Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 41 - 59
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

Antonio Conde

USP - Brasil

1. O terceiro problema de Hilbert

Dos vinte e três problemas que D. Hilbert apresentou no Congresso Internacional de 1900, em Paris, o terceiro problema, que apresentaremos logo mais, foi o primeiro a ser resolvido meses depois, por um de seus orientados, Max Dehn. Dada esta solução rápida, deste problema, que é sobre poliedros e portanto considerado como próprio da geometria elementar, o mesmo foi por muito tempo, considerado como um problema que não tinha o mesmo estatus que os demais. Tal impressão vem mudando uma vez que o mesmo vem dando origens a desenvolvimento relevantes em outras áreas da matemática e criando novos problemas ainda abertos.

Nosso objetivo nestas notas não inclui exposições destes desenvolvimentos a que acabamos de nos referir. Queremos aqui, apenas explicitar os elementos (conceitos) envolvidos e a forma de sua solução como aperfeiçoada por autores posteriores à solução de Max Dehn.

Para entendermos o terceiro problema de Hilbert, o tipo de preocupação envolvida, que tem uma natureza de fundamentação, precisamos esclarecer inicialmente o que se entende, em geometria elementar, por "método de exaustão".

Tal método foi descoberto na Grécia, por Eudoxus de Cnidus (408-355 A.C.) e usado pelo mesmo e por Arquimedes (que o atribuiu a Eudoxus). O método consiste em se usar o seguinte axioma:

"Dados duas quantidades $U < V$ se removermos, pelo menos metade de V e em seguida, pelo menos, metade do restante e procedermos igualmente continuamente, chegaremos a uma quantidade menor que U".

Este é chamado de "axioma da continuidade" que tem uma forma equivalente proposta por Arquimedes é conhecido agora como o "axioma de Arquimedes": Dadas duas quantidades de A e B, existe um múltiplo (natural) de A que excede B, isto é existe um natural n tal que $nA > B$.

Para ilustrarmos o método de exaustão, vamos decompor uma pirâmide em partes de volumes conhecidos e de restantes que podem igualmente serem decompostos. A Figura 1 abaixo mostra a decomposição de uma pirâmide de base triangular, em partes que são duas pirâmides iguais A e B semelhantes à original e dois prismas C e D. Os vértices das componentes foram escolhidos de modo a serem pontos médios das arestas originais.

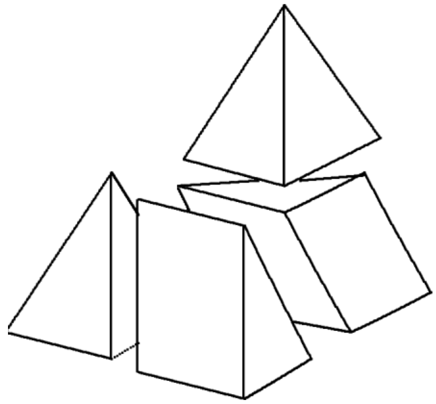

Fig. 1

Como as duas pirâmides são semelhantes à original, podemos continuar o processo de subdivisão produzimos quatro prismas e quatro pirâmides, semelhantes às anteriores. Este procedimento pode ser repetido indefinidamente. Temos agora a situação em que se pode usar o método de exaustão, para mostrar que os volumes de duas pirâmides de alturas iguais estão na mesma razão que as áreas de suas bases. Como conseqüência, tiramos que se as bases tem a mesma área, os volumes são iguais.

Este método nos permite demonstrar então o

Teorema 1.1 (Eudoxus) *Duas pirâmides de bases triangulares e mesmas alturas têm seus volumes na mesma razão das áreas das bases.*

Demonstração: Sejam P_1 e P_2 as pirâmides triangulares de mesmas alturas, V_1 e V_2 seus respectivos volumes e B_1 e B_2 as respectivas áreas das bases. Devemos mostrar que

$$V_1 \div V_2 = B_1 \div B_2$$

Por contradição, suponhamos que não sejam iguais. Então deve existir um valor W tal que

$$B_1 \div B_2 = V_1 \div W$$

Sendo $W \notin V_2$. Suponhamos que $W < V_2$. Podemos pelo processo anterior subdividirmos P_2 até que o volume das pirâmides remanescentes seja menor do que $V_2 - W > 0$ (usando o axioma de continuidade). Então

$$V_2 > (volume\ dos\ prismas\ em\ P_2) > W$$

Fazendo o mesmo com P_1 chegamos a

(volume prismas em P_1) $\div$ (volume prismas em P_2) = $B_1 \div B_2$

Por hipótese $B_1 \div B_2 = V_1 \div W$ e portanto

(volume prismas em $P_1) \div V_1 = (volume\ prisma\ em\ P_2) \div W$.
Mas chegamos assim a uma contradição pois (volume prismas em $P_1) < V_1$.
Portanto, devemos ter (volume prisma em $P_2) < W$.
Sabemos, por construção que (volume prismas em $P_2) > W$.
Portanto, a suposição $W < V_2$ deve ser falsa.
Uma contradição similar é produzida pela suposição $W > V_2$. Assim sendo $W = V_2$ e temos a tese.

