Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Beatriz S. D'Ambrosio
Miami University, Ohio - EUA

Essas reflexões são baseadas em numerosas conversas com Ubiratan D'Ambrosio, sobre a história da matemática e o programa de pesquisas em educação matemática que enfocam a etnomatemática. Iniciei meus estudos de matemática sem entender nada da história da matemática e sem me interessar muito por ela, aliás, eu achava o estudo de história muito chato e de pouca motivação. Estudando para ser professora de matemática nunca me preocupei com a história do conhecimento matemático, apenas aceitava a matemática como todos os jovens que estudavam comigo, uma disciplina bonita, intrigante, desafiadora e completa. Fui aluna de meu pai num curso de matemática e sociedade, no ano de 1979, meu penúltimo ano como universitária. Foi nesse curso que vim a questionar pela primeira vez o papel da matemática na sociedade. E, pela primeira vez comecei a me preocupar em entender a matemática como produção humana. A partir daí me interessei mais e mais pelos estudos do meu pai, em etnomatemática. Lia seus livros e trabalhos, assistia, sempre que possível, suas conferências, e me orgulhava cada dia mais de suas idéias e de como elas influenciavam o pensar de muitos educadores matemáticos e profissionais de diversas áreas.

Quando chegou a hora de escrever a minha tese de doutorado, estava fascinada com a história do currículo escolar. Optei por pesquisar o movimento de matemática moderna no Brasil e a influência no currículo brasileiro daquilo que ocorria em outros países, principalmente na América do Norte. Foi então que iniciei meus estudos de história, sempre consultando meu pai, e aprendendo a fazer uma análise mais crítica e reflexiva. Com esses estudos, me interessei muito pelo processo de aprendizagem assumido no movimento de matemática moderna e passei a analisar o processo de construção de conhecimento humano. Buscando respaldo no trabalho de Piaget e Garcia (1989), estudando os trabalhos do meu pai, estudando sobre a filosofia e sociologia da matemática, estabelecia conexões importantes ao construir para mim mesmo o que seja a matemática. Foi um processo de crescimento e evolução pessoal, com estudos que enriqueciam cada dia mais o meu trabalho com os futuros professores.

Recentemente, tive a oportunidade de dar um curso de história da matemática para futuros professores que se preparavam para lecionarem no ensino secundário. Claro que consultei meu pai, pois sabia que meu conhecimento da história da matemática era ainda muito limitado. Ele me encorajou para assumir o curso e desenvolver ainda mais meu conhecimento de história. Prometeu também me emprestar todas as suas notas de aula! O que me ajudou muito, pois foi um material organizado para eu entender melhor sobre a complexidade da história do pensamento humano, ao mesmo tempo a organização do material serviu para orientar a preparação do meu curso. Sem ajuda do meu pai dificilmente eu teria tido sucesso na preparação de um curso tão difícil. Com o tempo modifiquei a ênfase do curso tornando-o bem distinto do curso do meu pai. Um dia, talvez, com muito mais estudo eu consiga dar o curso um pouco mais parecido com o dele pois ele integra todo seu conhecimento de história de diversas áreas com sua experiência de vida criando um curso que ninguém pode replicar.

Neste ensaio, relato o que aprendi com meu pai e como aplico o pouquinho que sei de história da matemática no meu trabalho com futuros professores de matemática. O meu trabalho com história é ingênuo e novo. É um trabalho em desenvolvimento e espero que o leitor o aprecie como tal.

Motivação para o estudo de história da matemática

Para muitos indivíduos, como para mim no início de meus estudos universitários, a atividade matemática se resume em encontrar regras e procedimentos para resolver problemas não reais propostos em livros escolares. A matemática escolar se torna obsoleta quando esses mesmos indivíduos enfrentam problemas na vida real. Muitos dos nossos futuros professores começam seus estudos universitários com essa percepção da natureza da matemática reforçada durante onze anos de estudos pré-universitários.

