximam muito de uma PG de razão 0,5.

n	Raízes quadradas sucessivas de 10: $\sqrt[2\,n]{10}$	Logaritmos: $\frac{1}{2^n}$
0	10	1
1	3.16227766016837933199889354443	0,5
2	1.77827941003892280122542119519	0,25
3	1.33352143216332402567593171529	0,125
10	1.00225114829291291546567363887	0.009765625
20	1.00000219591867555420331713751	9.5367431640625E-6
30	1.00000000214444947937776742976	9.31322574615478515625E-9
40	1.00000000000209418894246160263	9.094947017729282379150390E-12
50	1.00000000000000204510638912051949	8.8817841970012523233890533E-15
51	1.00000000000000102255319456025922	4.44089209850062616169452 7E-15
52	1.00000000000000051127659728012948	2.220446049250313080847263E-15
53	1.00000000000000025563829864006471	1.110223024625156540423632E-15
54	1.00000000000000012781914932003235	5.551115123125782702118158E-16
55	1.00000000000000006390957466001617	2.775557561562891351059079E-16

Tabela 1 – Raízes sucessivas de Briggs
Fonte: adaptado de Bruce (2002).

Logo, para aproximar os logaritmos de qualquer número primo, bastaria extrair raízes suficientes para chegar em um valor próximo aos dessa região de n entre 50 e 54 da tabela 1, e interpolar o logaritmo desse número primo qualquer através de uma proporção com algum desses valores da tabela 1 e de seus logaritmos já conhecidos, tem-se então o logaritmo dessa i-ésima raiz do número primo e dada a propriedade $log\ a^n = n\ log\ a$, basta multiplicar sucessivamente o valor por 2, i vezes, para chegar de fato ao logaritmo do número primo pretendido.

Contudo, para que o número tendesse mais rápido para este intervalo desejado e menos extrações de raízes fossem necessárias, Briggs procurava alguma potência próxima de um múltiplo de 10, para 2, por exemplo, $2^{10} = 1024$, divide-se por 1000 para ter um número próximo de 1 (1,024) e extraem-se, nesse caso, 47 raízes quadradas, até atingir um número com a quantidade de 15 zeros após a vírgula (assim como os números de n entre 51 e 54 na tabela 1), e através de uma proporção simples com os números mais próximos dentre as últimas 4 raízes de 10 da tabela 1, encontra-se uma excelente aproximação para o logaritmo da 47ª raiz de $2^{10}/1000$; pelas propriedades de logaritmo, multiplicando o resultado por 2 em um total de 47 vezes, temos o logaritmo de $log\ 2^{10}/1000$, através de mais propriedades retorna-se a potência do logaritmando a 1, ao final de todas essas etapas o logaritmo de 2 de Briggs resultou em 0,301029995663981, segundo Bruce (2002), esse teria sido o primeiro logaritmo não trivial calculado pelo matemático inglês.

Seguindo esse método, Briggs encontraria logaritmos para vários números primos e trouxe os resultados para os números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000 com uma precisão de 14 casas decimais em *Arithmetica Logarithmica* de 1624, que também continha uma longa formalização matemática do processo de construção das tabelas e adaptações para o uso na trigonometria. Além do uso dos logaritmos de números primos, segundo

Bruce (2002), dada a enorme quantidade de números envolvidos, o matemático também usou técnicas de interpolação e teria sido provavelmente o primeiro a descobrir métodos de diferenças finitas nesse processo.

O processo de construção dos logaritmos de Briggs não envolvia ainda noções exponenciais que utilizamos hoje para defini-los, tampouco existia a noção função logarítmica, tratou-se de um processo bastante engenhoso e eficiente com as ferramentas matemáticas disponíveis nessa época. Com um sistema mais simples e menos restrito às funções trigonométricas, as tábuas de logaritmos e as réguas de cálculo baseadas nessas definições de Napier e Briggs seriam instrumentos populares para a realização de cálculos aritméticos longos por mais de 300 anos, até a invenção dos computadores e calculadoras.