O método de Eudoxus foi algo surpreendente e superlativo. Entretanto, apesar de ser engenhoso e criativo e de evitar um cálculo que não tenha fim, ele tem um inconveniente, antes de ser aplicado, é preciso que se saiba a fórmula final. A resposta tem de ser conhecida antecipadamente. Ele não produz uma resposta.

A insatisfação com este método aparece em cartas de Gauss a Gerling. Ele expressa seu desconforto com certas demonstrações da geometria espacial que dependem do método da exaustão (em linguagem moderna "que dependem do axioma de Arquimedes"). Gauss menciona explicitamente o Teorema 1.1, de Eudoxus que aparece nos Elementos de Euclides.

O problema análogo no plano, estava resolvido. Gauss diz: é nossa obrigação provarmos que não conseguimos fazê-lo sem o método da exaustão ou axioma de Arquimedes, referendo ao Teorema 1.3.

O método de exaustão não se faz necessário na geometria plana quando lidamos com as regiões poligonais, que chamaremos apenas de polígonos (a curva com seu interior).

Dois polígonos de mesma área, P_1 e P_2 são equidecomponíveis, o que quer dizer que podemos decompor P_1 (cortá-lo em pedaços poligonais) e remontar as partes de forma a se obter P_2, ou dito de outra forma, podemos decompor P_1 em polígonos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ e P_2 em polígonos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ de modo a termos A_i congruente a B_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Na Figura 2 abaixo mostramos a decomposição de um triângulo e de um pentágono que, remontado produz um quadrado, de mesma área

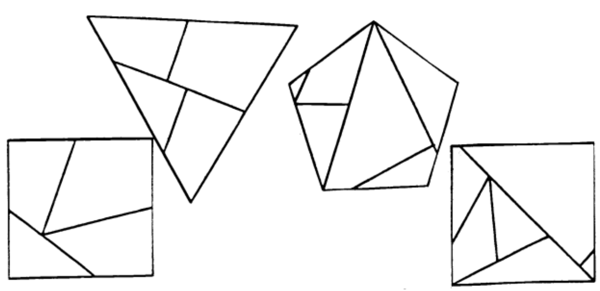

Fig. 2

Como um polígono pode ser decomposto em triângulos, basta mostrarmos como passar de um triângulo genérico para um retângulo com um lado escolhido. A Figura 3 abaixo fala por si só. (Fig. 3).

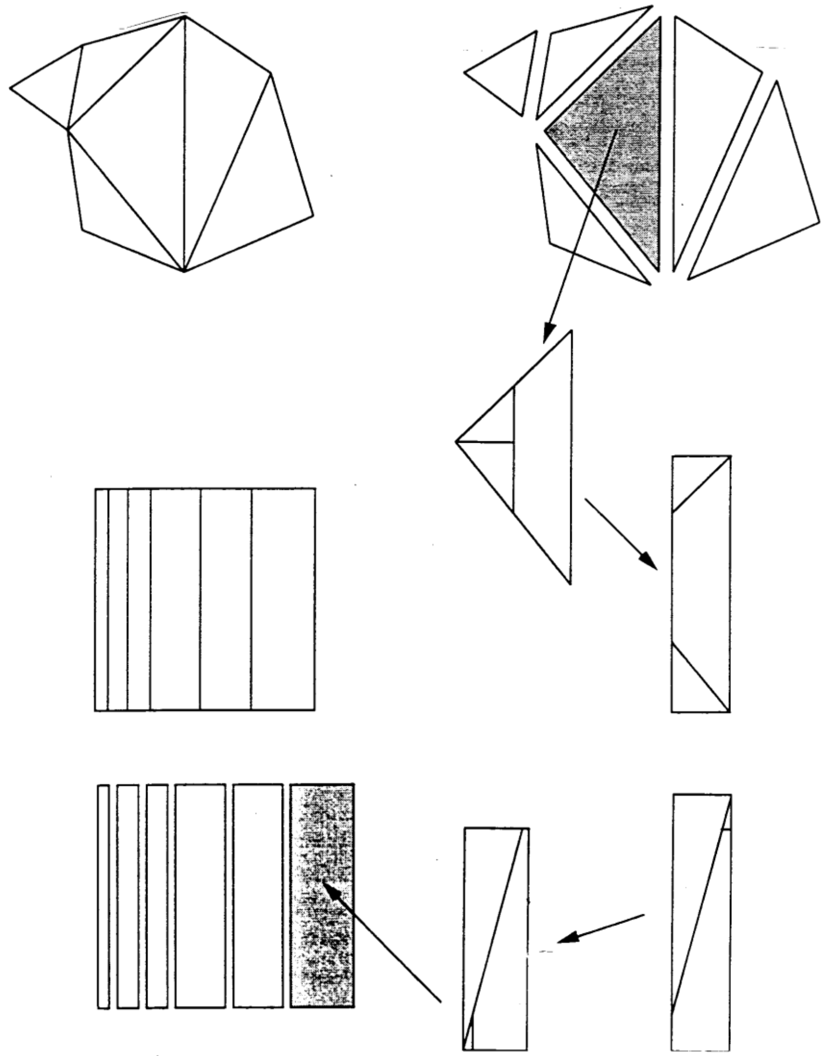

Fig. 3

Com este processo podemos ir transformando os triângulos de uma decomposição de um polígono em retângulos que finalmente, compõem um quadrado.