São várias as razões pelas quais podemos considerar o estudo da história da matemática essencial para modificar a visão precária de muitos alunos quanto à natureza da disciplina. Enquanto acreditamos que seja necessário um curso de história da matemática e ciências para todos os alunos universitários, neste ensaio justificamos apenas o estudo de história para os futuros professores de matemática.

Neste ensaio analisaremos os seguintes motivos para envolvermos os futuros professores no estudo da história da matemática. O estudo de história ajuda os futuros professores a entenderem o seguinte: a evolução da matemática como processo sócio-cultural de construção humana; o processo construtivista como a ação humana que leva à aprendizagem; a semelhança entre o processo histórico e a aprendizagem das crianças; a álgebra como processo geométrico e a importância da geometria na fundamentação matemática; os problemas motivadores para a construção da matemática e como tais problemas levaram ao desenvolvimento de diferentes áreas da matemática; a compreensão de soluções alternativas para problemas que são triviais quando se utiliza a matemática moderna; e a evolução do rigor lógico e de provas matemáticas.

Evolução da matemática como processo sócio-cultural

Consideramos importante que o futuro professor entenda a evolução da matemática como parte de um processo sócio-cultural, entendendo como a matemática está ligada à cultura humana. Para que a matemática escolar seja compreendida como resultado da ação humana de entender e explicar o mundo e suas experiências nele, o ensino da matemática nas escolas teria que enfatizar a natureza contextual da disciplina. Para propiciar aos seus alunos experiências de natureza contextual, o professor deve entender a evolução da matemática dessa maneira. Exemplos de contextos históricos, acessíveis aos alunos, que motivaram a construção matemática incluem a divisão de terras, o pagamento de taxas, a divisão de pão, a construção de obras (incluindo altares religiosos), dentre muitos outros.

Professores que têm uma perspectiva histórica da evolução da matemática como processo de construção humana, são capazes de utilizar a experiência e a realidade cultural dos seus alunos para escolher problemas motivadores e contextuais. Trabalham a proposta etnomatemática conforme sugerida por D'Ambrosio (1985, 1990, 1993, 1995, 1999ª, 1999b). Também são esses os professores que se utilizam da matemática como instrumento para desenvolver uma crítica às injustiças sociais (Frankenstein, s/d, 1987, 1989, 1991, 1995; Gutstein, 2001, 2002, 2003; Knijnik,1996; Monteiro, 1998), utilizando problemas cotidianos para incentivar a construção de conhecimento matemático dos alunos, simulando com eles o processo histórico de construção de conhecimento pela humanidade.

Construtivismo na ação humana de aprender

Examinando o que existe hoje recuperado da matemática antiga, como a egípcia, a grega, a babilônica, a hindu ou a chinesa, encontramos problemas conceitualmente acessíveis aos alunos dos primeiro ou segundo graus. Porém o objetivo em utilizá-los na preparação de futuros professores vão além de sua utilidade na futura prática de ensino do mesmo. Servem como exemplos da participação humana no processo de construção do conhecimento. Talvez sejam os exemplos mais efetivos ao explicarmos o construtivismo humano aos alunos universitários. Ao trabalharmos com problemas históricos enfatizamos que os alunos procurem resolver os problemas apenas com os conceitos já desenvolvidos na época. Por exemplo, consideremos o problema histórico egípcio de dividir quatro pães entre cinco homens. Pede-se ao aluno universitário que resolva esse problema utilizando-se apenas frações unitárias, tal como fariam os egípcios. O pensamento simples, quando já se conhece um conceito mais avançado é um grande desafio para os futuros professores. Alguns comentam que a falta de sofisticação torna os problemas mais difíceis para o homem moderno. Enfatizamos que o uso de frações unitárias como elemento básico na resolução de problemas envolvendo frações não unitárias assemelha-se ao processo utilizado por crianças ao resolverem o mesmo problema (Fosnot e Dolk, 2001). A construção de frações não unitárias pelas crianças é um processo que ocorre depois de uma fundamentação profunda no uso de frações unitárias. Alguns currículos modernos colocam problemas semelhantes aos históricos para serem resolvidos pelos alunos. Os guias dos professores mostram possíveis soluções realizadas pelos alunos. Sem experiência com a história da matemática e sem uma reflexão sobre o processo de construção do conhecimento os professores estranharão a solução comumente proposta pelas crianças.