Discutiremos nas próximas seções as expansões conceituais do logaritmo para a geometria, para a álgebra, que possibilitaram que os logaritmos continuassem relevantes na matemática até a atualidade.

3.3 A segunda metade do século XVII: novas definições e as várias curvas logarítmicas

Cajori (1913a) narra que em 1695, Edmund Halley revisou a definição de Napier para os logaritmos, segundo Halley, os logaritmos seriam "*Numeri Rationum Exponentes*", ou seja, estariam relacionados a "razões", o matemático propunha a divisão do intervalo de 0 a 10 em uma escala de números em progressão geométrica de 0 a 100.000, nesse sistema, o que chamava-se de logaritmos de 10 e 2, seriam respectivamente logaritmos de 1 para 10 e 1 para 2, e seus valores dependeriam dos valores na PG, entre 1 e 2, 30.102, entre 1 e 10, os 100.000. A partir disso, Halley teria sido o primeiro a derivar sem apoio da geometria uma série infinita para o cálculo de logaritmos, mesmo que de forma implícita. Essa discussão continuaria 19 anos depois com Roger Cotes, mas permaneceria esquecida e pouco estudada até o século XIX.

Segundo Cajori (1913a), para além das propostas de Halley, a maior parte das discussões e descobertas sobre os logaritmos ao longo do século XVII e XVIII envolveram principalmente três curvas: a que representa o que chamamos hoje de função logarítmica que chamaremos aqui de curva logarítmica, a espiral logarítmica e a hipérbole. A curva logarítmica é a que hoje conhecemos por equações do tipo $y = log\, x$, enquanto a espiral é a representação da mesma curva, mas em coordenadas polares, foram estudadas ao mesmo tempo em que se constituíam noções iniciais de função e a geometria analítica, alguns dos matemáticos envolvidos nesse processo foram: René Descartes, J. Gregory, C. F. M. Dechales, Christiaan Huygens, J. Bernoulli, dentre outros. O estudo dessas curvas pautou muitas discussões sobre os logaritmos ao longo século XVIII.

Dedicaremos um pouco mais de atenção sobre a terceira curva, a hipérbole, a figura 4 a seguir representa um teorema proposto por Gregory St. Vincent em 1647:

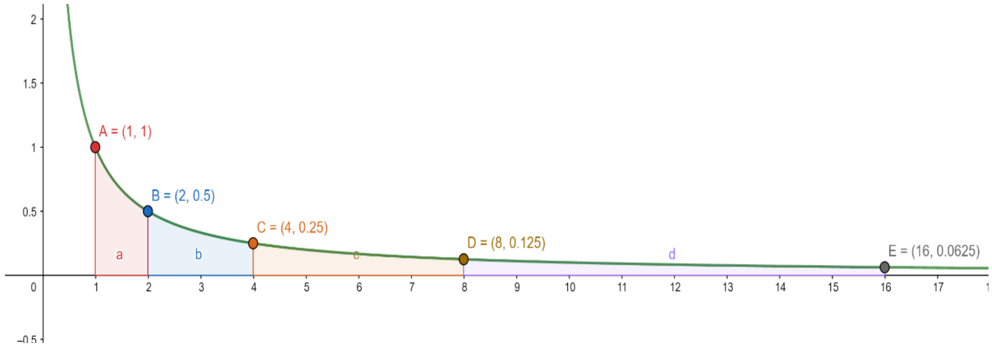

Figura 4 – Quadratura da hipérbole de Gregory St. Vincent
Fonte: produção nossa.