Dados dois polígonos de mesma área, como ambos podem ser transformados num mesmo quadrado, podemos transformá-los entre si (aqui aparece a necessidade de usarmos um refinamento de duas decomposições do quadrado)!

Esta é uma forte razão para Gauss e Hilbert quererem saber da necessidade do método de exaustão para a comparação de poliedros no espaço euclidiano.

A relação entre polígonos de mesma área, determinada por decomposição e remontagem ou equidecomposição, é uma relação de equivalência (a transitividade faz uso de refinamento de duas decomposições de um mesmo polígono). O que mostramos, logo acima, é que numa condição necessária e suficiente para que polígonos P_1 e P_2 sejam equivalentes e que tenham a mesma área.

Denotamos tal relação de equivalência por

$$P_1 \sim P_2$$

Podemos definir uma outra relação entre P_1 e P_2 a que chamaremos de estavelmente equivalentes, assim:

$P_1 \approx P_2 \Longleftrightarrow$ existe polígonos Q_1 e Q_2, $Q_1 \sim Q_2$, Q_i e P_i com interiores disjuntos e $P_1 \cup Q_1 \sim P_2 \cup Q_2$.

$\approx$ é também uma relação de equivalência.

Podemos demonstrar que estas relações $\sim$ e $\approx$ são de fato as mesmas, mas vale aqui chamar atenção para o fato de que tal demonstração sempre envolverá de alguma forma, o axioma de Arquimedes.

Se dispensarmos o axioma de Arquimedes na geometria plana, tal demonstração não é possível, há contra exemplo, veja [Hilbert F.G. pg 61].

O terceiro problema de Hilbert é essencialmente a pergunta de se é possível fazer uma teoria de volumes para poliedros ao espaço tridimensional semelhante ao que se tinha para polígonos no plano. Em caso positivo poder-se-ia eliminar o desconfortável método da exaustão. Entretanto nem Gauss nem Hilbert achavam que isto seria possível. O terceiro problema de Hilbert colocava de fato a necessidade de se procurar um contra exemplo. Especificamente: Achar dois tetraedros de bases iguais e alturas iguais que não se relacionem por $\sim$ ou por $\approx$, isto é, que não admitem decomposições congruentes, mesmo depois de se juntar a ambos poliedros que admitam.

Tal problema foi resolvido por Max Dehn [2] alguns meses depois do problema ser posto.

O trabalho de Dehn estendeu e aperfeiçoou trabalho anterior de Bricard [1].

O seguinte par de tetraedros A e B constituem um contra exemplo, isto é, eles não são equidecomponíveis.

$A =$ invólucro convexo de $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$B =$ invólucro convexo de $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$

Eles têm ambos volume 1/6 mas não são equivalentes por decomposição.

Para solução do presente problema, Dehn definiu um invariante associado a poliedros que é invariante por decomposição e remontagem, ou seja, é o mesmo para poliedros equidecomponíveis.

O invariante de Dehn, para um poliedro P é definido assim: Denotemos o grupo dos ângulos entre retas, por $\triangle \equiv \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$.

Seja $\Gamma = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \triangle$ e temos

$$D(P) = \sum_{i=1}^{r} |L_i| \otimes \delta_i$$

onde $L_1, L_2, \ldots, L_r$ são todas as arestas de P, $|L_i|$ é o comprimento de L_i e δ_i é o ângulo diedral formado pelas duas faces de P que tem a aresta L_i em comum.

O invariante de Dehn toma valores em

$$\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

Observe que $(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ se identifica naturalmente com a reta real projetiva que é topologicamente homeomorfa ao círculo unitário S^1.

$$D : \mathcal{P} \to \Gamma$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto dos poliedros de $\mathbb{R}^3$ e valem

1. $D(P_1) = D(P_2)$ se P_1 e P_2 são congruentes.

2. $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$ se P_1 e P_2 formam uma decomposição de P, isto é, $P = P_1 \cup P_2$, P_1 e P_2 com interiores disjuntos.

Para os tetraedros apresentados acima A e B, temos $D(A) \neq 0$, $D(B) = 0$.

Observações: Esta formulação do invariante envolvendo o produto tensorial não é o original de Dehn e sim aparecem em Nicolletti [7]. No caso plano, polígonos, o invariante que decidia era apenas a área dos polígonos. No caso espacial poliedros, o volume não basta é necessário também o invariante de Dehn.

