*Revista Brasileira de História da Matemática*
*Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)*
*Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*
ISSN 1519-955X

# MUDANÇAS ESTRUTURAIS NOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA MÚSICA A PARTIR DO SÉCULO XVII: CONSIDERAÇÕES SOBRE CONSONÂNCIA, SÉRIE HARMÔNICA E TEMPERAMENTO

Oscar João Abdounur
*Universidade de São Paulo - Brasil*

## Introdução

O século XVII assistiu ao surgimento das primeiras idéias sobre a física da música e consequentemente ao nascimento da ciência acústica, que recebeu esse nome com Joseph Sauveur (1653-1716), quem sistematizou matematicamente o conceito de harmônicos no início do século XVIII. A acústica de então consistia principalmente no estudo de sons musicais tendo por fundamentos princípios físicos-experimentais manipulados matematicamente, em contrapartida com os fundamentos aritmético-numerológicos, associados à antiga tradição pitagórica, predominantes até então nos tratados de música-teórica. Sob essa nova perspectiva, razões pitagóricas da teoria musical tradicional, por exemplo, transformaram-se em razões de freqüências.

Nesse contexto, o mecanicismo e a ressonância em Mersenne; a simpatia acústica e numerologia em Descartes; a concepção de ordem fundamentando o princípio de gosto em Euler fortemente relacionado à teoria de consonância como coincidência de pulsos de Galileu e Mersenne, que contem os conceitos de MDC e MMC; a necessidade de um sistema numérico subjacente à música sustentado por números irracionais em Euler; a idéia de D'Alembert, de forte influência do compositor italiano Zarlino, de acordes consonantes com distribuição harmônica próxima àquela existente na natureza passam a estar presentes nos estudos e discussões a respeito da estética do som.

## Matemática e música a partir do Renascimento: de fundamentos aritmético-numerológicos a princípios físico-experimentais

Do ponto de vista das relações entre matemática e música, o Renascimento caracteriza-se por uma mudança de foco na abordagem da música que passa de uma concepção aritmético-especulativa, fundamentada na forte tradição pitagórica, para assumir um caráter matemático-empírico, cujo grande representante foi Vincenzo Galilei. Dentro desse contexto, há diversas evidências nesse período de um caráter matemático-empírico no tratamento de problemas teórico-musicais. Dentre as contribuições desencadeadoras dessa mudança, aquelas de Ludovico Fogliani (1470-1539) são significativamente influentes.

Apresentando uma discussão sobre a natureza do som e investigando sobre razões de um ponto de vista puramente matemático e aplicado a intervalos musicais em seu *Musica Theorica*, Fogliani forneceu as bases para que Gioseffo Zarlino (1517-1590) organizasse em sua obra *Le Istitutioni Harmoniche* (1558), um referencial importante na educação e teoria musical na Europa nesse período, que procura conciliar teorias especulativas baseadas em fontes antigas com práticas modernas de composição. Por exemplo, numa tentativa de respeitar a autoridade pitagórica, Gioseffo Zarlino sistematizou a prática de intervalos de terças e sextas com caráter consonante, extendendo, nessa obra, o "núcleo sagrado" pitagórico – números 1,2,3 e 4 na explicação de consonâncias -- até o número 6, com o chamado *Senario.*

Dando continuidade a esse teórico, encontram-se o espanhol Francisco Salinas (1513-1590), bem como o matemático francês Marin Mersenne (1588-1648), que se dedicando ainda à acústica, é considerado o primeiro teórico a fundamentar o estudo de harmonia no fenômeno da ressonância. Por meio de correspondências com René Descartes (1596-1650), Mersenne discutiu problemas e aspectos do *Compendium Musicae*, escrito por Descartes em 1618. Apoiando-se de forma significativa na teoria da ressonância resultado de seu contato com Mersenne, Descartes estabeleceu no Compendium conceitos estéticos de influência marcante no *Traité de l'Harmonie*, escrito por Jean Philippe Rameau (1683-1764) cem anos mais tarde, marco no desenvolvimento de harmonia, na medida em que traduz no âmbito desse conceito as mudanças mencionadas, revelando indícios de um abandono da concepção cósmica de harmonia tradicional associada à música das esferas em favor de uma concepção mais próxima ao estudo da forma.

Cabe aqui ressaltar que tais acontecimentos ocorrem no contexto da Revolução Científica, caracterizada por processos de matematização, experimentação e mecanização, propiciando a emergência de interpretações e argumentações inovadoras, contrapondo-se às doutrinas aristotélicas, à luz das quais os estudos da natureza possuíam caráter qualitativo.