Processo histórico e a construção do conhecimento

A semelhança entre o processo histórico e a construção de novo conhecimento por indivíduos está bem documentado por Piaget e Garcia (1989). Os autores sugerem que o estudo da história pode esclarecer a aprendizagem de conceitos matemáticos, assim como o estudo da aprendizagem pode levar o historiador a novas interpretações do desenvolvimento de conceitos através dos séculos. O exemplo acima, da divisão do pão, é ilustrativo dessa semelhança. Há muitos outros exemplos possíveis. Inúmeros pesquisadores têm desenvolvidos estudos sobre isso (Sfard, 1995; Keiser, 2004)

Para o futuro professor o estudo da história matemática se apresenta como uma oportunidade para entender tanto problemas que possam motivar a construção de novos conceitos matemáticos quanto a seqüência de esquemas desenvolvidos pelos indivíduos ao procurar uma solução significativa para um problema.

Geometria como fundamentação da álgebra e das operações numéricas

Muitos alunos, ao terminarem o segundo grau, já estabeleceram certas crenças e mitos sobre a matemática. Muito comum é o aluno que se considera bom na álgebra e nas operações numéricas, porém tendo dificuldades com a geometria. Eles compartimentalizam a álgebra e a geometria, entendendo-as como idéias isoladas. Falta a compreensão da sinergia entre as idéias desenvolvidas nas duas áreas. O estudo da história da matemática surpreende muitos alunos ao perceberem como a geometria estabelece o alicerce do que conhecemos como álgebra hoje. Ficam também surpresos com a base geométrica das operações numéricas. Ao estudarem os *Elementos* de Euclides, alguns algoritmos rotineiros da álgebra se tornam explicados geometricamente. Por exemplo, o quadrado da soma, hoje representado por $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, aparece nos *Elementos* de Euclides (Livro 2, proposição 4): "If a straight line be divided into any two parts, the square on the whole line is equal to the squares on the two parts, together with twice the rectangle contained by the two parts."

A prova desta proposição e de todas as outras nos Elementos é baseada na geometria. Muitos futuros professores nunca viram uma prova geométrica das relações algébricas conhecidas e utilizadas como triviais. Surpreendem-se ao analisarem o texto desenhando passo a passo as relações geométricas utilizadas no texto.

Outro momento de surpresa para os futuros professores ocorre na análise dos problemas do Rhind Papyrus onde os babilônios utilizam-se do método de completar o quadrado para resolverem equações quadráticas, expressas de forma geométrica. Há vários problemas no Rhind Papyrus onde procura-se encontrar as dimensões de um retângulo dados sua área e seu perímetro. Por exemplo, suponhamos que desejamos encontrar as dimensões de um retângulo onde metade do perímetro e dado por 6 ½ e a área seja 7 ½. O escriba, que descreve a solução, explica que primeiro encontra-se a metade do valor 6 ½ que é 3 ¼ segundo, eleva-se esse valor ao quadrado (10 9/16), subtrai-se a área (10 9/16 – 7 ½ = 3 1/16), e encontra-se a raiz quadrada desse último valor (1 ¾). O resultado do comprimento é encontrado com a soma de 3 ¼ + 1 ¾, e largura com a diferença de 3 ¼ - 1 ¾ (Katz, 2003, pg. 21).