Segundo Cajori (1913a), Gregory St. Vincent investigou em seu livro *Opus geometricum* a quadratura da hipérbole $xy = 1$ ou $y = \frac{1}{x}$ e propôs um teorema em que, se forem desenhados segmentos paralelos a uma assíntota que liguem a hipérbole e sua outra assíntota determinando regiões de formas diferentes, mas áreas iguais (como pode-se observar em a, b, c e d na figura 4), as alturas desses segmentos paralelos estariam em progressão geométrica. Apesar de St. Vincent não mencionar logaritmos, sabemos hoje que a área abaixo de uma hipérbole como essa é um logaritmo, afinal, hoje definimos $\int \frac{1}{x}\, dx = ln\ x$. Contemporâneo a Gregory St. Vincent, o jesuíta belga Alfons Anton de Sarasa revisou seu trabalho, relacionando a variação em progressão aritmética da área e em progressão geométrica da altura dos segmentos paralelos à definição clássica de logaritmo de John Napier.

Nicolaus Mercator, em seu livro *Logarithmotechnia*, publicado em 1668 expandiu a equação da hipérbole $\frac{1}{1+a}$ em uma série infinita: $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots$, contudo, ele não a integrou para chegar a uma série para os logaritmos, mas trabalhou com valores numéricos para a e eventualmente acabou conectando seus resultados com os logaritmos, possivelmente usando os resultados de St. Vincent e Sarasa. Apenas Leibniz, em 1676, introduziria seus métodos de cálculo integral e demonstraria a partir da relação entre progressões aritméticas e geométricas observadas que a área abaixo da hipérbole é seu logaritmo (CAJORI, 1913a).

3.4 As discussões do século XVIII: logaritmos de números negativos e imaginários e a consolidação da notação exponencial

Ao estudar a história dos logaritmos nos deparamos com um fato contraintuitivo, os logaritmos foram inventados antes da notação moderna exponencial e da função exponencial. Cajori (1913a; 1913b) conta-nos que, ao longo do século XVII, cada matemático tinha sua própria forma de escrever os expoentes.

Thomas Harriot, por exemplo, simplesmente repetia os fatores quantas vezes fossem necessárias: a^4+4a^2+a seria $aaaa+4aa+a$, mas René Descartes teria sido o primeiro a adotar algo mais próximo da notação que temos hoje, porém apenas para expoentes naturais. Ao longo dos anos a notação moderna foi se consolidando, apesar de que ainda no século XVIII, muitos matemáticos preferiam representar a^2 por aa, enquanto, para quaisquer outros expoentes maiores de 2, seguiam o que temos hoje por padrão (CAJORI, 1913b)

Wallis em 1656 teria introduzido de forma não explícita expoentes negativos e fracionários, que seriam escritos na forma algébrica nas manifestações do teorema binomial de Newton em 1676. A relação entre logaritmo e expoente também foi intuída por Wallis implicitamente em 1685, e de forma explícita em uma troca de cartas entre John Bernoulli e Leibniz em 1694, em que discutiam a construção da curva $x^x=y$ (CAJORI, 1913b).

A partir desses conhecimentos mais aprofundados sobre a álgebra associada aos logaritmos, formou-se um ambiente fértil para o problema que definiria as discussões do século XVIII sobre o tema, como seriam os logaritmos de números negativos. Podemos exemplificá-lo na aplicação de algumas propriedades à expressão $log(-2)^2$, sabemos que $log(-2)^2=log\,4$, porém, poderíamos fazer $log(-2)^2=2\,log-2$, logo, $log\,2=log-2$, essa contradição que hoje não admitimos como verdadeira foi o principal ponto de discussões nos anos 1700 e envolveu matemáticos como John Bernoulli, Leibniz e Euler.

Cajori (1913b) narra essa história se baseando, principalmente, em cartas trocadas entre esses matemáticos, algumas delas só tornadas públicas no início do século XX. Segundo o autor, no século XVIII, havia muitas divergências quanto ao uso de números negativos e números complexos, ao contrário de hoje, os matemáticos não se sentiam livres para se restringir a um determinado conjunto que melhor se encaixe em sua pesquise, e, quando eram usados, suas propriedades deveriam ser provadas, e não axiomáticas como as tratamos atualmente.

