

AS FIGURAS NOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Irineu Bicudo
Unesp - Rio Claro - Brasil

Na antiguidade e na Idade Média, o modo por excelência de abordagem de uma obra e do seu ensino era o *Comentário*. Assim, o *Comentário ao Primeiro Livro dos ELEMENTOS de Euclides*, escrito por Proclus. Como Ian Mueller assevera, tal *Comentário* “é quase certamente uma versão escrita das aulas que ele apresentava aos estudantes e associados em Atenas, na metade do quinto século” (da nossa era). “O trabalho, presumivelmente circulava entre filósofos no império romano (bizantino) e era usado como a base para as aulas de outras pessoas, do mesmo modo como Proclus se valera de várias fontes escritas na composição do seu próprio comentário. Os leitores do *Comentário* deveriam ter sempre em mente que, embora seja um trabalho de Proclus, é também um registro de uma tradição intelectual e educacional.”

Desse modo, enriquecia-se o conhecimento, pela confluência de muitos saberes – vários rios, mas uma só água.

O *Comentário* contém um *Prólogo*, em duas partes, e muito do que se conjectura como certo na história da matemática provém das suas informações. Segue um tratamento minucioso dos princípios – *definições* (ὄροι), *postulados* (ἀιτήματα), e *noções comuns* (κοινὰ ἔννοιαι) - com as objeções que lhes fizeram muitos críticos, entre os *céticos*, os *epicuristas*, com destaque, nesse último grupo, para Zenão de Sidon. Depois, inicia a parte que cabe às *proposições* do Livro I dos *Elementos*, distinguindo-as umas como *problemas* (προβλήματα) e outras como *teoremas* (θεωρήματα). Esclarece que os *problemas* são aquelas proposições que têm por objetivo produzir, trazer à vista, ou construir o que, em algum sentido, não existe, enquanto que os *teoremas* são as que visam a ver, identificar e demonstrar a existência ou a não existência de um atributo. Assim, por um lado, os *problemas* exigiriam a construção de uma figura, ou o colocá-la em um lugar, ou aplicá-la a uma outra, ou inscrevê-la/circunscrevê-la em uma outra, ou ajustá-la ou pô-la em contato com um outra; por outro lado, os *teoremas* teriam por empresa abarcar firmemente e ligar, por uma demonstração, os atributos e propriedades dos objetos que são a matéria da geometria.

Na continuação, Proclus refere-se, como já prometera no início dessa “seção”, às partes que compõem os *problemas* e os *teoremas*. A passagem em grego (e na minha tradução) é a seguinte:

(Proclus, 203.1-18)

πᾶν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπεπληρωμένον

βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ · πρότασιν, ἔκθεσιν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα. τούτων δὲ ἡ μὲν πρότεσις λέγει, τίνος δεδομένου τί τὸ ζητούμενόν ἐστίν. ἡ γὰρ τελεία πρότασις ἐξ ἄμφοτέρων ἐστίν. ἡ δ' ἔκθεσις αὐτὸ καθ' αὐτὸ τὸ δεδομένον ἀποδιαλαβοῦσα προευτρεπίζει τῇ ζητήσει. ὁ δὲ διορισμός χωρὶς τὸ ζητούμενον, ὅτι ποτέ ἐστιν, διασαφεῖ. ἡ δὲ κατασκευὴ τὰ ἐλλείποντα τῷ δεδομένῳ πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου θήραν προστίθεισιν. ἡ δὲ ἀπόδειξις ἐπιστημονικῶς ἀπὸ τῶν ὁμολογηθέντων συνάγει τὸ προκείμενον. τὸ δὲ συμπέρασμα πάλιν ἐπὶ τὴν πρότασιν ἀναστρέφει βεβαιοῦν τὸ δεδειγμένον. καὶ τὰ μὲν σύμπαντα μέρη τῶν τε προβλημάτων καὶ τῶν θεωρημάτων ἐστὶ τὸ σαῦτα: τὰ δὲ ἀναγκαϊότατα καὶ ἐν πᾶσιν ὑπάρχοντα πρόταξις καὶ ἀπόδειξις καὶ συμπέρασμα.

“E todo problema e todo teorema, o completo de partes suas perfeitas, querem ter em si todas estas: *enunciado, exposição, distinção* (ou *especificação*), *construção, demonstração, conclusão*. E dessas, o *enunciado* diz o que é o procurado do que é dado. Pois o *enunciado* perfeito é de ambos. E a *exposição*, tendo separado o dado, apronta-o, a ele mesmo, de antemão, para a investigação. E a *determinação* torna bem claro, separadamente, o procurado, o que enfim é. E a *construção* adiciona as coisas faltantes ao dado para a ávida perseguição do procurado. E a *demonstração* deduz cientificamente o proposto a partir das coisas acordadas. E a *conclusão* retorna de novo ao enunciado, afirmando o demonstrado. E todas as partes juntas tanto dos problemas quanto dos teoremas são tais; mas as mais necessárias, existentes em todos, são *enunciado e demonstração e conclusão*.”