Hoje, tais problemas seriam resolvidos com uma equação quadrática. Mais uma vez, o que para um aluno da idade moderna parece um problema de manipulação simbólica trivial (simplesmente resolvido com a fórmula de resolução de equações do segundo grau), na antiguidade o problema seria resolvido geometricamente. A existência de um desenho geométrico ilustrativo do processo algébrico de completar o quadrado é muito interessante para o futuro professor. Esse desenho geométrico torna-se uma ferramenta alternativa para se trabalhar a compreensão das idéias com seus futuros alunos. O desenho da solução dada pelo escriba explica bem porque atribuímos o nome de *completar o quadrado* a esse processo aritmético e geométrico da antiguidade, hoje um processo algébrico.

A extração da raiz quadrada na antiguidade é outro problema fascinante para o futuro professor. Hoje qualquer aluno que necessite de uma raiz quadrada vai extraí-la com uma calculadora. A idéia de utilizar-se da geometria, analisando a área do quadrado e entendendo o lado do quadrado como a raiz do valor da área, obtendo-se aproximações sucessivas para obter precisão é totalmente nova para a maioria dos alunos universitários. A importância do “gnomon” de Euclides nesse processo ajuda o aluno a ligar processos aritméticos modernos aos fundamentos geométricos.

O estudo da matemática da antiguidade gera alguns conflitos conceituais para os alunos universitários. O maior conflito é sentido quando se exige do aluno que resolva problemas exclusivamente com elementos matemáticos existentes na época antiga. Os alunos, que possuem métodos modernos para a solução dos problemas, têm dificuldades em utilizarem apenas idéias mais simples. Por exemplo, ao analisarem a solução Egípcia para equações lineares os alunos têm dificuldade em reconhecer o uso de proporções no “método da falsa posição.” Assim, no problema 26 do Rhind Papyrus, o escriba propõe encontrar a quantidade que somada a ¼ da mesma resulta em 15. A solução proposta pelo escriba e a seguinte: Assuma o resultado 4. 4 somado a ¼ dele resulta em 5. Portanto, o valor procurado é 12, pois se deve multiplicar 4 pela razão entre 15 e 5 (o valor desejado e o encontrado em princípio), ou seja, 3. Para alunos familiares com a regra de três, esse método de solução e facilmente compreendido, porém para alunos sem experiências com a regra de três, tal método é difícil de reconhecer como uma proporção. O aluno americano muitas vezes descreve o método do escriba simplesmente como método de tentativa e erro, deixando de descrever o passo fundamental da razão entre o valor desejado e o primeiro encontrado. Essa dificuldade em identificar o raciocínio envolvendo proporcionalidades, ameaça o sucesso do futuro professor ao trabalhar com crianças e jovens, já que muitos se utilizam dessa forma de raciocínio quando possível.

A dificuldade de interpretação dos métodos utilizados na resolução de problemas históricos com proporcionalidades se estende a textos da idade média (1200) como de Leonardo de Pisa (também conhecido por Fibonacci) onde o uso de proporcionalidade é freqüente em toda sua obra.

A análise de estratégias de solução de problemas diversos se assemelha a uma das práticas diárias de qualquer professor de matemática. O professor com prática de refletir sobre o pensamento dos matemáticos da história e analisar como seu modo de pensar se encontra modificado na era atual, tem melhores oportunidades para apoiar os seus alunos no seu processo individual de construção de conhecimento matemático. Esses professores conseguem se liberar do seu método de resolver um problema e aceitar a solução alternativa proposta por outros, incluindo soluções propostas por seus alunos. Seu repertório de soluções é muito mais rico e repleto de conexões e relações entre idéias.

