Revista Brasileira de História da Matemática
Especial nº 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio – (dezembro/2007)
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES, UNA INTRODUCCIÓN

Alejandro R. Garciadiego
Universidad Nacional Autónoma de México - México
Universidad Iberoamericana (Investigador Visitante) - México

A Ubi, testigo del
mejor equipo de fútbol
de todos los tiempos,
el Botafogo de 1962.

EL INGENIOSO
HIDALGO DON QVI-
XOTE DE LA MANCHA,
Compueſto por Miguel de Ceruantes
Saauedra.
DIRIGIDO AL DVQVE DE BEIAR,
Marques de Gibraleon, Conde de Benalcaçar, y Baña-
res, Vizconde de la Puebla de Alcozer, Señor de
las villas de Capilla, Curiel, y
Burguillos
Año, 1605.
CON PRIVILEGIO,
EN MADRID Por Iuan de la Cueſta.
Vendeſe en caſa de Franciſco de Robles, librero del Rey nro ſeñor.

Imagen 1. Portada facsimilar de la primera edición de *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha* de Miguel de Cervantes Saavedra (1605).

§1. Resumen

El objetivo de este ensayo es presentar a los lectores, en especial el maestro de bachillerato, a través de lo poco que se conoce históricamente, algunos de los lineamientos generales que componen el texto más influyente en el desarrollo de las matemáticas, los *Elementos* de Euclides. Por parte del lector, no se requiere conocimiento matemático alguno. La idea subyacente es que éste se puede acercar al texto sin exponerlo, necesariamente, a desarrollos técnicos que pudieran inhibir su atención. Así, de manera subliminal, a través de la historia, pedagogía y divulgación, el estudioso estará mejor preparado para conocer las matemáticas.

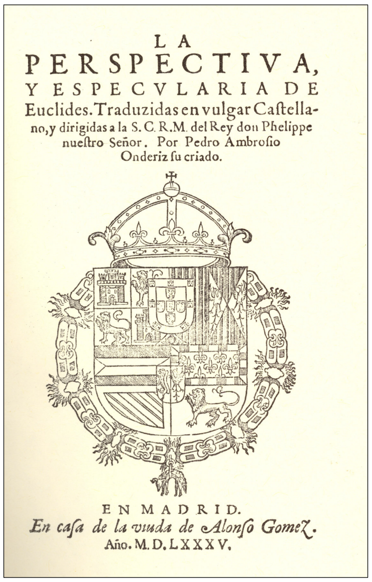
§2. Antecedentes

A lo largo de la historia, algunos libros —muy pocos— han alcanzado el calificativo de 'clásicos'. Esta distinción la han ganado porque se han mantenido vivos en el pensamiento del hombre, independientemente de las brechas y diferencias generacionales. Es decir, estas obras han sobrevivido, de manera activa, al paso inexorable del tiempo. ¿Qué las convierte en modelos a seguir? No hay recetas establecidas. Algunas de ellas fueron mal comprendidas por sus contemporáneos y pasaron, una primera etapa, sin haber llamado la

Imagen 2. Portada facsimilar del *Diálogo entre dos Sistemas Máximos* (1630). Los personajes representan a un defensor del sistema ptolemaico y a uno del copernicano, junto con un tercer individuo que juega el papel de testigo e iniciado. Poco después de la publicación del texto (1633), Galileo (1564-1642) sería forzado, por la Inquisición, a renunciar a algunas de sus ideas.

Imagen 3. Copia facsimilar de la portada de la segunda edición (1555) del *De Humani Corporis Fabrica* de Andrés Vesalio (1514 ó 1515 – 1564). La obra de Vesalio, popularmente conocida como *El Fabrica*, revolucionó la anatomía como una disciplina académica. El autor no únicamente contradecía a Aristóteles en puntos fundamentales, sino que, además, contrató a pintores profesionales para ilustrar la obra y permitir a sus alumnos continuar con sus estudios a pesar de que no presenciaran la disección.

atención. Incluso, podría darse el caso de que el propio autor no entendiera las razones del por qué una de sus obras es reconocida con este calificativo, y el resto de sus trabajos no lo sean. Irónicamente, todos desearían haber leído estos tratados, pero, sin embargo, muy pocos han tenido la disciplina para lograrlo. Leer, pero, más aun entender, los llamados clásicos es tarea ardua pues, en la mayoría de los casos, uno no está familiarizado ni con el lenguaje, ni con las ideas, ni con los argumentos, ni con las metodologías que se manejan. Tampoco son claras las razones y metas por las cuales fueron escritos originalmente. Si fuera sencillo comprenderlos, los maestros los habrían solicitado a lo largo de la formación de cada individuo.



LA
PERSPECTIVA,
Y ESPECVLARIA DE
Euclides. Traduzidas en vulgar Caſtella-
no, y dirigidas a la S. C. R. M. del Rey don Phelippe
nueſtro Señor. Por Pedro Ambroſio
Onderiz ſu criado.

EN MADRID.
En caſa de la viuda de Alonſo Gomez.
Año. M. D. LXXXV.

Imagen 4. Copia facsimilar de la portada de *La Perspectiva y Especularia* de Euclides. Esta versión completa y en español fue impresa en Madrid en 1585.