Dehn provou que poliedros equidecomponíveis tem o mesmo invariante. A recíproca deste teorema foi obtida por J.P. Sydler em 1965[8].

Assim então podemos enunciar o

Teorema 1.2 *Dois poliedros P_1 e P_2 de mesmo volume são equivalentes por decomposição se e somente se*

$$D(P_1) = D(P_2)$$

Dehn se expressou da seguinte maneira. Se $L_1, \ldots, L_r$ são todas as arestas do poliedro P e $\delta_i, \ldots, \delta_r$ seus ângulos diedrais, sejam $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ juntamente com π ângulos independentes sobre os racionais $\mathbb{Q}$. Pomos

$$\delta_i = r_{io}\pi + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\gamma_j \qquad i = 1, \ldots, r$$

Dehn demonstrou que se P é um cubo então

$$\sum_{i=1}^{s} r_{ij}|L_i| = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

Como estas mesmas condições não são satisfeitas pelo tetraedro regular então o mesmo não é equivalente a um cubo! .

O leitor que quiser ter mais detalhes técnicos sobre o Teorema de Dehn deve continuar a leitura.

Seguiremos agora, bem de perto a referência Borg Jessen [6]. Mesmo assim alguns pontos serão apenas indicados.

A álgebra dos poliedros tem suas origens no tratamento de volume de poliedros de Euclides.

Dehn havia introduzido o invariante que já descrevemos e provado que o mesmo é invariante por decomposição e remontagem de poliedros, mas não demonstrou que o mesmo é fiel, isto é, poliedros com o mesmo invariante são equivalentes como acima.

Esta recíproca foi conseguida por Sydler em 1965.

Sydler foi aluno de H. Hopf, que reavivou o interesse por tal problema e o progresso veio por seus alunos particularmente Sydler que começou a trabalhar no mesmo em 1943, concluindo o mesmo em 1965, obtendo então o resultado:

"Dois poliedros são equivalentes (como descrevemos acima) se e somente se eles tem o mesmo invariante de Dehn".

Para um tratamento detalhado e resultados básicos remetemos o leitor ao livro de Hadwiger [3].

Por grupo dos poliedros $\mathcal{P}$ no espaço tridimensional queremos dizer o grupo abeliano livre gerado pelos poliedros (fechados e não degenerados).

Um poliedro P é dito composto dos poliedros $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ou ser decomposto neles se

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$$

e os interiores dos P_i forem disjuntos.

Um poliedro Q é dito congruente ao poliedro P se existe um movimento rígido (próprio) t, do espaço tal que $tP = Q$.

Denotamos por ε o subgrupo de $\mathcal{P}$ gerado pelos elementos $P - P_1 - P_2 - \cdots - P_n$ onde P se decompõe nos P_i e mais todos os elementos P-Q onde Q é congruente a P. Se

X e Y são elementos de $\mathcal{P}$, dizemos que X é equivalente a Y se $X - Y$ pertence a ε. Assim, as classes de equivalência são os elementos do grupo quociente $\mathcal{P}/\varepsilon$.

Um poliedro Q é dito simétrico do poliedro P se existe um movimento rígido não próprio t tal que $t(P) = \mathbb{Q}$. Há um resultado que diz:

"Se P e Q são poliedros simétricos então são equivalentes".

A idéia na demonstração deste é decompor um deles em poliedros auto-simétricos.

Por vol: $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$ denotamos o homomorfismo de $\mathcal{P}$, no grupo aditivo dos reais $\mathbb{R}$ cujo valor num poliedro P é seu volume. Obviamente, vol. é sobrejetivo e se anula no subgrupo ε e portanto passa ao quociente.

$$\text{vol: } \mathcal{P}/\varepsilon \to \mathbb{R}$$

Assim a condição $\text{vol } X = \text{vol } Y$ é necessária para a equivalência de X e Y. Um resultado clássico diz que esta condição é também suficiente para prismas.

Se P e Q são prismas então $\text{vol } P = \text{vol } Q$ implica que P é equivalente a Q.

Tal fato decorre do caso plano com polígonos e mais algum esforço.

Denotemos por $\mathcal{F}$ o subgrupo de $\mathcal{P}$ gerado por ε e os prismas. Se X e Y estão em P, dizemos que X é equivalente a Y módulo prismas se X-Y está em $\mathcal{F}$. Assim as classes de equivalência formam o grupo quociente $\mathcal{P}/\mathcal{F}$.

Denotamos por $\mathcal{G}$ o núcleo de vol.

Pelo resultado que informamos acima, que prismas de mesmo volume são equivalentes, segue que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \varepsilon$. Assim o grupo $\mathcal{P}/\varepsilon$ aparece como soma direta de $\mathcal{F}/\varepsilon$ e $\mathcal{G}/\varepsilon$; a restrição de $\text{vol: } \mathcal{P}/\varepsilon \to \mathbb{R}$ a $\mathcal{F}/\varepsilon$ é um isomorfismo e a aplicação de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ em $\mathcal{G}/\varepsilon$ que leva cada elemento de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ em sua interseção com $\mathcal{G}$ é um isomorfismo. Em particular temos:

Teorema 1.3 *Dois elementos X e Y de $\mathcal{P}$ são equivalentes se e só se $\text{vol } X = \text{vol } Y$ e X e Y são equivalentes módulo prismas.*

Um poliedro Q é semelhante ao poliedro P na razão $\lambda > 0$ se existe uma semelhança t de razão λ, no espaço tal que $t(P) = Q$.