Ao exigir dos fenômenos naturais interpretações regidas por fórmulas e teorias matemáticas, a ciência emergente tornara-se mais quantitativa, primando pela exatidão e sofrendo um processo de *matematização*. Estabelecendo limites claros entre sujeito e objeto, o processo de *experimentação* também re-significou a leitura científica que assumiu um caráter mais dissociado, tanto no estabelecimento de condições de observação, como na avaliação de fenômenos de maneira geral.

Apoiando-se em princípios explanatórios redutores da realidade infinitamente complexa, o processo de *mecanização* simplificou excessivamente a ciência ao observar seus fenômenos como máquinas e ao dividir a matéria, bem como sistemas gerais respectivamente em partículas e em partes independentes, desconsiderando todas as suas qualidades exceto forma e tamanho. Explicando tudo que ocorria no mundo através do movimento de partículas de matéria de diferentes tamanhos e formas, tal postura contrapunha-se fortemente à concepção aristotélica, que explicava uma determinada propriedade pela conjectura da existência de uma certa qualidade na qual a propriedade a ser explanada estava contida.

Acreditando que o mecanicismo não se opunha à religião, Mersenne – cuja contribuição no uso da matemática para interpretar a música é significativa – apresenta-se como um dos fundadores e impulsionadores de tal filosofia na nova ciência, defendendo-a fortemente apoiado na idéia de que o conhecimento da grande máquina do mundo constitui o conhecimento da ordem instituída por Deus mediante leis (Japiassú & Marcondes, 1996, p. 180).

Tal cenário reflete-se na interface matemática/música, cujos conceitos passam a ser interpretados com base em princípios físico-experimentais. Abandonando radicalmente a concepção pitagórica impregnada nos argumentos teórico-musicais, Galileu Galilei escreveu em 1638 que nem o comprimento, nem a tensão e nem a densidade linear de cordas eram a razão direta e imediata subjacente a intervalos musicais, mas razões dos números de vibrações e impactos de ondas sonoras que atingiam o tímpano. Considerando o som que alcançava o ouvido invés do objeto vibrante que o produzia, Galileu verificou que a altura musical relacionava-se diretamente à freqüência registrando rastros de arranhões desenhados numa placa metálica provenientes de uma haste vibrante solidária a uma membrana que recebia vibrações sonoras.

A percepção por parte de Galileu no século XVII de que a sensação de altura musical relaciona-se diretamente ao conceito de freqüência marca o inicio da música fundamentada matemático-empiricamente e da física da música em sua concepção atual. Tal idéia motivou esforços para o entendimento de harmônicos musicais -- e conseqüentemente para uma explicação quantitativa de timbre --, já que durante este século parecia paradoxal – a princípio por parte de Mersenne – que um simples objeto pudesse vibrar simultaneamente em diferentes freqüências.

Até início do século XVII, estudava-se acústica somente no que concernia a sua aplicação à música, sabendo-se já nesta época da possibilidade de produção de sons por corpos vibrantes, porém não havia formalização sobre a noção de propagação por ondas no ar. A sistematização desta idéia por meio de fórmulas matemáticas demonstrativas ocorreria mais tarde com Newton, Laplace e Euler.

Classificado como onda, o som ganhou uma nova dimensão, que possibilitou seu estudo à luz da teoria ondulatória desenvolvida por Huygens (1629 – 1695), ponto estratégico no uso da matemática na compreensão de fenômenos musicais na medida em que, compreendendo a natureza do som, tornou-se possível entender, representar e manipular melhor conceitos musicais. Huygens estudou ainda a respeito da falha de uma coma no temperamento desigual, fenômeno relevante para a emergência do Temperamento.

O ceticismo ao dogmatismo aritmético pitagórico em música desencadeou o interesse pelos determinantes físicos da altura musical no final do século XVI e princípio do século XVII. Uma situação representativa dessa postura ocorreu quando Vincenzo Galilei levantou o então paradoxo de que várias razões poderiam associar-se a um determinado intervalo (Dostrovsky, Bell, Truesdell, 1980, p. 664). Apesar de inspirar-se na idéia de harmonia celestial, Kepler também criticou a supervalorização aritmética no julgamento do caráter consonante de um intervalo musical.

## Consonância: de Pitágoras à Galileo

O conceito de consonância variou significativamente ao longo da história. Por exemplo, as terças e sextas não eram consonâncias na Grécia Antiga enquanto que a partir da Idade Média tardia, tais intervalos adquiriam gradativamente o *status* de consonância.

Ao mesmo tempo, há intervalos, tais como a oitava, considerados consonantes em diferentes contextos culturais, apesar das diversas concepções de consonância.

No século VI a.C., os pitagóricos haviam associado as então conhecidas consonâncias perfeitas oitava, quinta e quarta com razões envolvendo somente os números 1,2,3 e 4. Por outro lado, Aristoxenus (séc. IV a.C.) desvinculava consonância de números e assumia uma postura puramente sensorial, reconhecendo além das consonâncias pitagóricas, suas composições com oitavas, tais como a oitava duplamente composta, produzida pela razão 1:8 da corda.