Dentro de esta categoría de libros existe una gama muy diversa: Los hay de carácter religioso (*e.g., La Biblia*, *El Corán*); los hay de naturaleza literaria (por ejemplo, *La Divina Comedia*, *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha*); y, los hay, también, de índole filosófica científica (*Diálogo entre dos Sistemas Máximos* y *El Fabrica*, entre otros). En algunas culturas, algunos de ellos son lectura obligatoria y, el grueso de la población estudiantil ha sido expuesto, al menos, a una versión simplificada de su contenido. Hoy en día, se comercializan versiones de muy variadas características: Las hay abreviadas o resumidas; infantiles e ilustradas; y encuadernadas lujosamente, entre muchas otras. Hay ediciones grabadas en cintas auditivas para que el usuario las escuche en su automóvil mientras conduce y las hay también almacenadas digitalmente para acceder a ellas a través de una computadora. Muchas de estas obras han sido inmortalizadas, de manera visual, tanto en la pantalla chica como en la grande.

Dentro de las obras de carácter filosófico/científico, y muy en particular, en torno a las ideas matemáticas, no hay duda alguna que el tratado más veces editado y comentado es uno que se hereda de la cultura griega y que se titula simplemente, *Elementos*. Se podría decir que este texto ya cumplió la mayoría de edad, pues ha circulado por casi dos mil trescientos años. No puede uno aventurar, sin temor de caer en excesos, un número tentativo de las distintas ediciones que han sido publicadas de esta obra, en el mundo occidental, a partir de la invención de la imprenta. Al menos en los últimos tres siglos y lo que va del presente, el contenido de algunos de los 'capítulos', en particular lo concerniente al estudio de la geometría plana, ha sido materia de estudio obligatoria en las escuelas elementales. Por lo tanto, a lo largo y ancho de muy variadas culturas y épocas, parte del contenido de los *Elementos* ha sido presentada en muy diversos libros de texto.

Al estar disponibles tantas versiones, es muy posible que la gran mayoría de los autores modernos, e incluso anteriores, no se vieran obligados a recurrir a la lectura directa de esta obra, y, por lo mismo, no se percataran, de manera consciente, que han sido influenciados por un libro tan antiguo. Pero, como esta obra se convirtió, desde la antigüedad, en el modelo a seguir, la mayoría de los autores de los libros de texto, aún sin proponérselo, se han apoyado en ella. Pero, entonces ¿por qué se escribe esta breve nota sobre los *Elementos* si, después de tantos siglos, ya se debería haber estudiado con sumo detalle y todo debería estar dicho sobre ella? Al lector actual, sin embargo, le sorprenderá lo poco que conocemos en torno al texto original, a pesar de su importancia, longevidad e influencia a través de los siglos. ¿Qué tanto sabemos del autor? ¿Cuáles eran los objetivos de la obra? ¿Cuáles eran sus antecedentes, tanto del creador, como de la obra?

109

LE QVATRIESME LIVRE
DES ELEMENTS D'EVCLIDE,
TRADVICT EN FRANÇOIS PAR
Pierre Forcadel de Bezies.

DEFFINITIONS.

I

La figure rectiligne ſe dit eſtre deſcrite à la figure rectiligne, quant vn chacun des angles d'icelle figure qui eſt deſcrite, touchẽt vn chacun coſté d'icelle figure, en laquelle elle eſt deſcrite.

FORCADEL.

Certainement ſi lon prent vn poinct en vn chacun coſté d'vne figure rectiligne, & on meine vne ligne droicte du premier au ſecond, vne ligne droicte du ſecõd au troiſieſme, &c. Et vne ligne droicte du dernier au premier, lon aura deſcrit en icelle vne figure rectiligne, ſelon ceſte deffinition.

2

Semblablement auſſi la figure ſe dit eſtre deſcrite à l'entour de la figure, quãt vn chacun des coſtez d'icelle qui eſt deſcrite à l'entour, touchent vn chacun angle de celle, à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

FORCADEL.

Certainement ſi lon fait paſſer des lignes droictes par tous les angles d'vne

EE

Imagen 5. Reproducción de un folio de una edición francesa de los *Elementos* donde se enuncian las definiciones del libro XIV. En algunos casos, también se refirieron a un libro XV. Sin embargo, la gran mayoría de las ediciones modernas concuerdan en que son trece libros los que componen la obra.

§3. EL AUTOR

De Euclides sabemos exageradamente poco, o, en otras palabras, ignoramos en demasía. A él se le conoce tan escuetamente que, por algún tiempo, por ejemplo cuando se realizó la primera traducción del latín al inglés de los *Elementos*, se le atribuyó la autoría del texto a un tal Euclides de Megara, la ciudad de donde supuestamente provenía. Pero este personaje no coincidía con el autor original. Este error se corrigió con el tiempo.