Soluções históricas não triviais comparadas às soluções de hoje

Algoritmos tornam a solução de diversos problemas triviais. O processo histórico demonstra a dificuldade em se construir esses algoritmos e a criatividade envolvida em desenvolvimento de algoritmos, assim como o uso de símbolos e representações diversas (como gráficos, por exemplo). O futuro professor, adulto e experiente, muitas vezes deixa de compreender a natureza evasiva de símbolos e representações matemáticas para seus alunos. Com pressa de avançar seus alunos ao uso de notação moderna, o professor pode atrapalhar o processo de compreensão de uma nova idéia pelos seus alunos. A compreensão profunda requer um processo de invenção pessoal para notações e representações de idéias novas. A invenção de algoritmos próprios faz parte importante do aprendizado com compreensão (Carpenter, et al. 1997). A difícil evolução de diversas idéias ilustra para o futuro professor como se caminha a evolução de idéias pela humanidade. Considere como exemplo a demorada evolução da simbologia algébrica, notação para números decimais, notação para igualdades e frações, e aceitação de números negativos e raízes negativas.

Professores com compreensão da dificuldade de se aperfeiçoar um sistema matemático, darão maiores oportunidades aos seus alunos de construírem seus sistemas próprios, que poderão ser aperfeiçoados pela comunidade de alunos. Outro resultado importante da análise histórica da evolução de algoritmos é de se desmistificar que um algoritmo seja muito superior a outros. No mundo, no processo histórico, diferentes povos criaram diferentes algoritmos para resolverem os mesmos problemas ou para lidarem com idéias difíceis. Observe por exemplo as muitas maneiras de se lidar com números irracionais, como o número pi na determinação da área de um círculo. Vários currículos modernos enfatizam o processo de construção de algoritmos próprios pelos alunos (alguns exemplos são "Investigations in Numbers, Data, and Space," TERC, 2007; "Everyday Mathematics," UCSMP, 2007). A utilização desses currículos exige do professor a compreensão da importância, no processo de aprendizagem, de alunos construírem soluções próprias que são aperfeiçoadas pela comunidade, uma verdadeira réplica do processo histórico.

Evolução do rigor lógico e de provas matemáticas

Através da história da matemática o futuro professor tem oportunidade de analisar a evolução da prova matemática e do rigor matemático. O critério de rigor, a necessidade de provar teoremas e conclusões, evolui de forma interessante, historicamente. O professor, treinado para aceitar apenas provas rigorosas de acordo com o critério moderno, sente dificuldades com as narrativas utilizadas nas provas da antiguidade e de fato, provas até a renascença (circa 1500). Textos históricos geram discussões importantes entre os futuros professores ao avaliarem até que ponto eles aceitam os trabalhos históricos como provas matemáticas. Por exemplo, os textos de Cardano (ainda muito verbosos) são motivo de grande discussão. É claro que se torna importante discutir as provas produzidas por alunos do primário ou secundário num contexto de aceitação ou não, de provas históricas. A discussão sobre as características modernas de provas matemáticas versus os critérios antigos, são um contexto rico para a reflexão dos futuros professores sobre o que se aceita como prova matemática. Discussões sobre como a comunidade determina os critérios, como os critérios se modificam com o tempo, e como os critérios evoluíram para o que conhecemos hoje, criam oportunidades para os professores refletirem sobre o que seja uma prova matemática e qual sua importância no processo de construção do conhecimento. A análise de trabalhos de alunos do primeiro e segundo graus revela uma tendência a se explicar e justificar idéias através de explicações narrativas. A prova formal matemática parece uma forma forçada de justificativa, desviando muito de como os alunos justificam seus pensamentos.

Conclusões

Os parágrafos acima ilustram o quanto se pode aprender através do estudo de história da matemática, principalmente quando se pretende trabalhar com o ensino da matemática. Através de um estudo de história da matemática, o futuro professor vem a compreender a matemática como conseqüência de um processo humano de construção do conhecimento. Os exemplos fornecidos acima são apenas algumas poucas ilustrações de como a história pode fornecer ao professor um maior apoio ao se ensinar a matemática. Com experiências com a história da matemática o professor tem, não somente um maior repertório de problemas motivadores para o ensino, como também uma coleção de variados métodos de solução desde os mais simples da antiguidade até os mais modernos. Entendendo a evolução do conhecimento matemático através dos séculos, o futuro professor poderá analisar de forma crítica e reflexiva o aprendizado de seus alunos. Suas expectativas sobre as dificuldades de compreensão de diversas idéias se tornam mais realistas quando compreendidas de acordo com a evolução histórica das mesmas. Conforme analisamos neste texto, há muitas razões para se estudar história da matemática quando se pretende ensinar a disciplina a jovens e crianças, mas o maior benefício desse estudo é o enriquecimento da visão de mundo do futuro professor.