Prevalecendo frente as outras, as concepções pitagóricas de consonância foram transmitidas para a Idade Média principalmente por meio do teórico musical Boécio (séc. VI d.C.). Durante todo esse período, predominou como fundamento nos estudos de música teórica tais idéias, caracterizadas pela rígida distinção entre consonância e dissonância, bem como pelo uso exclusivo de números inteiros.

Com o uso de intervalos de terças e sextas com caráter consonante a partir da Idade Média tardia e Renascimento, não era mais possível explicar consonâncias pelos quatro primeiros números inteiros, de acordo com a perseverante concepção pitagórica. Numa tentativa de manter a autoridade pitagórica, Gioseffo Zarlino extendeu em sua obra *Le istitutioni harmoniche* de 1558, os 4 primeiros números pitagóricos conformadores da consonância até o número 6, com o chamado *Senario*, mas isso ainda não explicava de forma consistente todas as “novas” consonâncias.

Como mencionado, este período caracteriza-se por um deslocamento de justificativas numerológicas a explicações físicas não somente para as razões tradicionais subjacentes aos intervalos consonantes, mas para diversos conceitos acústico-musicais. Tal mudança de perspectiva manifesta-se em diferentes teórico-musicais da época. Por exemplo, observando quão facilmente obtinha-se o intervalo de oitava quando se soprava mais intensamente uma flauta, Descartes sugeriu em 1618 que tal intervalo deveria ser a primeira consonância.

A resolução da ambigüidade apresentada por Vincenzo Galilei ocorreu em seu filho Galileu (1564-1642), que modificou o referencial sonoro de até então ao considerar em sua análise o som que atingia o ouvido ao invés do objeto vibrante que o produzia. Percebendo que altura e intervalo musicais associam-se unívoca, direta e respectivamente à freqüência e à razão de freqüências, Galileu explicou a consonância/dissonância de alguns intervalos ao escrever em 1638 *que a explicação direta e imediata subjacente aos intervalos musicais não era o comprimento da corda, nem a tensão a que se encontrava sujeita, nem a sua espessura, mas sim a razão do número de vibrações e impactos de ondas de ar que batiam diretamente no ouvido (Dostrovsky, Bell, Truesdell, 1980, p. 665).*

Galileu relacionou altura musical com frequência ao observar os deslocamentos contra o tempo descritos por arranhões gerados por uma haste vibrante que desenhava sobre uma superfície metálica. A partir das observações anteriores, o pensador italiano afirmou que o grau de consonância produzido por dois tons associava-se à proporção de impactos do som mais agudo que coincidia com aqueles resultantes do som mais grave. Outros teóricos, tais como Giovanni Battista Benedetti em 1563, já havia levantado conjecturas sobre a associação entre altura musical e freqüência. Em 1585, Benedetti propôs, em seu *Diversarum speculationum mathematicarum et physicorum líber*, que a concordância de intervalos musicais dependia da coincidência de períodos de vibração. Por exemplo, em um intervalo de $8^a$ produzido por duas cordas, cada duas vibrações da corda mais curta encontra uma da corda mais longa.

Adotando uma perspectiva experimental, Galileo retomou a idéia de Benedetti em 1638, explicando consonância como a razão do número de vibrações ou de impactos de ondas do ar que batiam diretamente no ouvido, o que se contrapunha ao dogmatismo aritmético pitagórico, fornecendo mais uma evidência de uma mudança paradigmática no desenvolvimento da música-teórica. Galileu afirmou ainda que a freqüência produzida por uma corda tensionada era inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade linear de tal corda, fato corroborado e generalizado por Mersenne ao determinar, por meio de experimentos envolvendo cordas densas e de mais de 30 metros, outros parâmetros dos quais a freqüência de vibração de uma corda ainda dependia, o que dá subsídios importantes para a sistematização de harmônicos.

**Harmônicos: relação entre Série Harmônica e Série de Fourier**

Uma das grandes questões que vinham acompanhando a acústica musical até então referia-se ao mistério de harmônicos do som. Tentativas de teorizá-los já haviam sido realizadas desde a Grécia Antiga, ganhando maior importância a partir do Renascimento, quando teóricos tais como Gioseffo Zarlino (1517-1590), René Descartes (1596-1650), Galileo Galilei (1564-1642), Marin Mersenne (1588-1648), John Wallis (1616-1703), Joseph Sauveur (1653- 1716), Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), Georg Simon Ohm (1789 – 1854), dentre outros, contribuiram para sistematizar a Série Harmônica.