Se P é um poliedro e λ e μ são reais positivos e Q, R e S são poliedros semelhantes a P nas razões λ, μ e $\lambda + \mu$ então S é equivalente módulo prismas a $Q + R$. Concluímos daí que existe em $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ uma única multiplicação por escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ que torna o grupo $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ num espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, tal que se x é a classe contendo o poliedro P e $\lambda > 0$ então $\lambda\, x$ é a classe contendo o poliedro semelhante a P na razão λ.

Consideremos agora o grupo aditivo $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ e o produto tensorial

$$\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

temos neste uma multiplicação por escalares reais assim

$$\lambda(\ell \otimes \alpha) = (\lambda\ \ell) \otimes \alpha$$

que torna $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O clássico argumento de Dehn agora pode ser apresentado assim:
Seja $\triangle$ o homomorfismo de grupo de $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ cujo valor no poliedro P é

$$\triangle(P) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell_i \otimes \alpha_i$$

onde ℓ_i são as arestas de P e α_i é correspondente ângulo diedral (interno) das faces de P com ℓi em comum. $\triangle$ se anula em $\mathcal{F}$ e portanto produz um homomorfismo

$$\delta : \mathcal{P}/\mathcal{F} \to \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$$

δ é de fato um homomorfismo de espaços vetoriais, isto é, δ é linear. Se $x : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/\mathcal{F}$ é a aplicação quociente temos que

$$\triangle = \delta \circ x$$

Assim a condição $\triangle(X) = \triangle(Y)$ é necessária para a equivalência módulos prismas de X e Y.

Assim sendo temos o

Teorema 1.4 (Dehn-Sydler) *Dois elementos X e Y de $\mathcal{P}$ são equivalentes, módulo prismas se e só se $\triangle(X) = \triangle(Y)$.*

Sejam X e Y pertencentes ao subgrupo de $\mathcal{P}$ gerado por $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e $\{\pi, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ um conjunto finito de números reais que seja linearmente independente sobre Q e de modo que todos os ângulos ξ diedrais de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sejam combinações $\xi = \rho\,\pi + \rho_1\,\beta_1 + \cdots \rho_s\,\beta_s$ com coeficientes racionais. Então encontramos para $\triangle(X)$ e $\triangle(Y)$ expressões da forma

$$\sum_{\sigma=1}^{s} p_\sigma \otimes \beta_\sigma \quad \text{e} \quad \sum_{\sigma=1}^{s} q_\sigma \otimes \beta_\sigma$$

em que os números p_σ e q_σ são combinações lineares, com coeficientes racionais das arestas de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Como $1 \otimes \beta_1, 1 \otimes \beta_2, \ldots, 1 \otimes \beta_s$ são elementos independentes do espaço vetorial $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}\pi\mathbb{Z})$, a condição $\triangle(X) = \triangle(Y)$ é equivalente as condições $p_1 = q_1, \ldots, p_s = q_s$.

Exemplos clássicos são fornecidos pelos poliedros regulares. Denotando por T,O,D,I respectivamente os tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro com aresta de comprimento 1 e por α_T, α_O, α_D e α_I seus respectivos ângulos diedrais, temos

$$\cos\ \alpha_T = \frac{1}{3}\,,\ \cos\ \alpha_O = \frac{-1}{3}\,,\ \cos\ 2\alpha_D = -\frac{3}{5}\,,\ \cos\ 2\alpha_I = \frac{1}{9}\,.$$

Admitindo o resultado conhecido de que os únicos ângulos α para os quais ambos $\cos\alpha$ e α/π são racionais são aqueles para os quais $2\cos\alpha$ é inteiro, segue que

$$\triangle(T) = 6 \otimes \alpha_T, \triangle(O) = 12 \otimes \alpha_0$$

$$\triangle(D) = 30 \otimes \alpha_D, \triangle(I) = 30 \otimes \alpha_I$$

são não nulos. Então o resultado de Dehn mostra que T, O, D, I não são equivalentes a prismas.

Como $\alpha_T + \alpha_O = \pi$ temos que $\triangle(2T + O) = 0$.

Logo pelo resultado de Sydler $2T + O$ é equivalente a um prisma. Lebesque notou [9] que o conjunto $\{\pi, \alpha_T, \alpha_O, \alpha_D, \alpha_I\}$ é linearmente independente sobre os racionais $\mathbb{Q}$.

Consequentemente $\triangle(T), \triangle(O), \triangle(D), \triangle(I)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$.