Imágenes 6 y 7. Alejandro Magno (-356 - -323) conquistó la mayor parte del territorio geográfico conocido en su época. Fue discípulo de Aristóteles, cuyas obras moldearon la cultura occidental por siglos. Las enseñanzas de su maestro pudieron haber influido en Alejandro para que éste fundara la ciudad de Alejandría en –332. Este localidad se convertiría en el centro cultural del mundo helénico. La ciudad albergó tres famosas construcciones: El faro, el museo y la biblioteca. Muchos mitos y leyendas se han divulgado en torno a esta última. Mucho se ha especulado acerca de la posible cantidad de pergaminos que fueron saqueados, quemados y destruidos cuando ésta fue derruida. Supuestamente, aunque Euclides no era originario de ella, pasó parte de su vida adulta en sus inmediaciones. Es posible conjeturar que haya sido ahí donde realizó su obra matemática.

Del Euclides de Alejandría (ciudad situada en el actual Egipto y que fue fundada por Alejandro Magno cuando conquistó a los persas), a quien ahora se le atribuye la obra de manera inequívoca, no conocemos los datos personales más comunes como, por ejemplo: Dónde y cuándo nació, quiénes fueron sus padres, esposa e hijos. Esta información, en la mayoría de los estudios históricos o filosóficos, podría ser irrelevante; pero en algunos, podría proveer respuestas o sugerencias a preguntas básicas. Otras interrogantes, tal vez más significativas, tampoco encuentran réplica: ¿Quiénes fueron los maestros de Euclides? ¿Dónde estudió? ¿Qué textos influyeron en él? ¿Cuál era el contenido específico de otras de sus obras?

Imagen 8. Como se carece de información confiable en torno a la vida de Euclides, no se sabe con precisión las fechas de su natalicio y muerte; por lo mismo, tampoco se conoce la posible fecha de la 'edición' del tratado. Se supone, por la madurez y complejidad del trabajo, que debió haber sido el producto de un pensador en plenitud de facultades. Se asevera, apoyados en diversas fuentes de la antigüedad, que su obra debió haber florecido alrededor del año trescientos antes de Cristo. De ser este el caso, entonces la vida de Euclides coincidió con una de las épocas más brillantes de la cultura helénica. Desde el punto de vista artístico, cultural, social y económico, esta etapa marca el momento de mayor desarrollo. *La Victoria Alada,* cuya imagen se reproduce a la derecha, es tal vez, desde el punto de vista escultórico, la obra más representativa.

Imagen 9. Las esculturas y pinturas que se conservan supuestamente de Euclides son muy posteriores a su época. No se conocen datos personales que ayuden a ubicarlo.

Lo poco que sabemos de Euclides, a través de comentarios que fueron transcritos cientos de años después de haber vivido, lo retratan como un maestro poco flexible, cuya obra debió haber florecido alrededor del año 300 antes de nuestra era, y que debió haber radicado en la ya mencionada ciudad de Alejandría. Esta fecha se puede conjeturar ya que comentarios antiguos indican que Euclides fue menor que los discípulos de Platón; pero que, por otro lado, fue mayor que Arquímedes y que fue contemporáneo al rey Ptolomeo I, quien reinó del año 304 al 285, antes de Cristo. De su famosa obra, los *Elementos*, por momentos se cuestionó, al menos, la extensión del contenido (hubo una época en que se pensó que había sido más vasta) y en otros instantes, se dudó de la autoría y originalidad del autor.

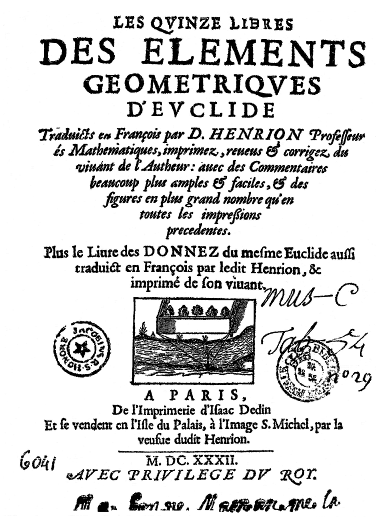

LES QVINZE LIBRES
DES ELEMENTS
GEOMETRIQVES
D'EVCLIDE
Traduicts en François par D. HENRION Professeur és Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur: auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impressions precedentes.
Plus le Liure des DONNEZ du mesme Euclide aussi traduict en François par ledit Henrion, & imprimé de son viuant.
A PARIS,
De l'Imprimerie d'Isaac Dedin
Et se vendent en l'Isle du Palais, à l'Image S. Michel, par la vefue dudit Henrion.
M. DC. XXXII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Imagen 10. Desde la antigüedad, dos anécdotas se han perpetuado en torno a la personalidad de Euclides. La primera de ellas narra que, en alguna ocasión en que se encontraba enseñando matemáticas, un joven adinerado le cuestionó en torno a la utilidad, posiblemente material, de dichos estudios. El relato afirma que Euclides se dirigió a uno de sus propios esclavos y le indicó que le entregara unas monedas a dicho estudiante, 'ya que él requería obtener algún beneficio económico de lo que estudiara'.

Algunos comentaristas lo han descrito como un 'simple' editor y, otros, incluso, han cuestionado la calidad de su labor. Pero se debe ser justo y aclarar que estos juicios, en la mayoría de los casos, han estado sustentados sobre desconocimiento de los avances matemáticos de aquella época. En particular se ha querido juzgar la obra de Euclides con criterios, apoyados en el conocimiento actual de las matemáticas, filosofía y lógica.