Mersenne tentou explicar tal fenômeno, estabelecendo o seguinte paradoxo: *Como poderia uma corda – portanto um comprimento de corda – produzir mais que uma altura ao mesmo tempo*? Tal questão não poderia ser respondida com base somente no pitagorismo. Mersenne percebeu a importância dos harmônicos solicitando a inúmeros de seus correspondentes a procurar uma explanação para tal fenômeno.

A essa altura, a correspondência biunívoca entre sons harmônicos e modos de vibração de uma corda não havia ainda sido compreendida. À luz da relação direta entre altura e freqüência, tornava-se mais plausível conjecturar harmônicos do som como superposição de configurações de onda de diferentes freqüências do que como uma composição de vários modos de vibração de uma corda, fortemente relacionada à idéia subjacente ao paradoxo de Mersenne. Tal idéia ganharia uma estrutura bem definida em 1677, quando John Wallis destacou a importância da possibilidade de existência de nós em cordas vibrantes e induziu a vibração de uma corda por simpatia com harmônicos de sua freqüência fundamental, passos fundamentais para a teorização da Série Harmônica. Admitindo que tal fenômeno já era conhecido anteriormente por músicos de Oxford, o matemático inglês confirmou a associação entre harmônicos do som e as diferentes configurações de nós determinantes dos modos de vibração da corda, idéia essa publicada novamente em 1692 por Francis Robartes.

Ainda no que concerne a harmônicos, Fontenelle referiu-se à idéia subjacente ao princípio da superposição quando afirmou que cada metade, cada terço e cada quarto de uma corda de um instrumento realizava suas vibrações parciais ao mesmo tempo que a corda inteira vibrava. O matemático francês Joseph Sauveur (1653-1716) estabeleceu um meio de calcular o número absoluto de vibrações de um som, calculando pela primeira vez a freqüência dos batimentos produzidas por duas notas e resolvendo ainda o paradoxo estabelecido por Mersenne ao explicar racionalmente o fenômeno dos sons harmônicos fundamentando-se no *Princípio da Superposição*, uma idéia essencial aos desenvolvimentos futuros. Assim como Wallis e Robartes, porém independentemente deles, Saveur explicou que a vibração de uma corda em modos mais altos resultava no aparecimento de nós e ventres, introduzindo os termos *son harmonique*, *noeud* e *ventre*. A explicação racional de Saveur para o fenômeno dos sons harmônicos (Houaiss, p. 5670), bem como outras de suas contribuições acústico-musicais o faz um dos grandes precursores da acústica.

Sauveur percebeu que os construtores de órgão haviam descoberto intuitivamente os harmônicos, misturando-os por meio de registros com o intuito de obter distintos timbres. Para ele, *a natureza teve a força de fazer com que os musicistas caíssem inconscientemente no sistema de sons harmônicos norteados apenas por seus ouvidos e experiências. Os organistas misturavam os botões do órgão quase que da mesma maneira com que pintores misturavam cores, imitando a harmonia da natureza observada nos objetos sonoros (Dostrovsky, Bell, Truesdell, 1980, p. 665).* Outros pensadores tais como Newton contribuíram para o desenvolvimento da relação matemática/música neste período, por exemplo, comentando a respeito de sons musicais em alguns de seus primeiros artigos sobre ótica e analisando ainda matematicamente a propagação do som em seu *Princípia*.

Nessa altura, sistematizar matematicamente a fundamental e os harmônicos de um determinado som produzido por um corpo sonoro apresentava-se como o problema acústico central do século XVIII. Nesse período, acreditava-se que os harmônicos dos corpos acústicos possuíam certo equilíbrio natural e Jean-Philippe Rameau (1683-1764) havia fundamentado seu sistema harmônico em cima de tal idéia. Compositor e teórico francês, Rameau publicou seu Tratado de Harmonia em 1722, pedra angular do estudo de harmonia musical que apresenta uma nova teoria abordando, por exemplo, a relação entre o baixo e a harmonia baseado em sua concepção das propriedades físicas do som.

Ainda no século XVIII, Daniel Bernoulli, sob influência de Joseph Sauveur, defendeu que qualquer vibração de um corpo sonoro poderia ser interpretada como uma superposição de seus modos simples com diversas amplitudes, afirmação cujo fundamento – Princípio da Superposição -- viria a ser estabelecido em seu célebre trabalho de 1755. Tal princípio o permitiu interpretar o deslocamento de todo ponto em uma corda vibrante como a soma algébrica do deslocamento produzido pela fundamental e todos os seus harmônicos. D'Alembert também contribuiu para a compreensão matemática de conceitos musicais e em particular, de harmônicos. Estudando o comportamento de cordas vibrantes, o matemático e filósofo francês estabelece uma conexão mais precisa entre altura de som musical e *freqüência*, demonstrando que o comprimento de uma corda sujeita a uma tensão fixa era inversamente proporcional à freqüência do som emitido pela corda referida. Ele foi ainda mais longe ao afirmar que um som natural não era puro, mas complexo, sendo obtido pela superposição de diversos harmônicos de uma série *(Cartier, 1995, p. 751).* Do ponto de vista quantitativo, um harmônico caracteriza-se pela sua *amplitude*, que assume grande importância na síntese sonora. A descoberta de D'Alembert não se aplica somente à análise de sons, mas a todos os tipos de movimentos vibratórios.