A proporção $\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}$ é um exemplo dessas polêmicas, um número maior estar para um número menor enquanto um número menor está para um número maior seria impossível para Leibniz, que justificou sua posição a favor dessa impossibilidade considerando que uma razão deve ser considerada imaginária caso não tenha logaritmo, logo, assumiu a inexistência de logaritmos de números negativos. Em cartas trocadas com Leibniz, John Bernoulli se mostra convicto da existência da relação $log\,x=log-x$, justificando-se através de algumas integrais, segundo ele a curva logarítmica seria como a hipérbole, com dois ramos. Leibniz rebateu os argumentos e discordou do colega (CAJORI, 1913b).

Anos depois, Bernoulli voltaria a defender seu ponto, agora com um nome muito importante na história da matemática e dos logaritmos, Leonard Euler, seu aluno. Numa série de cartas trocadas entre 1727 e 1729, que só seriam publicadas em 1902, Euler traz argumentos favoráveis e contrários a expressão $log\,x=log-x$ defendida por Bernoulli; um ponto favorável seria a equação $z=log\,x^2$, que poderia ser transformada em

$z = 2\ log\sqrt{x^2}$, e então: $\frac{z}{2} = log\sqrt{x^2}$, como $\sqrt{x^2} = \pm\ x$, $\frac{z}{2} = log\ x = log - x$. Euler também questiona a possibilidade de que $log - x = log\ x + log - 1$, logo, pela definição anterior, $log - 1 = 0$, uma contradição que poderia ser explicada caso a função admitisse um mesmo resultado para dois valores diferentes, como propunha Bernoulli. Contudo, quando Euler utilizou uma definição geométrica para o cálculo da área de um setor circular proposta pelo próprio Bernoulli para invalidar o argumento do professor, a discussão foi vencida pelo aluno, apesar de que, por muitos anos, ainda houve defensores da teoria de Bernoulli (CAJORI, 1913b).

Em 1745 as cartas trocadas entre Bernoulli e Leibniz, que já discutimos, foram publicadas, o que reacendeu o debate em torno dos logaritmos envolvendo números negativos e imaginários. Nessa época, Euler já tinha desenvolvido trabalhos sobre as propriedades dos números imaginários e em 1747, retomaria as discussões por carta sobre o assunto, agora com d'Alembert. Euler defendia que, sendo n um número de um conjunto qualquer, $log\ n$ teria infinitos valores complexos, e teria um único valor real para cada n positivo. O matemático escreveu ainda um artigo em 1747 que só seria publicado em 1862, em que contava sobre as controvérsias com Bernoulli e trazia argumentos convincentes para seus pontos, contudo, o artigo não foi publicado na época, em seu lugar, Euler publicou outros artigos menos convincentes, que, segundo Cajori (1913c), possivelmente atrasaram uma pacificação em torno da definição dos logaritmos (CAJORI, 1913c).

Ao longo de todos esses trabalhos, além dos infinitos logaritmos imaginários, Euler teria estabelecido a definição por exponenciais que adotamos hoje: $a^{log_a x} = x$. Além disso, escreveu extensamente sobre números imaginários e teria sido o primeiro a denominar pela letra e o que conhecemos hoje por número de Euler, que, apesar disso, já era de conhecimento dos matemáticos da época (CAJORI, 1913c).

Por fim, destacamos um trabalho brasileiro de Dias (2005), publicado nos anais do XXIII Seminário Nacional de História; o autor nos apresenta um artigo de um outro brasileiro chamado Leopoldo Amaral publicado em 1930, em que este engenheiro e professor de matemática, criticou duramente as definições propostas por Euler de que números negativos não possuiriam logaritmos reais, usando, inclusive, termos como revolução científica 30 anos antes de Thomas Kuhn.