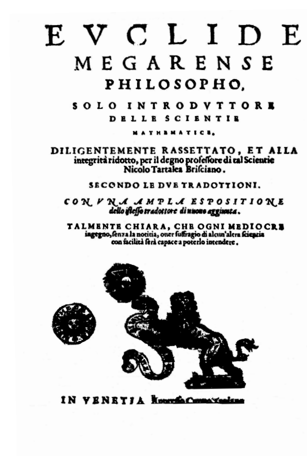

EVCLIDE
MEGARENSE
PHILOSOPHO,
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE
MATHEMATICE,
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie Nicolo Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE dello stesso tradottore di nuouo aggiunta.
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia con facilità sarà capace a poterlo intendere.
IN VENETIA

Imagen 11. Se dice que, en otra ocasión, Euclides impartía clases de geometría al Rey Ptolomeo I y que este último inquirió si no existiría un camino más fácil para estudiarla y entenderla. Ya que Ptolomeo era el Rey, bien podría concebirse un trayecto especial. Pero la respuesta de Euclides, además de negativa fue parca.

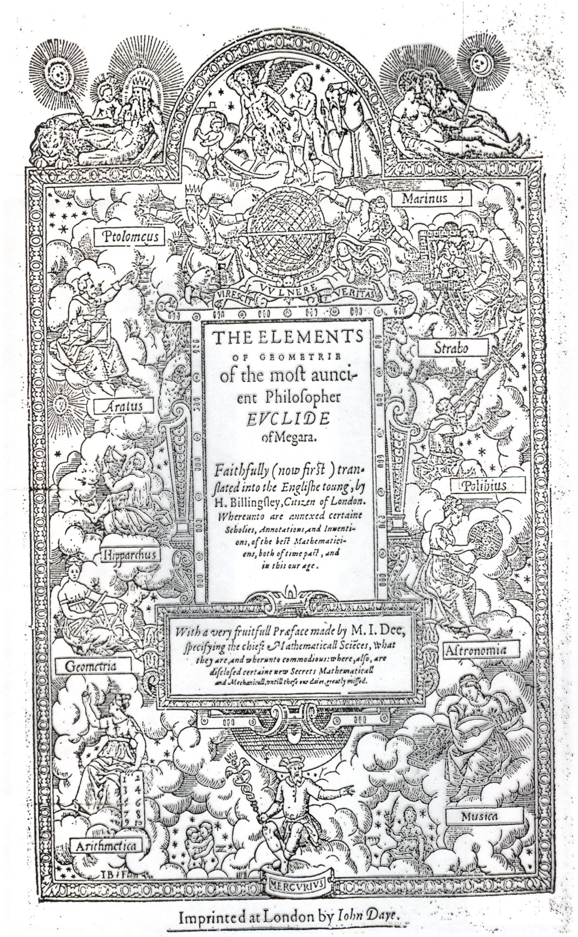


Imagen 12. Página frontal de la primera traducción al inglés de *Los Elementos* (1570). Como se puede leer en el centro de la imagen se confundía al autor con otro Euclides procedente de Megara También es posible percibir, en la parte inferior, a las cuatro ninfas que representan las cuatro ramas de las matemáticas conceptualizadas por los griegos: La Aritmética, la Geometría, la Música y la Astronomía.

Otras obras de Euclides incluyen *La Óptica*, *La Catóptrica* y *Elemetos de Música*, pero ninguna de ellas igualó la fama de los *Elementos*. Algunas se conservan completas (*e.g.*, *La dióptrica*); pero, desgraciadamente, de la mayoría de ellas sólo subsisten los títulos, por referencias contenidas en obras posteriores, en particular las de Proclo y Pappo. Cuando se cuenta con mejor suerte, entonces se conservan unos cuantos comentarios en otras obras técnicas, como son las de Arquímedes o de algunos otros alumnos de Aristóteles. Pero, para un historiador o un filósofo debería ser de primordial importancia conocer, al menos, dónde, cómo, cuándo y con quién se educó Euclides. Así se podría, al menos, sugerir o conjeturar posibles influencias y antecedentes académicos. Pero, de nuevo, ninguna de estas interrogantes encuentra una respuesta simple, concreta y exenta de polémica.

Imagen 13. Euclides representado con rasgos faciales orientales.

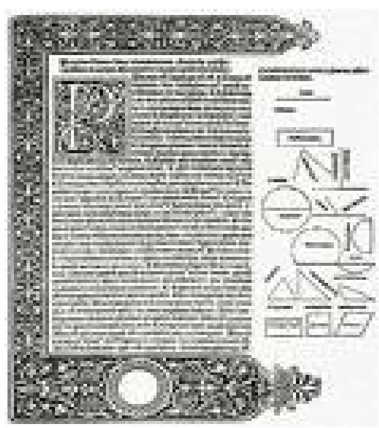


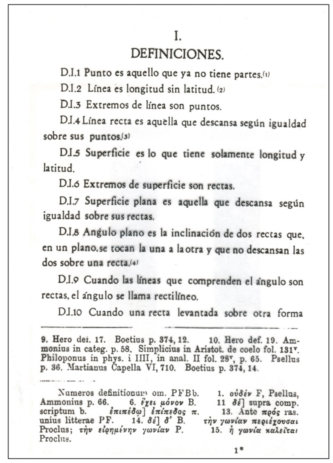
Imagen 14. Reproducción del primer folio de *Los Elementos* de la traducción del latín por Giovanni Campano de Novara e impresa en Venecia en 1482. A esta edición ya se le han agregado figuras que debieron haber sido incluidas con un propósito esencialmente didáctico.