Daniel Bernoulli (1700-1782) afirmou que a vibração de um corpo sonoro poderia ser observada como superposição de seus modos simples com distintas amplitudes, porém não havia princípios gerais sobre os quais a prova de tal afirmação poderia ser experimentada (Dostrovsky, Bell, Truesdell, 1980, p. 666). Considerando a insuficiência de ferramentas matemáticas no século XVIII para confirmá-la, essa afirmação somente assumiria uma justificativa consistente no século XIX, quando se explica tal idéia para uma diversidade de corpos vibrantes.

A afirmação de Bernoulli anconrava-se nos experimentos de Fourier em áreas distantes do universo musical. Realizando experimentos em condução de calor nas primeiras décadas do século XIX, Fourier mostrou como representar qualquer curva periódica pela superposição de ondas senoidais correspondentes às freqüências 1,2,3,4,...vezes a freqüência da curva original. Aprofundada e sistematizada por Fourier, a análise harmônica apresentada por D'Alembert e conjecturada por Kepler encontrou aplicação em distintos campos científicos, tecnológicos e econômicos, tais como ondas luminosas, evolução climática, oscilações elétricas, fenômenos geofísicos como amplitude das marés e ondas sísmicas, configurações de uma bandeira, flutuações na Bolsa de Valores etc (Cartier, 1995, p. 752).

A relação entre Série de Fourier e Série Harmônica, bem como suas generalizações e analogias não apenas concretizou o ponto de vista de Daniel Bernoulli em acústica, como se transformou no fundamento para análises de harmônicos, consonância/dissonância, batimentos dissonantes, assim como de outros conceitos musicais aparentemente dissociados da matemática. A sistematização matemática generalizada de tal afirmação ocorreu em 1822 nas mãos de Fourier, que demonstrou que qualquer curva pode ser representada pela superposição de um número de curvas harmônicas simples, resultado esse estendido posteriormente pelo físico alemão Georg Ohm (1819-1880) em 1843 para ondas sonoras, que afirmou que os sons musicais dependiam apenas da distribuição de energia de seus harmônicos, não possuindo nenhuma relação com as diferenças de fase. Tornando-se conhecida como Lei de Ohm da Acústica, a conjectura anterior preludiou as contribuições do cientista alemão Hermann Helmholtz (1821-1894), que analisou o significado dos sons parciais, trabalhando ainda com fases, padrões de ondas sonoras, bem como consonância e dissonância, além de sistemas de temperamento.

**A matemática no temperamento**

Dentre os teóricos que relacionavam matemática e música no século XVIII, encontram-se Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782). Cabe aqui ressaltar tendências opostas em teórico-musicais como Euler e D'Alembert, pois enquanto o primeiro procura inventar acordes musicais que satisfaçam o cálculo, o segundo tenta justificar de maneira rigorosa aqueles acordes e cadências já apresentados pela música tonal de seu tempo, fazendo uso não somente de raciocínios analógicos e argumentações estéticas, mas deduções lógicas.

Para Euler, acústica era um de seus assuntos preferidos. Suas notas mostram que já com 19 anos, ele planejava escrever um tratado sobre todos os aspectos da música, incluindo forma e composição assim como acústica e harmonia. A única parte desse projeto que se concretizou foi o *Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucidae expositae*, escrito por volta de 1731 (St Petersburg, 1739). Nessa obra, Euler apresentou uma teoria para consonância baseada em leis matemáticas e derivadas das idéias de antigos. Ele também incluiu o mais completo sistema de escalas jamais publicado, assim como uma teoria de modulação.

Diante da emergência da tonalidade e da necessidade de um sistema numérico subjacente à música sustentado por números irracionais, Euler afirma que *nós devemos distinguir cuidadosamente as razões que nossos ouvidos realmente percebem daquelas referentes aos sons expressos como números (Dostrovsky, Bell, Truesdell, 1980, p. 666).* O matemático suíço elucidou tal assertiva quando afirmou que no temperamento igual, a escala não possuía consonâncias exatamente puras, uma vez que embora o ouvido escutasse o intervalo de quinta como razão de 3 para 2, seu valor matemático real igualmente temperado soava no ar como $2^{7/12}$. Segundo Euler, o ouvido tendia a simplificar a razão percebida, especialmente quando tons dissonantes seguiam-se após uma progressão harmônica. Por exemplo, a seqüência 36-45-54-64 era indistinguível de 36-45-54-63 ou mesmo de 4-5-6-7.