Dias (2005) nos apresenta uma possível definição de logaritmo alternativa, proposta pelo matemático brasileiro Elon Lages Lima, em que, partindo da definição de Napier e Briggs que relaciona progressões aritméticas e geométricas, preserva-se a relação entre soma e multiplicação($log\ a \bullet b = log\ a + log\ b$), além de incluir os números negativos através da propriedade $log\ x = log - x$ defendida por John Bernoulli; contudo, seria perdida a definição de logaritmo por exponenciais ($a^{log_a b} = b$).

Dias (2005) destaca ainda o problema em se julgar com os olhos de hoje as discussões do século XVIII, em que as ideias sobre números imaginários e negativos ainda estavam em ebulição e as divergências nos conflitos Bernoulli-Leibniz e Euler-d'Alembert iam para além dos logaritmos, percorrendo, por exemplo, o desenvolvimento da mecânica celeste no segundo caso. Dias conclui seu trabalho com indagações sobre como e porque os matemáticos adotaram as definições de Euler, em um contexto ainda repleto de dúvidas e incertezas.

A partir dessa definição alternativa de logaritmo apresentada por Dias (2005), podemos perceber como a caracterização exponencial ao mesmo tempo em que trouxe novas possibilidades de aplicação aos logaritmos, criou alguns limites às possibilidades de domínio da função logarítmica em relação às propostas iniciais de Napier e Briggs. Isso nos permite refletir sobre como a história não é linear e óbvia, não podemos afirmar que houve uma absoluta evolução dos conceitos para um patamar superior, mas sim, escolhas foram feitas para adequá-lo a outras necessidades, em um processo complexo que envolvia um contexto social, cultural e de poder dentro da comunidade dos matemáticos ao longo dos últimos 4 séculos.

4. Algumas ideias sobre história e historiografia

Realizamos aqui inicialmente uma revisão bibliográfica sobre história da matemática, refletimos sobre o que é história, como essas várias versões da história são elaboradas a partir de diferentes vieses ideológicos.

Roque (2012), na introdução de sua *História da Matemática*, em um exercício de definir e diferenciar história e historiografia, escreve:

> *"Tornou-se também importante diferenciar a história da historiografia, que é a produção dos historiadores. Diferente da história, que pode ser definida como o conjunto do acontecer humano, objeto de estudo dos historiadores, a historiografia é a escrita sobre esse acontecer, que pode incluir uma atividade crítica, procurando mostrar as bases epistemológicas e políticas sobre as quais os discursos históricos são construídos, exibindo suas pressuposições tácitas."* (ROQUE, 2012, p.29)

A definição da autora de história como o "conjunto do acontecer humano" nos mostra como esse conceito é abstrato e abrangente, sendo a historiografia um exercício de interpretação que os historiadores fazem sobre a história e o que se produz de fato academicamente. Essa historiografia, como toda a produção científica, muda ao longo do tempo, através de novas explicações, baseadas em novas fontes mais confiáveis ou revisões críticas de pesquisas anteriores.

Sobre o processo envolvido na ciência histórica, Nobre (2014) escreveu sobre o papel do historiador:

> *"o papel do historiador é sempre estar atento à origem das informações que recebe e à diversidade dos caminhos que levaram à concepção do fato histórico consumado. Informações históricas são, naturalmente, oriundas de interpretações e somente com uma análise crítica, a partir de elementos quantitativos, mas com base qualitativa, é que se pode ter clareza sobre a informação adquirida. Elementos qualitativos para a análise do fato histórico, levam o historiador a uma melhor e aprofundada concepção do objeto estudado. E isso pode fazer com que*

> *ele tenha maior propriedade sobre interpretação histórica concebida."* (NOBRE, 2004, p.541)

Nobre (2004) concorda que a história das descobertas científicas não é imutável, com o tempo o que era verdade pode ser revisado e atualizado. Para o autor, após a escrita da história da matemática ao longo dos últimos séculos, a descoberta de novas fontes primárias e grandes mudanças em verdades históricas deixaram de acontecer com tanta frequência, o que ocorre no lugar são reinterpretações relativas a certos processos dentro do debate acadêmico natural do processo científico.