Por Dehn, os elementos de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ contendo T, D, I são linearmente independentes.

A dimensão do espaço vetorial $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ e consequentemente ≥ 3.

O resultado de Sydler significa que a aplicação δ é injetiva e é portanto equivalente ao seguinte

Teorema 1.5 *Para cada aplicação linear* $\tau : \mathcal{P}/\mathcal{F} \to \mathcal{V}$ *de* $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ *num espaço vetorial arbitrário* $\mathcal{V}$ *sobre* $\mathbb{R}$, *existe uma aplicação linear* $\Phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \to V$ *tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
\mathcal{P}/\mathcal{F} \arrow[dr, dash, "\tau"'] & & \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\ \mathbb{Z}) \arrow[dl, dash, "\phi"] \\
 & \mathcal{V} &
\end{tikzcd}$$

Na verdade, o resultado de Sdler é equivalente à existência de Φ no caso $\mathcal{V} = \mathcal{P}/\mathcal{F}$ e τ a aplicação identidade $\tau(x) = x$. Trabalharemos entretanto com $\mathcal{V}$ arbitrário.

A demonstração do Teorema 1.5 é precedida de três lemas geométricos e depois o restante é puramente algébrico.

Sejam a e b dois números no intervalo (0,1) e α e β ângulos no intervalo $(0, \pi/2)$, determinados por $\operatorname{sen}^2\alpha = a$, $\operatorname{sen}^2\beta = b$. Denotamos por $\alpha * \beta$ o ângulo em $(0, \pi/2)$ determinado por $\operatorname{sen}^2(\alpha * \beta) = ab$.

A composição $\alpha * \beta$ é comutativa e associativa.

Seja agora $T(a, b)$ qualquer tetraedro ABCD em que as arestas $AB = \cot \alpha$, $BC = \cot \alpha . \cot \beta$, $CD = \cot \beta$ sejam ortogonais. Portanto dois tetraedros T(a,b) ou são congruentes ou simétricos e portanto são equivalentes. Os ângulos diedrais em AB e CD são α e β. O ângulo diedral em AD é $\frac{\pi}{2} - \alpha * \beta$ e em $AD = \cot(\alpha * \beta)$. Os ângulos remanescentes são retos. Daí

$$\triangle T(a, b) = (\cot \alpha) \otimes \alpha + (\cot \beta) \otimes \beta - (\cot(\alpha * \beta)) \otimes (\alpha * \beta)$$

Para o volume de T(a,b) temos

$$\text{vol } T(a, b) = v(a) + v(b) - v(ab)$$

onde v é a função dada por $v(u) = \dfrac{u - 1}{6u}$

Agora sejam a,b,c números em (0,1) e α, β, γ ângulos em $(0, \pi/2)$ determinados por

$$\operatorname{sen}^2\alpha = a, \operatorname{sen}^2\beta = b, \operatorname{sen}^2\gamma = c$$

e pomos

$$X = T(a, b) + T(ab, c)$$

$$Y = T(a, c) + T(ac, b)$$

Encontramos que

$$\text{vol } X = v(a) + v(b) + v(c) - v(abc) = \text{vol } Y$$

$$\Delta(X) = (\cot \alpha) \otimes \alpha + (\cot \beta) \otimes \beta) + (\cot \gamma) \otimes \gamma - (\cot(\alpha * \beta * \gamma)) \otimes (\alpha * \beta * \gamma) = \Delta(Y)$$

Assim X e Y satisfazem as condições dos Teoremas 1 e 2. O Lema fundamental diz que eles são equivalentes.

Lema 1..1 *Para quaisquer a,b,c um (0,1) os elementos*

$$T(a, b) + T(ab, c) \ \text{ e } \ T(a, c) + T(ac, b) \text{ de } \mathcal{P} \text{ são equivalentes.}$$

Como os volumes são iguais, é suficiente mostrar que tais elementos são equivalentes módulo prismas; o que é feito inspecionando figuras.

Lema 1..2 *Para quaisquer* a, b, c *reais positivos os elementos*

$$aT(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b}) + bT(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{b}{a+b})$$

e

$$aT(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{a}{a+c}) + cT(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{c}{a+c})$$

de $\mathcal{P}$ *, são equivalentes.*

A demonstração, como no caso anterior é por inspeção de figuras. Constrói-se um tetraedro e percebe-se que este se decompõe na primeira como na segunda soma.

Lema 1..3 *Para três ângulos* ξ, η, ζ *em* $(0\ , \ \frac{\pi}{2})$ *com soma* π *existe um paralelepípedo retangular* R *com diagonais* AB, CD, EF, GH *tais que os ângulos diedrais em* AB *dos seis pares de tetraedros simétricos do tipo* $\lambda T(a, b)$ *em que* R *é decomposto pelos planos ABCD, ABEF, ABGH são* $\xi,\ \eta,\ \zeta$.

Voltamos agora à demonstração do Teorema 1.3.

Seja X um espaço vetorial qualquer sobre $\mathbb{R}$ e $\tau : \mathcal{P}/\mathcal{F} \to V$ uma aplicação linear.