De modo geral, uma escala temperada significa uma escala em que todos ou quase todos os intervalos encontram-se ligeiramente imprecisos, porém não distorcidos (Sadie, 1988, p. 938). No Temperamento igual, divide-se o intervalo de oitava em 12 semitons associados a relações de freqüências exatamente iguais. Assim como os percursos de quintas pitagóricas não perfazem os de oitavas, não é difícil ver que quaisquer ciclos de intervalos naturais – relações matemáticas simples – não se encaixam entre si, o que exige a necessidade de algum temperamento. Por exemplo, três terças maiores – relação de freqüência 5 para 4 – correspondem a multiplicar a freqüência por $(5/4)^3 < 2$ – freqüência multiplicada para se obter a oitava, quatro terças menores – relação de freqüência 6 para 5 – corresponde a multiplicar a freqüência por $(6/5)^4 > 2$ – freqüência multiplicada para se obter a oitava etc. Embora em um teclado, ambas as operações mencionadas resultam em oitavas, tais operações com intervalos puros diferem da oitava por muito pouco, o que sugere nestes casos respectivamente o aumento e diminuição de algum ou alguns dos intervalos em questão, estabelecendo um tipo de temperamento. De maneira geral, os temperamentos acabam por valorizar determinados intervalos em detrimento de outros no sentido de que aos primeiros correspondem mesmas relações de freqüência diferentemente dos restantes.

O temperamento pitagórico – em que se estabelece todas as quintas naturais e iguais a menos da quinta do lobo – é o temperamento mais antigo utilizado no Ocidente. No Renascimento e início do Barroco, prosperaram temperamentos desiguais em que se priorizava as terças maiores naturais (Sadie, 1988, p. 939). Surgiam ainda outros temperamentos nesse período, que se mostravam superados à medida em que a música estendia-se a todas as tonalidades, pois caía-se em regiões nas quais aos intervalos correspondentes da tonalidade original não subjaziam mesmas relações de freqüências. O temperamento igual já havia sido concebido não matematicamente por teóricos do século XVI, tornando-se mais presente e recomendado por Rameau (1737) e C.P.E. Bach (1762) no século XVIII. Embora ainda utilizados até o século XIX, os temperamentos desiguais mostram-se presentes principalmente na execução de música mais antiga, em que especialistas se empenham em utilizar temperamentos historicamente autênticos com o intuito de fazê-la soar como era ouvida na época e cultura em que foi composta (Sadie, 1988, p. 939).

Nesse ponto, há condições para compreender a maneira como a matemática pode servir de instrumento para sistematizar o Temperamento. No final da Idade Média e início do Renascimento, a música ganhou gradativamente caráter harmônico. Nesse período, a dinâmica anteriormente descrita catalisava-se pela emergência da chamada “era polifônica” ou “idade de ouro da polifonia” (Sadie – ed.-, 1988, p. 733), que por sua vez contribuiria fortemente para expansão do universo musical rumo à tonalidade desenvolvida, por exemplo, por Bach.

A trajetória trilhada pela música ocidental a conduzia à liberdade de modulação não apenas para tonalidades próximas mas para distintos cenários tonais, ou seja, as composições passam a possuir liberdade de transposição de tonalidades. Com o intuito de executar tal expressão isento da reafinação do instrumento tocado a cada modificação tonal, fazia-se necessário uma certa simetria sem a qual a mudança de tom poderia resultar numa escala com intervalos demasiadamente impuros. Por exemplo, se ao ajustar um instrumento, mantem-se a afinação pura nas quintas *reb-lab,lab-mib, mib-sib, sib-fa, fa-do, do-sol, sol-re, re-la, la-mi, mi-si, si-fa#*, o intervalo *fa#reb* - denominado a quinta de lobo que resta para completar o percurso – certamente comprometerá a afinidade harmônica. Isso significa que ocorrendo passagem musical, por exemplo, da tonalidade de *do* maior para *lab* maior, a música sofreria distorções e batimentos intoleráveis. Uma possível solução para o problema seria a utilização de pianos com mais teclas, por exemplo, com notas *do* nos contextos de do maior, ré maior, sol menor etc, notas *re* em contextos de do maior, ré maior etc e assim por diante. Em função da impossibilidade técnica para tal realização, a diversidade tonal confrontaria necessariamente com a manutenção da afinidade harmônica nas escalas.

Nesse ponto, a matemática serve de importante ferramenta para solucionar a discussão entre a evolução cultural da música e a conservação até então de seu caráter mais original e físico. Os experimentos chineses, indianos e helênicos revelaram que distintas tentativas de encontrar uma distância comum nas escalas, dividindo a oitava de modo a respeitar a afinidade harmônica deixavam “restos”[1]. A impossibilidade de solucionar as dificuldades levantadas por tais possibilidades sugeriu o *temperamento* de distâncias, que significou, em sentido mais amplo, redução de alguns intervalos e aumento de outros de modo a compensar a contradição dos distintos *percursos* de intervalos entre si (Weber, 1995, p. 129-130).