Nesse sentido, Nobre (2004) traz uma série de exemplos de verdades históricas bastante questionáveis, algumas distorcidas por relações de poder, outras por falta de provas concretas, como, por exemplo, a história de Thales de Mileto. Esse matemático teria vivido entre 625 e 547 a.E.C. (antes da Era Comum), contudo as únicas fontes que Nobre (2004) aponta existirem sobre o matemático são os escritos de Heródoto, que viveu mais de 100 anos depois e os de Aristóteles, nascido apenas em 384 a.E.C. Nobre (2004) aponta que pesquisas recentes questionam a possibilidade de Thales ter previsto um eclipse, o que se trataria possivelmente de uma coincidência, e também elencam as grandes dificuldades envolvidas na tradicional anedota da medição da altura das pirâmides, que só seria possível em momentos bastante específicos do ano, levando em conta a angulação das pirâmides com suas sombras.

Se Nobre (2004) destaca o problema das fontes e discute alguns parâmetros metodológicos para pesquisas históricas com foco nas culturas com amplos registros escritos, D'Ambrósio (2012) nos chama atenção além disso para as culturas periféricas e para as características ideológicas, políticas e sociais intrínsecas à construção de uma historiografia:

> *"A história tem servido das mais diversas maneiras a grupos sociais, desde família, tribos e comunidades, até nações e civilizações. Mas sobretudo tem servido como afirmação de identidade. Em qualquer área do conhecimento, uma vez identificados os objetos do seu estudo, a relação de fatos, datas e nomes depende de registros, que podem ser de natureza muito diversa: memórias, práticas, monumentos e artefatos, escritos e documentos. Essas são as chamadas <u>fontes históricas</u>. E a interpretação depende de ideologia, na forma de uma filosofia da história. Esse depender é a essência do que se chama <u>historiografia.</u>"* (D'AMBRÓSIO, 2012, p. 339)

O autor também discute ao longo deste trabalho que a busca pelas fontes primárias, as mais confiáveis, para basear pesquisas em história, mas que esbarram na exclusão de conhecimento de culturas inteiras que não privilegiaram registros escritos, como lendas, ditos populares, rituais etc. Nesse sentido, D'Ambrósio (2012) discute o programa etnomatemática que tem como proposta historiográfica justamente explorar essas histórias não contadas de povos marginalizados dentro da pesquisa em história por historiografias mais tradicionais. É importante destacar que a historiografia baseada na etnomatemática não se restringe a civilizações e povos antigos, mas também a outros grupos marginalizados em nossa sociedade.

Sobre história da matemática, historiografia e suas diferenças e convergências, Borges (2013) escreve:

> *"enquanto a história da matemática está preocupada com o desenvolvimento, o situar a um lugar no tempo, o desvelar da matemática, a historiografia da matemática preocupa-se em adotar a investigação científica, a reconstruir, a descrever o desenvolvimento do passado sobre um determinado assunto na história. Assim, a historiografia envolve a investigação da evolução do passado para descrever e interpretar o passado no tempo e lugar de uma maneira tão crítica e comparativa quanto possível"* (BORGES, 2013, p. 7519).