§4. LOS *ELEMENTOS*

Antes de pretender hojear el libro, se debería preguntar cuál es el significado de su título. En muchísimas ocasiones, se cree, en primera instancia, entenderlo porque se reconocen las palabras; pero, una segunda reflexión permite ver detalles que no se habían contemplado.

En este caso, uno se podría acercar a un diccionario sin exigir en demasía a la diferencia entre la forma singular y la plural del vocablo en cuestión. Es más, en los diccionarios, en la mayoría de los casos, no aparece la forma plural, pues podría considerarse como redundante o innecesaria ya que sólo se trata de una diferencia de cantidad, entre uno y varios. Pero, hay ocasiones en que se podrían obtener significados altamente discordantes. Por ejemplo, si se toma el caso en singular (‘elemento’) es posible encontrar las siguientes interpretaciones: ‘Parte de una cosa que puede ser percibida o analizada independientemente de las demás partes constitutivas de esa cosa’; o también puede ser descrita como: ‘el componente unitario de una serie’. En la práctica, este término se usa para indicar algo que ya no puede ser dividido o descompuesto en partes más pequeñas. Piénsese en cada uno de los ‘elementos’ de química que uno se vio obligado a memorizar.

Pero, ¿existe alguna diferencia significativa entre el singular y el plural de la palabra buscada? El mismo diccionario menciona que este vocablo, en el plural, significa: ‘fundamentos, nociones, primeros principios de una disciplina’. Bajo esta segunda interpretación, el título del trabajo sugiere que discutirá la base o cimientos de alguna asignatura, en este caso, las matemáticas. Es decir, es posible que se trate de un texto donde se ordene el conocimiento matemático, de lo más sencillo a lo más complejo. Entonces, se podría cuestionar: ¿Qué entiende el autor por ‘matemáticas’? De nuevo, el texto no lo explica, pero si contiene capítulos —el autor original los llama ‘libros’— que discuten conceptos geométricos y aritméticos. Para quien se acerca por primera vez a su contenido, la obra podría parecer áspera, fría, y, en términos modernos, poco amigable. Sería deseable —aún antes de iniciar una lectura cuidadosa— revisar, aunque fuera de manera superficial, la estructura técnica del tratado. Pero no existe una tabla de contenido, o un índice de individuos o de materias, para intentar indagar cuáles son los temas que se discuten a lo largo del trabajo. No existe tampoco un prefacio, prólogo o introducción donde se advierta cuál es el objetivo del libro, o cuál es la metodología que se usará a lo largo de éste o cuáles son los antecedentes técnicos que el autor asume por conocidos, ya sean de las propias matemáticas o de otras disciplinas, como podrían ser la lógica y filosofía, sobre las que se apoya. Bueno, para colmo, el libro ni siquiera contiene una dedicatoria o algún epígrafe, por cursi, revelador o enigmático que pudiera ser, para sugerir el tipo de individuo o libro de que se trata.


I.

DEFINICIONES.

D.I.1 Punto es aquello que ya no tiene partes.(1)

D.I.2 Línea es longitud sin latitud.(2)

D.I.3 Extremos de línea son puntos.

D.I.4 Línea recta es aquella que descansa según igualdad sobre sus puntos.(3)

D.I.5 Superficie es lo que tiene solamente longitud y latitud.

D.I.6 Extremos de superficie son rectas.

D.I.7 Superficie plana es aquella que descansa según igualdad sobre sus rectas.

D.I.8 Angulo plano es la inclinación de dos rectas que, en un plano, se tocan la una a la otra y que no descansan las dos sobre una recta.(4)

D.I.9 Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.

D.I.10 Cuando una recta levantada sobre otra forma

9. Hero def. 17. Boetius p. 374, 12. 10. Hero def. 19. Ammonius in categ. p. 58. Simplicius in Aristot. de coelo fol. 131ᵛ. Philoponus in phys. i IIII, in anal. II fol. 28ᵛ, p. 65. Psellus p. 36. Martianus Capella VI, 710. Boetius p. 374, 14.

Numeros definitionum om. PFBb. 1. οὐδέν F, Psellus, Ammonius p. 66. 6. ἔχει μόνον B. 11 δέ] supra comp. scriptum b. ἐπιπέδῳ] ἐπίπεδος π. 13. Ante πρός ras. unius litterae PF. 14. δέ] δ' B. τὴν γωνίαν περιέχουσαι Proclus; τὴν εἰρημένην γωνίαν P. 15. ἡ γωνία καλεῖται Proclus.

1*

Imagen 15 Euclides parte de un conjunto de veintitrés definiciones, seguidas de dos distintos grupos de principios básicos (postulados y nociones comunes). No contiene un prefacio, prólogo o introducción que explique el propósito del trabajo.