O Temperamento não ocorreu como um processo repentino, desenvolvendo-se de diversas maneiras como no temperamento *desigual, o de tom méd*io etc. No início do século XVI, como as tentativas de preencher intervalos naturais de maneira relativamente simétrica sempre defrontavam-se em algum momento com o problema da coma, obtendo-se um perfeição harmônica apenas em certos intervalos restritos, havia algum tipo de temperamento parcial especialmente nos instrumentos de tecla.

A dificuldade técnica de construção de pianos com um grande número de teclas[2] – já que o percurso do ciclo das quintas desencontrava-se indefinidamente de um número inteiro de

[1] O sentido de resto é o de que a manutenção da pureza em alguns intervalos da escala implica na impureza em outros, como no caso da quinta do lobo. Não é possível dividir a escala deixando todos os intervalos puros, ou seja, todos os intervalos produzidos por razões de números inteiros.

2 No caso do piano, aproximadamente 300 teclas em cada uma das oito oitavas, considerando a sensibilidade auditiva humana, ou seja, por volta de 2400 sons em um instrumento.

intervalos naturais aproximando-se deste número na melhor hipótese pela coma -, a necessidade de livre transposição desvinculada da reafinação de instrumentos; bem como a de liberdade de movimentação de acordes exigida pelo processo de modulação contribuíram fortemente para reflexões a respeito da construção de um sistema de afinação mais adequado. As gamas de Pitágoras e Zarlino possibilitavam a construção de escalas ligeiramente assimétricas incapazes, na ocasião, de responder inteiramente às necessidades culturais do final do Renascimento e início do Barroco que exigiriam o estabelecimento de sistema estrutural libertador para a música, denominado temperamento igual. Esse modelo, desenvolvido e sistematizado no final do século XVII e início do século XVIII, consistia na divisão da oitava em 12 intervalos iguais de semitom, permitindo portanto ao instrumentista de tecla a execução de uma peça em qualquer tonalidade diatônica.

Do ponto de vista matemático, o problema consistia em encontrar um fator f correspondente ao intervalo de semitom que após multiplicar 12 vezes uma freqüência $f_0$ correspondente a uma determinada nota – processo convertido musicalmente como uma ascensão cromática[3] da escala dentro de uma oitava – atingisse a sua oitava referente ao dobro da oitava original. Baseado na progressão geométrica – oitava = 2:1; semitom = $2^{1/12}$ -, Euler estudou um sistema de afinação que permitiu aos compositores modularem para e de quaisquer dos 12 centros tonais[4] sem distorções geradas por intervalos correspondentes que apresentavam-se, até então, assimétricos em diferentes escalas (O'Keefee, 1972, p.315). Do ponto de vista matemático, o problema representava-se pela seguinte equação:

$$f_0.f.f.f.f...f = f_0t^{12} = 2.f_0$$

Logo, o fator f deve assumir valor $2^{1/12}$. Considerando a nota *do* com freqüência 1 como referência, obtem-se para as outras notas da gama temperada $do^\# = re_b = 2^{1/12}$, $re = 2^{2/12} = 2^{1/6}$, $re^\# = mi_b = 2^{3/12} = 2^{1/4}$, $mi = 2^{4/12} = 2^{1/3}$, $fa = 2^{5/12}$, $fa^\# = sol_b = 2^{6/12} = 2^{1/2}$, $sol = 2^{7/12}$, $sol^\# = la_b = 2^{8/12} = 2^{2/3}$, $la = 2^{9/12} = 2^{3/4}$, $la^\# = si_b = 2^{10/12} = 2^{5/6}$, $si = 2^{11/12}$, $do = 2$. Portanto, as notas desta escala possuem as seguintes relações de freqüência com a nota inicial:

| *do* | *re* | *mi* | *fa* | *sol* | *la* | *si* | *do* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $2^{1/6}$ | $2^{1/3}$ | $2^{5/12}$ | $2^{7/12}$ | $2^{3/4}$ | $2^{11/12}$ | 2 |

Nesse ponto, caberia ainda levantar a questão de porque escolher 12 notas entre os 300 sons diferentes dentro de uma oitava possíveis de discriminar pelo ouvido humano treinado (Martin, 1948, p. 493). Provavelmente, a divisão procedeu-se dessa forma por respeito a uma certa continuidade à escala grega, cujo processo de construção matemática – percurso de quintas – apresentava-se de tal maneira que o caminho aí delineado assumia, a menos de oitavas, máxima aproximação da nota inicial após 12 ciclos, referentes às 12 notas.