O autor nos traz, novamente, a historiografia como esse exercício crítico e científico de interpretação sobre uma história já contada. Em sequência, seu trabalho discute algumas abordagens historiográficas para história da ciência, dentre elas: presentista, diacrônica, internalista e externalista. Uma historiografia presentista geralmente envolve anacronismos históricos, no processo de utilizar conhecimentos atuais para a verificação da ciência do passado, dessa forma, reforça os grandes "gênios" da ciência e omite uma série de vozes com menos poder. Já a abordagem diacrônica propõe o oposto, deve-se compreender a ciência como uma atividade contextualizada a sua época, essa visão pode expandir o escopo do que foi científico e abarcar métodos que hoje consideramos inválidos. Já a dicotomia entre historiografias internalistas e externalistas envolve a consideração do contexto do fato histórico, na primeira, é desconsiderado, ao contrário da segunda, em que se idealiza a ciência como um exercício coletivo em que uma série de circunstâncias externas políticas, sociais, econômicas, religiosas têm seu impacto (BORGES, 2013).

Transpondo essas noções historiográficas da ciência em geral para a da matemática, podemos questionar uma interpretação de sua história que não leve em conta os contextos da época e da cultura em que determinada matemática foi produzida para, justamente, não cair em anacronismos. Roque (2012), por exemplo, questiona a ideia de que os mesopotâmios teriam uma álgebra e resolviam equações, uma conclusão obtida a partir de traduções anacrônicas dos procedimentos matemáticos desses povos; na busca por encontrar a matemática de hoje na do passado, esse tipo de visão deprecia outras partes dessas culturas que mereceriam mais atenção e uma visão mais contextualizada temporal e culturalmente.

Segundo Saito e Dias (2013), apesar de sempre ter sido escrita, a partir do século XVIII, surgiram esforços para reunir em grandes compêndios uma história geral da matemática, contudo, isso foi feito através exposições lineares e cronológicas, baseadas apenas na sucessão lógica dos conceitos e não levam em conta todo o contexto social e cultural envolvido, logo, numa perspectiva historiográfica presentista e internalista. Isso se repete até em obras mais recentes como ‘Introdução à história da matemática’ de Howard Eves (2004) e ‘História da matemática’ de Carl B. Boyer (1996), traduzidas para o português e bastante difundidas pelas livrarias brasileiras.

O trabalho de Roque (2012) no livro “História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas” foi um marco para a divulgação de uma história da matemática mais adequada às pesquisas mais recentes com historiografias menos anacrônicas e mais contextualizadas, além de ser o primeiro livro de história da matemática baseado em pesquisa originalmente brasileira, segundo a própria autora. Apesar disso, trata-se de um trabalho cujo objetivo é recontar a história dos povos elencados nessas obras enciclopédicas tradicionais, deixando de lado culturas marginais ao mundo ocidental.

Reflexões sobre essas várias abordagens interpretativas possíveis nos permitem complexificar a pergunta “Qual história da matemática queremos contar?”.

5. A título de conclusão

Estudar a história da matemática, e mais especificamente a história dos logaritmos, nos revela quão contraintuitivo pode ser o processo de sua criação e nos possibilita questionar e entender de formas diferentes e em ordenamentos não convencionais conceitos cristalizados nos currículos tradicionais da disciplina.

Em nossa exploração da história dos logaritmos, mostramos a diversidade de problemas, definições e abordagens envolvendo esse conceito matemático, envolvendo aritmética, álgebra, geometria, em diferentes graus de protagonismo; além da complexa questão da finalidade, “para que servem os logaritmos?” muitos perguntam, e a história traz múltiplas respostas em diversos contextos para essa pergunta.

O capítulo de História dos logaritmos se justifica ainda pela natureza exploratória desta pesquisa, cujo objetivo é chamar atenção de forma inicial para a relevância de uma problemática de pesquisa, para que futuros trabalhos possam explorar de forma mais aprofundada essas e novas questões.

Após nossa tentativa de contar uma, estudamos sobre o que de fato é história, história da matemática e o que essas áreas têm a contribuir com a Educação Matemática. Entendemos então que não há uma história única, há diversas perspectivas historiográficas possíveis que podem nortear ideologicamente e causar impactos, a depender de quem a conta.