Como ya se mencionó, no se puede asegurar, sin temor al error, cuál era el objetivo que pretendía Euclides. ¿Se trataba de un libro de texto para enseñar a sus alumnos? ¿Se trataba de una enciclopedia que recopilara el conocimiento geométrico hasta entonces conocido? ¿Se trataba de una guía que se proponía la construcción de ciertos cuerpos geométricos? ¿Se trataba de un libro dirigido a otros colegas? Las tres primeras hipótesis son las que más se han defendido en la literatura secundaria. Es lógico suponer que si ahora se usa el tratado como libro de texto, entonces también debió haberse usado así en el pasado, en particular, si se señala que, ya para el tiempo de Euclides, parte significativa de ese material se conocía desde hacía más de cien años. Otros estudiosos han señalado que el texto contiene material adicional; así que, se pudo haber pensado en incluir la totalidad del conocimiento geométrico y aritmético hasta entonces conocido. Es necesario recordar que, por aquellos años, ya se habían producido otros tratados de carácter enciclopédico (*e.g*., *Historia de las Partes de los Animales* de Aristóteles) y, pocos años más tarde, se pretendería componer obras aún más ambiciosas (por ejemplo, la *Historia Natural* de Plinio). Pero, además, el texto finaliza con la enseñanza de las herramientas matemáticas necesarias para construir ciertas figuras, llamadas 'sólidos geométricos' (véase imágenes 17 y 20), por lo que también era lógico suponer que esta era la finalidad del texto. Esta hipótesis también era fuertemente apoyada por el hecho de que se aseguraba que Euclides era un admirador de la obra filosófica de Platón, donde estas figuras eran mencionadas.

Imagen 16.. Después de la destrucción de la biblioteca, donde posiblemente se conservaba alguna copia del tratado, el conocimiento que sobrevivió se refugió en el medio oriente. Siglos más tarde, se reincorporaría al mundo occidental a través de nuevas traducciones al latín. El nuevo centro intelectual fue la ciudad de Toledo.

Sin embargo, una nueva hipótesis sugiere, apoyada en el hecho de que cierto material *(i.e.,* el 'capítulo X') aún, hoy en día, es de difícil comprensión, que este texto estaba dirigido a los matemáticos más competentes de la época. Proponer y defender esta nueva hipótesis no ha sido tarea fácil. Para poderla aventurar se requería conocer, a profundidad, no sólo la obra de Euclides (únicamente los *Elementos* incluyen alrededor de quinientos problemas matemáticos), sino la del resto de sus contemporáneos y predecesores, incluyendo, además, las obras de otros filósofos.

Los *Elementos* están divididos en trece libros. Los primeros cuatro contienen la teoría de la geometría plana, es decir, el estudio de las propiedades matemáticas de los triángulos, cuadrados y círculos, entre otros. Después siguen aquellos (V y VI) que discuten la teoría de las proporciones. Continúan los libros aritméticos (VII, VIII y IX). Los libros V y VII son, aparentemente, tan parecidos que hubo quienes pensaban que Euclides se había equivocado y había duplicado el material. El libro X, como ya se mencionó, es el más complejo, desde el punto de vista técnico de las matemáticas, y ofrece un intento por clarificar dificultades que se habían presentado desde dos siglos antes, es decir, desde el año -490, aproximadamente. Finalmente, los libros XI a XIII presentan la teoría de la geometría del espacio, es decir, discuten propiedades y la construcción de esferas, cubos y otras figuras. Bueno, pero, ¿qué hace tan especial a esta obra?

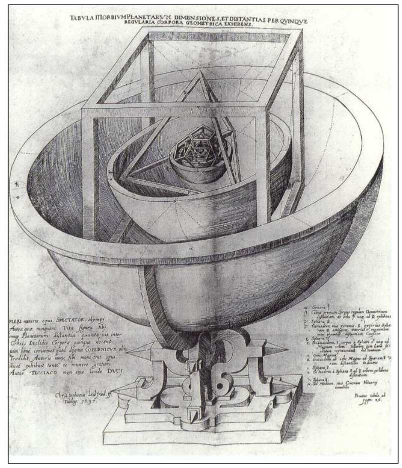


Imagen 17. Representación de los cinco sólidos geométricos. Esta imagen apareció originalmente en el *Mysterium Cosmographicum* de Kepler (1596) y con ésta, el astrónomo pretendía explicar las distancias entre los planetas.

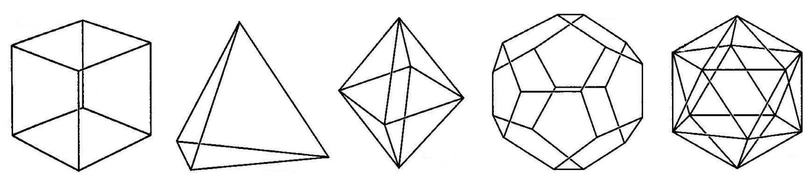
Imagen 18. Benedictus Spinoza (1632-1677) afirmaba que el conocimiento debía partir de una serie de premisas indudables para, a través de un procedimiento lógico, deducir las consecuencias. Tomó como modelo los *Elementos* de Euclides para escribir su obra cumbre *Ética* (1676).