Embora enfatize como essenciais o *enunciado*, a *demonstração* e a *conclusão*, parece-me ser a *construção* o cerne das proposições. É a partir dela, é tendo-a sempre sob a vista, que a *demonstração* se faz. Pois bem, há na *construção* um singular uso lingüístico. Em todos os Livros dos *Elementos*, a única forma verbal que se encontra nessa parte das proposições, desde que o verbo em pauta a admita, é o *imperativo perfeito passivo* (inexistente em português).

O *imperativo* entende-se porque um comando é dado: aquele de ligar dois pontos distintos ou o de traçar uma perpendicular a uma reta (segmento) dada ou o de prolongar certa reta (segmento), etc. A *voz passiva* explica-se pelo fato de os objetos matemáticos sofrerem a ação do comando dado pelo *imperativo*: os pontos *são ligados*, a perpendicular *é traçada*, a reta dada *é prolongada*, etc. Resta dar conta do uso do *perfeito*, que é o coração da argumentação proposta: a importância da figura nas proposições dos *Elementos*. Para isso, é necessário recorrer-se aos temas verbais do grego clássico.

O sistema do verbo indo-europeu era muito complexo. Nele, mais do que uma “conjugação” sistemática, apresentavam-se temas verbais independentes: os temas verbais pertencentes a uma mesma raiz existiam cada um à parte, não estando ligados entre si por qualquer relação necessária.

Todas as línguas o simplificaram no curso do seu desenvolvimento, cada uma ao seu modo. Tanto as formas diferem muito de uma língua à outra quanto as categorias expressas. Mas aquele estado de coisas subsistiu largamente no grego, particularmente na língua homérica. No ático mesmo, nenhuma das formações permite prever qualquer uma das

outras, por exemplo, em *πάσχω*, futuro *πέισομαι*, aoristo *ἔπαθον*, perfeito *πέπονθα*, embora todos os temas sejam tirados de um mesmo radical *πενθ-*, *πονθ-*, *παθ-*.

Desse modo, embora remontem a um mesmo original indo-europeu (a menos de algumas diferenças que são de origem dialetal no próprio indo-europeu), o verbo grego e o latino, por exemplo, são muito diferentes, mais do que o são o substantivo/adjetivo/pronome.

No tocante a verbos, há dois elementos a considerar: o tema verbal e a sua flexão.

Os temas verbais do indo-europeu eram radicais *uns-* a maioria- e derivados de formas existentes na língua- quer nominais quer verbais- os outros. Cada tema tem a sua autonomia. Os verbos derivados só comportam o tema do presente.

Podem-se distinguir os temas verbais em *temas temporais* e *temas modais*.

Os *temas temporais*, que aqui nos interessam, não *exprimem propriamente o tempo*. Definem-se antes pela consideração de um *aspecto de duração*. Na medida em que o tempo era expresso, era-o pela flexão e, em certas línguas, pelo aumento.

Os três temas essenciais são o *presente* (o *futuro* sendo originalmente um caso particular do *presente*), o *aoristo*, e o *perfeito*: a esse respeito, o grego é mais arcaico do que o latim, que conhecia apenas a oposição entre *infectum* e *perfectum*

O *presente* indica um processo em curso de desenvolvimento; o *aoristo*, um processo puro e simples, abstração feita a toda consideração de duração. O *perfeito*- uma forma atemática que parece muito original e arcaica- exprime propriamente um *estado presente resultante de uma ação passada*. Então, em face do *presente* e do *aoristo*, o *perfeito* indica o *processo acabado e o que disso resulta*.

Dessa maneira, o uso por Euclides, na *κατασκευή*, com exclusividade do *imperativo perfeito passivo* assinala que o comando dado, relativamente aos objetos matemáticos, foi executado e o seu resultado, *obtido: a figura*. Ela é o ponto de apoio para a *απόδειξις* que segue.

Bibliografia

- (1)Bicudo, Irineu, Os *Elementos* de Euclides, Volume I: Introdução e Tradução diretamente do grego; Volume II: Guia de Leitura- Notas e Comentários, a aparecer.
- (2)Chantraine, Pierre, *Morphologie Historique du Grec*, 2e. édition, Paris, Librairie Klincksieck, 1961.
- (3)Meillet, A. e J. Vendryes, *Traité de Grammaire Comperée des Langues Classique*, 5e. édition, paris, Honoré Champion, 1979.

<p>Irineu Bicudo Departamento de Matemática - IGCE Unesp – campus de Rio Claro Rio Claro – São Paulo - Brasil</p> <p>E-mail: ibicudo@rc.unesp.br</p>
--