Referências

BICUDO, M. A. V. *A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa*. R. B. E. C. T., v. 5, n. 2, 2012.

BICUDO, M. A. V. Apresentação. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa qualitativa: segundo a visão fenomenológica*. 1ª edição. São Paulo: Cortez, 2011. pp. 7–10.

BORGES, M. F. *As abordagens historiográficas da matemática e sua importância para a Educação Matemática*. In: VII CIBEM, 7. Anais. Montevidéu: 2013.

BRUCE, I. *The Agony and the Ecstasy**:** The Development of Logarithms by Henry Briggs*. The Mathematical Gazette, v. 86, n. 506, pp. 216–227, 2002.

CAJORI, . *History of the Exponential and Logarithmic Concepts*. The American Mathematical Monthly, v. 20, n. 1, pp. 5–14, 1913a.

CAJORI, F. *History of the Exponential and Logarithmic Concepts*. The American Mathematical Monthly, v. 20, n. 2, pp. 35–47, 1913b.

CAJORI, F. *History of the Exponential and Logarithmic Concepts*. The American Mathematical Monthly, v. 20, n. 3, pp. 75–84, 1913c.

CAJORI, F. *History of the Exponential and Logarithmic Concepts*. The American Mathematical Monthly, v. 20, n. 4, pp. 107–117, 1913d.

CAJORI, F. Algebra in Napier's day and alleged prior inventions of logarithms. In: KNOTT, C. G. (Org.). *Napier tercentenary memorial volume*. 1ª edição. Londres, 1915. pp. 93–109.

D'AMBRÓSIO, U. *Tendências e Perspectivas Historiográficas e Novos Desafios na História da Matemática e na Educação Matemática*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.14, n.3, pp. 336–347, 2012.

DIAS, A. L. M. *Controvérsias na história da matemática: a definição de logaritmo*. In: Simpósio Nacional de História, 23. 2005, Londrina. Anais. Londrina: Associação Nacional de História, 2005.

GARNICA, A. V. M. *Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. Mimesis,* Bauru, v. 22, n. 1, pp. 35–48, 2001.

HOBSON, E. W. *John Napier and the Invention of Logarithms*. Cambridge: at the University Press. 1914.
KNOTT, C. G. Preface. In: KNOTT, C. G. (Org.). *Napier tercentenary memorial volume*. 1ª edição. Londres, 1915.

MENDES, I. A.; SOARES, E. C. *LogAritmos (Números da Razão).* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

MOULTON, J. F. *The invention of logarithms, its genesis and growth*. In: KNOTT, C. G. (Org.). Napier tercentenary memorial volume. 1ª edição. Londres, 1915. pp. 1–32.

NAPIER, J. *The Description of the Wonderful Canon of Logarithms*, and the use of which not only in Trigonometry, but also in all Mathematical Calculations, most fully and easily explained in the most expeditious manner. Edinburgo, 1614. Tradução e anotações de Ian Bruce. Disponível em: <http://17centurymaths.com/contents/napiercontents.html> Acesso em: 20/03/2020.

NAPIER, J. *The Construction of the Wonderful Canon of LOGARITHMS***,** and the relations of these to the natural numbers. Edinburgo, 1619. Tradução e anotações de Ian Bruce. Disponível em: <http://17centurymaths.com/contents/napiercontents.html> Acesso em: 20/03/2020.

NOBRE, S. *Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática*. *Ciência & Educação*, v. 10, n. 3, p. 531–543, 2004.

OLIVEIRA, M. M. *Como fazer pesquisa qualitativa.* 7. ed. Petrópolis: Vozes, 2016.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, F. DIAS, M. S. *Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI*. Ciência & Educação, v. 19, n. 1, p. 89–111, 2013.

Heron Miguez Gonzalez Gomes
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Brasil

E-mail: heron.gonzalez@unesp.br

Elisangela Pavanelo
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Brasil

E-mail: elisangela.pavanelo@unesp.br