Devemos provar a existência de uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}\pi\mathbb{Z}) \to \mathcal{V}$ tal que

$$\tau \circ \chi = \phi \circ \triangle$$

Se ϕ é linear de $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ em $\mathcal{V}$, a função $\varphi : \mathbb{R} \to V$ definida por $\varphi(\xi) = \phi(1 \otimes \xi)$ satisfaz as condições $\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta), \varphi(\pi) = 0$. Reciprocamente se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ é função satisfazendo tais condições então existe uma única linear $\phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}\pi\mathbb{Z}) \to \mathcal{V}$ tal que

$$\phi(1 \otimes \xi) = \varphi(\xi)$$

para todo ξ de $\mathbb{R}$. Assim para provar o Teorema 1.3 devemos provar:

Existe uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ satisfazendo as condições $\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$ e $\varphi(\pi) = 0$ e tal que para cada poliedro P tenhamos

$$\tau \circ \chi(P) = \sum_{\nu=1}^{n} \ell_\nu \varphi(\alpha_p) \tag{1}$$

onde ℓ_i são as arestas e α_i os correspondentes ângulos diedrais de P.

Seja $F:(0,1)^2 \to \mathcal{V}$ definida por

$$F(a,b) = \tau \circ \chi(T(a,b))$$

F satisfaz as equações

$$F(a,b) = F(b,a)$$

$$F(a,b) + F(ab,c) = F(a,c) + F(ac,b)$$

A primeira é óbvia e a segunda vem do Lema 1.1.

As funções F, que satisfazem estas equações são por Jessen, Karpf e Thorup[5] precisamente as funções que podem ser representadas por meio das funções $f:(0,1) \to \mathcal{V}$ pela fórmula

$$F(a,b) = f(a) + f(b) - f(ab) \qquad (2)$$

No que segue f denota uma tal função.

Do Lema 1.2 segue que para quaisquer a, b, c de $\mathbb{R}$ vale

$$aF(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b}) + bF(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{b}{a+b}) \;=$$

$$=\; aF(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{a}{a+c}) + cF(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{c}{a+c})$$

Usando a fórmula (2) obtemos

$$\left[af(\frac{a}{a+b}) + bf(\frac{b}{a+b})] + (a+b)f(\frac{a+b}{a+b+c}) + cf(\frac{c}{a+b+c})\right] =$$

$$= \;\left[af(\frac{a}{a+c}) + cf(\frac{c}{a+c})] + [(a+c)f(\frac{a+c}{a+b+c}) + bf(\frac{b}{a+b+c})\right] .$$

Seja $G:(\mathbb{R}^+)^2 \to \mathcal{V}$ a função definida por:

$$G(a,b) = af(\frac{a}{a+b}) + bf(\frac{b}{a+b})$$

G satisfaz as equações

$$G(a,b) = G(b,a)$$
$$G(a,b) + G(a+b,c) = G(a,c) + G(a+c,b)$$
$$G(\lambda\ a, \lambda\ b) = \lambda\ G(a,b)$$

A primeira e última são óbvias e a segunda é precisamente a relação acima. As funções $G : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathcal{V}$ que satisfazem estas equações são por (o mesmo que acima) precisamente as que podem ser representadas por

$$G(a,b) = ag(a) + bg(b) - (a+b)g(a+b)$$

onde $g : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{V}$ satisfaz

$$g(a) + g(b) - g(ab) = 0$$

No que segue denota uma tal função.
Da última equação segue que $g(1) = 0$.
Se a, b de (0,1) são tais que $a + b = 1$.
Temos

$$af(a) + bf(b) = ag(a) + bg(b)$$

Introduzindo a função $h(a) = f(a) - g(u)$ obtemos para F a expressão

$$F(a,b) = h(a) + h(b) - h(ab) \tag{3}$$

onde h satisfaz

$$ah(a) + bg(b) = 0$$

quando $a + b = 1$.
Pomos ainda $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ dada por

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \tan\ \xi\ h(\operatorname{sen}^2\xi), & \xi \not\equiv 0 \ (\operatorname{mod}\ \dfrac{\pi}{2}) \\ 0 & \xi \equiv 0 \ (\operatorname{mod}\ \dfrac{\pi}{2}) \end{cases} \tag{4}$$

Temos daí que $\varphi(\xi) + \varphi(\eta) = 0$ se $\xi + \eta \equiv 0 (\operatorname{mod}\ \frac{\pi}{2})$ e a fórmula (3) toma a forma

$$\tau \circ \chi(T(a,b) = \cot\alpha\varphi(\alpha) + \cot\beta\varphi(\beta) + \cot(\alpha * \beta)\varphi\ (\frac{1}{2}\pi - \alpha * \beta\ ).$$

A fórmula (1) é portanto válida para todo tetraedro $T(a,b)$ e daí para todo $\lambda T(a,b)$.
Sabemos já que $\varphi(\pi) = 0$ e que $\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$ quando $\xi + \eta \equiv 0\ (\operatorname{mod}\ \frac{\pi}{2})$.