Como también ya se había mencionado, el libro contiene poco menos de quinientas proposiciones matemáticas. Pero, no se trata de simples ejercicios particulares, como podrían estar incluidos en algún libro de texto moderno. No se trata de encontrar respuestas a problemas específicos. Cada una de las proposiciones contenidas en los *Elementos* asevera una *cualidad general* o exige *la construcción* de algún objeto o figura. Por ejemplo, si se menciona que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, esta propiedad se demuestra para *todos* los triángulos; no se toma uno en particular y se miden sus ángulos con un transportador y se verifica que sumen lo ya indicado. Como se sabe, existen millones de triángulos y sería imposible verificar, para cada uno de ellos, que ese fuera el caso. Otra proposición afirma, por ejemplo, que *todos* los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Euclides no procede a verificar caso por caso, ya que, de nuevo, habría millones, sino que diseña una estrategia para verificar que este sea la situación *en general*.

Pero, aún más importante, Euclides, voluntariamente, se impone restricciones para obtener el mayor grado de objetividad. No tendría caso editar la obra, si los lectores van a cuestionar o criticar las demostraciones presentadas por él. De inicio, sin necesidad de exteriorizarlo, los sentidos —vista, tacto, olfato, gusto y oído— están prohibidos. No se puede convencer al lector de algo porque: 'se vea muy claro'. La condición más importante es que el autor se confina a que una vez aceptadas las premisas originales, ya no podrá cambiarlas ni incorporar nuevas a lo largo del escrito. Todas las proposiciones subsiguientes tendrá que obtenerlas, necesariamente, a partir de las que ya estén incorporadas a su caudal de conocimiento. A este método de generar entendimiento se le llama 'deducción'. Este procedimiento pretende obtener una nueva conclusión a partir de conocimiento previo. Es decir, que, por medio de un razonamiento, que parte de una hipótesis y con el uso de reglas lógicas —en algunos casos llamadas de inferencia— conducen a la prueba de otra proposición. Es decir, este es el proceso de razonamiento en el que una nueva aseveración necesariamente se sigue de las premisas establecidas con anterioridad. A través del uso de este arreglo se obtienen conclusiones a partir de las proposiciones anteriores con el uso de reglas simples de lógica. En otras palabras, el acto de deducir implica obtener consecuencias de un principio, proposición o supuesto. Es necesario aclarar que Euclides no discute cuáles son sus reglas lógicas.

Imagen 19. Lavoisier (1743-1794), fuertemente motivado por la obra de Euclides, se le considera uno de los fundadores de la teoría moderna de la química al introducir métodos cuantitativos para medir con precisión los cambios en las reacciones entre los elementos.

Imagen 20. Los Cinco Sólidos Geométricos Regulares



Cubo **Tetraedro** **Octaedro** **Dodecaedro** **Icosaedro**

Así, cuando se abre el tratado, lo primero que se encuentra es una lista de veintitrés definiciones. ¿Qué es una definición? Euclides, de nuevo, no lo discute, pero se sobreentiende que es la acción de enunciar con claridad y exactitud el significado de una cosa, en este caso, objetos matemáticos, como pueden ser, entre otros: Puntos, rectas, superficies, ángulos, círculos, triángulos y así en adelante.

Enseguida aparece una lista de cinco postulados o axiomas. Una vez más, Euclides no discute qué es un postulado, pero el lector podrá interpretar dicho concepto asociado a un principio que es indemostrable y que se acepta como cierto. Este paso es fundamental. No se puede exigir que todo se 'demuestre' o 'compruebe' a lo largo del tratado. El proceso no tendría fin. Así que, en algún momento, se tiene que dar algo por supuesto o conocido y partir de ahí. El primero de los axiomas afirma que dados dos puntos, éstos se pueden unir por una línea recta. El más famoso es el quinto, también llamado el 'postulado de las paralelas', cuyo enunciado es, por un lado, tan extenso, y, por el otro, tan poco evidente y claro, que muchos lectores cuestionan su carácter. Se dice que muchos han intentado demostrarlo, a partir de los anteriores (junto con las definiciones), pero los resultados han sido en vano.

Imagen 21. Arquímedes, de acuerdo a un grabado que se conserva en la Biblioteca Nacional de Francia, fue contemporáneo de Euclides y el más creativo y original de los matemáticos de la antigüedad.

Más adelante, se enlistan cinco 'nociones comunes', así llamadas porque también se les consideran como principios evidentes, admitidos en varias disciplinas, no únicamente en matemáticas. La primera de ellas afirma que 'cosas iguales a una misma cosa, son iguales entre sí'; y, la última afirma que 'el todo es mayor que cualquiera de sus partes'.

Pero, regrésese un paso atrás. ¿Es justo criticar a Euclides por no aclarar que es definir, o qué es un postulado o una noción común? No. ¡En algún lugar tenía que empezar! Algunos principios los tenía que dar por supuestos, de otra manera se hubiera requerido un número indefinido de pasos y, por otro lado, un tratado filosófico que lo antecediera. Ahora sí, con unos cuantos instrumentos, Euclides se propone deducir el resto de las proposiciones contenidas en su tratado. La obra fue tan exitosa que, dentro de las propias matemáticas, barrió con otras posibles versiones alternativas. Por otro lado, este logro fue tan impresionante que fue imitado en muy diversas disciplinas, incluyendo la física, química, lógica y ética, entre muchas otras.