[3] Movimento melódico por meio de semitons.

[4] Os 12 centros tonais correspondentes às 12 notas da escala temperada.

**Conclusões**

A aritmética de Pitágoras procurou expressar conceitos teórico-musicais e até mesmo uma harmonia cósmica por meio da matemática. A matemática continuou presente na música do Renascimento, que assistiu a introdução de princípios físico-experimentais em seus fundamentos estruturais, princípios esses que despertaram o interesse pela resolução de problemas por parte de teóricos, cujos trabalhos culminaram na sistematização matemática de harmônicos musicais. Conceitos e problemas estruturais da teoria musical, tais como temperamento e consonância, também foram concebidos e sistematizados fazendo uso da matemática.

A gama temperada serviu como um meio termo nas afinações de distintas tonalidades no sentido de abdicar de uma afinidade harmônica absoluta em algumas tonalidades em detrimento de uma qualidade bastante insatisfatória dessa propriedade em outras, para assumir uma certa "impureza harmônica" equivalentemente tolerável em todas as tonalidades. As gamas apresentadas mostram-se ainda incapazes de reproduzir alguns sons tais como o de um rouxinol ou mesmo dos pássaros em geral, o do farfalhar das folhas das árvores, sons de algumas melodias, de uma sirene, etc (Martin, 1948, p. 497-498). Há 2500 anos, ocorre a primeira manifestação de interação da música com matemática na cultura ocidental. Posteriormente, as relações entre essas áreas passam por momentos de tensão e repouso como uma música, dinamizando-se fortemente com o Temperamento (Martin, 1948, p. 498).

Assim como as gamas apresentadas não conseguem produzir os sons mencionados e talvez possamos construir novas gamas capazes de realizar tal tarefa, as escalas construídas mostram-se, muitas vezes, incapazes de representar sentimentos ou cenários talvez passíveis de expressão em outros sistemas. Nesse sentido, o universo musical reserva ainda muitas possibilidades em seu processo de expansão com a construção de outras escalas bem como linguagens mais amplas, em que possivelmente distintas habilidades possam interagir com a música e a matemática vindo a contribuir não apenas com escalas temperadas com um número arbitrário de notas, mas através de diversos outros meios existentes ou que possam vir a existir.

No Renascimento, emergira uma tradição teórico-musical que se opunha à concepção pitagórico-especulativa tendo como expoente Vincenzo Galilei. Sob a ótica de tal tradição, o som e os conceitos musicais nele fundamentados deveriam ser explicados por meio de fenômenos físicos passíveis de serem comprovados por experiências. Exemplos significativos resultantes dessa tendência foram as tentativas de compreender consonância não mais como razão entre intervalos expressa por pequenos números inteiros, mas como coincidência de vibrações; temperamento pelo uso sistematizado de números irracionais e harmônicos pelas suas relações com o conceito de Série de Fourier, explicações essas representativas da emergência de um novo paradigma nas relações entre matemática e música a partir do século XVII.

**Bibliografia**

CARTIER, P.Kepler et la musique du monde. *La Recherche*, Paris, v. 26, p. 750-755, juillet-août, 1995.

COHEN, H.F. *Quantifying music*: the science of music at the first stage of the Scientific Revolution, 1580-1650. Boston: D. Reidel Publishing, 1984.
DOSTROVSKY, S.; BELL, J.F.; TRUESDELL, C. Physics of music. In: THE NEW GROVES Dictionary of music and musicians. New York: Mac Millan, 1980, p. 664-677.
HOUAISS, A. Harmonia. In: DUARTE, R.; MOUTINHO, I.R.O. *Enciclopédia Mirador internacional*. São Paulo: Enclyclopaedia Britannica do Brasil, 1976, p. 5668-5671.
JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. *Dicionário básico de Filosofia*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1996.
MARTIN, H. Les mathématiques et la musique. In: LIONNAIS, F. Le (org.). *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris: Editions dês Cahiers du sud, 1948.
MERSENNE, M. *Harmonie Universelle*: the books on instruments. Netherlands: Martinus Nijhoff; Hague, 1957.
O'KEEFFE, V. Mathematical-musical relationships: a bibliography. *The Mathematics Teacher*, v. 65, p.315-324. 1972.
RAMEAU, J.P. *Treatise on Harmony*. New York: Dover Publications, 1971.
SADIE, S. (Ed.) *Dicionário Grove de música*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1988.
______ *The new Grove dictionary of music and musicians*. New York: Mac Millan, 1980.
WEBER, Max. *Os fundamentos racionais e sociológicos da música*. São Paulo: EDUSP, 1995.
WISNIK, J.M. *O som e o sentido: uma outra história das músicas*. São Paulo: Companhia Das Letras. 1989.

**Oscar João Abdounur**
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

**E-mail**: abdounur@ime.usp.br