Referências:

Carpenter,T.P., Hiebert, J., Fennema, E. e Fuson, K.C. (1997). *Making sense: Teaching mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

D'Ambrosio, U. (1999a). Literacy, Matheracy, and Technoracy: A Trivium for Today, *Mathematical Thinking and Learning,*1(2), pp.131-153.

D'Ambrosio, U. (1999b). *Educação para uma Sociedade em Transição*, Campinas, Brasil: Papirus Editora.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 5(1), 44-48.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (1993). Etnomatemática: Um programa [Ethnomathematics: A program]. *A Educação Matemática em Revista*, 1(1): 5-11.

D'Ambrosio, U. (1995). Multiculturalism and mathematics education. *International Journal on Mathematics, Science. Technology Education*, 26(3): 337-346.

Fosnot, C.T. e Dolk, M. (2002). Young Mathematicians at Work: Constructing Fractions, Decimals, and Percents. Porstmouth, Nh: Heinemann.

Frankenstein, M. (1987). Critical mathematics education: An application of Paulo Freire's epistemology. In I. Shor (Ed.), *Freire for the classroom: A sourcebook for liberatory teaching* (pp. 180–210). Portsmouth, NH: Boyton/Cook.

Frankenstein, M. (1989). *Relearning mathematics: A different third R—radical maths.* London: Free Association Books.

Frankenstein, M. (1991). Incorporating race, gender, and class issues into a critical mathematical literacy curriculum. *Journal of Negro Education, 59,* 336–359.

Frankenstein, M. (1995). Equity in mathematics education: Class in the world outside the class. In W.G. Secada, E. Fennema, & L. B. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 165–190). Cambridge: Cambridge University Press.

Frankenstein, M. (1997). In addition to the mathematics: Including equity issues in the curriculum. In J. Trentacosta & M. Kenney (Eds.), *Multicultural and gender equity in the mathematics classroom* (pp. 10–22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Frankenstein, M. (s/d). "Educação matemática crítica: uma aplicação da epistemologia de Paulo Freire" publicado em *Educação Matemática*, Maria Aparecida V. Bicudo (org.), Editora Moraes, São Paulo, pp.101-137.

Gutstein, E. (2003). "Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, Latino school". *Journal for Research in Mathematics Education*, *34* (1), 37 – 73.

Gutstein, E. (2001). Math, maps, & misrepresentation. *Rethinking Schools, 15* (3), 6–7.

Gutstein, E. (2002). *Roads toward equity in mathematics education: Helping students develop a sense of agency*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

Katz, V.(2003). *A history of mathematics: Brief version.* Addison-Wesley.

Keiser, J.M. (2004).Struggles with developing the concept of angle: Comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning.* Vol. 6, No. 3, pp. 285-306.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência. Educação Matemática e legitimidade cultural*, Artes Médicas, Porto Alegre.

Monteiro, A. (1998). *Etnomatemática: as possibilidades pedagógicas num curso de alfabetização para trabalhadores rurais assentados*, Doctoral dissertation, Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas.

Piaget, J. e Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science.* New York: Columbia University Press.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 14, pp. 15-39.

TERC (2007). *Investigations in Numbers, Data and Space*. Pearson Education, Inc.

UCSMP (2007). *Everyday Mathematics*. Wright Group/McGraw-Hill.

Beatriz S. D'Ambrosio
Miami University
123 Bachelor Hall
Oxford OH 45056 USA

e-mail: dambrobs@muohio.edu