Para terminar y proporcionar un ejemplo vivo de este magnífico método, se demostrará una de las más bellas proposiciones del primer libro. La proposición I-5 afirma que: "En los triángulos isósceles (aquellos que tienen dos de sus lados iguales) los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas las dos rectas iguales, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí".

Habrá que aclarar, en primer lugar, que, a pesar que se piense que uno está muy limitado por las condiciones generales del trabajo, se tienen, a la mano, varias posibles estrategias de atacar el problema. Otra cuestión es que si la proposición en cuestión tiene más de una meta, no necesariamente se tiene que seguir el orden de presentación. En este caso en particular, se piden dos cosas. Una primera consiste en demostrar que los ángulos de la base son iguales entre sí. La segunda demanda que los ángulos situados bajo la base también serán iguales entre sí. Empecemos: Sea el triángulo ABC, un triángulo isósceles. Es decir, un triángulo donde los lados AB y AC son iguales (véase: Fig. 1).

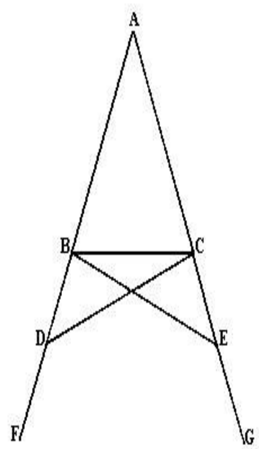


Figura 1.

Lo que se quiere demostrar es que el ángulo ABC es igual al ángulo ACB. Euclides procede de la siguiente manera. Primero, construye las herramientas que él considera fundamentales para su demostración. Por el postulado dos que afirma que cualquier línea recta puede ser prolongada, prolónguese AB hasta F.

Ahora, tómese un punto D al azar sobre AF y, por otro lado, usando el mismo postulado anterior, prolónguese la recta AC hasta G. Enseguida, con el uso de la proposición I-3 que enseña como cortar una recta sobre otra recta mayor, se corta sobre la recta AG una recta igual a la recta AD, llamémosle AE. Finalmente, para terminar la construcción, por el postulado uno que dice que dados dos puntos estos se pueden unir con una línea recta, se trazan las rectas BE y CD.

Ahora, se procede a la demostración. Como uno podrá observar, la construcción ha dado origen a cuatro nuevos triángulos: Dos que se encuentran por debajo de la base (triángulos DBC y ECB) y dos que se forman con parte del triángulo original (triángulos ABE y ACD). Ahora, se procederá a demostrar que cada pareja de nuevos triángulos son, respectivamente, iguales. Primero, por hipótesis (recuérdese que el triángulo original es isósceles), AB = AC. Segundo, por construcción, AD = AE, y el ángulo BAC es común a ambos triángulos. Pero, la proposición I-4 (recuérdese que únicamente se pueden usar proposiciones anteriores) afirma que cuando dos triángulos tienen dos de sus lados respectivamente iguales, y el ángulo comprendido entre ellos también es igual, entonces los dos triángulos son iguales (en este caso, los triángulos ACD y ABE son iguales); pero, además, el tercer lado es igual (es decir, CD = BE) y los ángulos restantes (ACD, ABE y ADC, AEB) son respectivamente iguales. En el caso de los dos triángulos restantes, los que se encuentran por debajo de la base, ahora se sabe que BE = CD y, el ángulo AEB es igual al ángulo ADC. Pero, además, por la noción común dos que dice que si a iguales (AD y AE) les quitamos iguales (AB y AC) entonces los resultados son iguales, es decir, BD = CE.

Imagen 22. A la proposición I.47 del libro I se le conoce como el *Teorema de Pitágoras.* Esta proposición afirma que, en todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. En tiempos de Euclides se pudieron haber conocido, al menos, unas cinco demostraciones diferentes y ha sido motivo de discusión entre especialistas, discernir por qué Euclides no escogió la más sencilla. En la actualidad, un texto contiene más de doscientas demostraciones diferentes, algunas, incluso, atribuidas a políticos y soldados.

Ahora, se tiene de nuevo el caso de la proposición I-4, ya que dos de los lados de los triángulos son respectivamente iguales, así como también el ángulo comprendido entre ellos. Por lo tanto, los triángulos DBC y ECB son iguales; los ángulos restantes son respectivamente iguales, es decir, el ángulo DBC es igual al ángulo ECB y el ángulo EBC es igual al ángulo BCD. Ahora únicamente falta mostrar que los ángulos de la base, los subtendidos por los lados iguales, son iguales. Pero, esto se sigue de inmediato, de nuevo, por la noción común dos, que dice que si a iguales (en este caso, el ángulo ABE es igual al ACD) se les quitan iguales (el ángulo EBC y el ángulo BCD) los resultados son iguales. En este caso, queda que el ángulo ABC es igual al ángulo ACB, que es lo que se quería demostrar.♦

Alejandro R Garciadiego
Departamento de Matemáticas, 016
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 México, D. F.
México
e-mail : gardan@servidor.unam.mx