Para ξ, η e ζ em $(0, \frac{\pi}{2})$ de soma π aplicamos o Lema 1.3. Usando a fórmula 1 para os seis tetraedros e o fato de que o valor de χ para um paralelepípedo retangular é zero, achamos a relação $\varphi(\xi) + \varphi(\eta) + \varphi(\zeta) = 0$ (as contribuições dos demais ângulos se cancelam). Assim ficamos com $\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$ quando ξ, η estão em $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\xi + \eta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e também quando ξ, η estão em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $\xi + \eta$ em $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Se $\xi, \eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $\xi + \eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ temos

$$\frac{\pi}{2} - \xi, \frac{\pi}{2} - \eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

e

$$\pi - (\xi + \eta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

donde

$$\rho(\xi + \eta) = -\varphi(\pi - (\xi + \eta)) = -\varphi(\frac{\pi}{2} - \xi) - \varphi(\frac{\pi}{2} - \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)\,.$$

Para quaisquer $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ temos $\xi = m\frac{\pi}{2} - \xi_o$, $\eta = n\frac{\pi}{2} - \eta_o$, onde $\xi_o, \eta_o \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Logo $\varphi(\xi + \eta) = -\varphi(\xi_o + \eta_o) = -\varphi(\xi_o) - \varphi(\eta_o) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$.

Assim φ satisfaz $\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$ e $\varphi(\pi) = 0$. Como a fórmula (1) vale para todo tetraedro $\lambda T(a, b)$ e como todo poliedro pode ser decomposto em tetraedros $\lambda T(a, b)$ concluímos que a fórmula (1) vale para todo poliedro.

Como o espaço vetorial $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ é gerado pelos elementos $\chi(T(a, b))$ sua dimensão é menor ou igual ao cardinal do contínuo.

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ em (0,1), algebricamente independente sobre $\mathbb{Q}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ e $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ângulos em $(0, \frac{\pi}{2})$ determinados por $\operatorname{sen}^2 \alpha_\nu = a_\nu$ e $\operatorname{sen}^2 \delta_\nu = a_\nu^2$ (e então $\delta_\nu = \alpha_\nu * \alpha_\nu$). Então o conjunto $\{\pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \delta_1, \ldots, \delta_n\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$. De fato para $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\exp\ i \sum_{\nu=1}^{n} (p_\nu \alpha_\nu + q_\nu \delta_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} ((1 - a_\nu)^{1/2} + i a_\nu^{1/2})^{p_\nu} ((1 - a_\nu^2)^{1/2} + i a_\nu)^{q_\nu}$$

e é fácil ver que o membro direito, desta igualdade vale 1 somente quando todos os p_ν e q_ν forem nulos.

Como

$$\triangle(T(a_\nu, a_\nu)) = (2 \cot \alpha_\nu) \otimes \alpha_\nu - (\cot \delta_\nu) \otimes \delta_\nu$$

Vemos que $\triangle(T(a_1, a_1)), \ldots, \triangle(T(a_n, a_n))$ são linearmente independentes em $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$.

Portanto por Dehn, se $\Omega \subset (0,1)$ é uma base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, os elementos $\chi(T(a,a))$, $a \in \Omega$ são linearmente independentes de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$.

Como uma base Ω de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tem o cardinal de $\mathbb{R}$ concluímos que a dimensão de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ é maior ou igual ao cardinal do contínuo.

Assim sendo provamos o

Teorema 1.6 *A dimensão do espaço vetorial* $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ *é igual ao cardinal de* $\mathbb{R}$.

A imagem $\triangle(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}/\mathcal{F})$ é um subespaço linear de $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$. Para cada espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}$, as aplicações lineares $\phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \to \mathcal{V}$ que levam $\triangle(\mathcal{P})$ para zero, são aquelas que satisfazem a condição do Teorema 1.5, quando $\tau = 0$.

Da demonstração do Teorema 1.5 fica claro que estas funções ϕ são aquelas para as quais $\varphi(\xi) = \phi(1 \otimes \xi)$ tem a forma (4), onde $h : (0,1) \to \mathcal{V}$ é a função tal que

$$h(a) + h(b) - h(ab) = 0$$

para todos a e $b \in (0,1)$ e

$$ah(a) + bh(b) = 0$$

quando $a + b = 1$.

Uma função $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ é dita uma derivação se ela satisfaz as equações

$$d(a+b) = d(a) + d(b) \tag{5a}$$

$$d(ab) = bd(a) + ad(b) \tag{5b}$$

Para uma derivação $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ temos por (5b) que $d(1) = 0$ e (5a) mostra que d tem período 1. A função $h : (0,1) \to V$ dada $h(a) = \dfrac{d(a)}{a}$ evidentemente satisfaz as condições mencionadas mais acima.

Reciprocamente se $h : (0,1) \to \mathcal{V}$ satisfaz aquelas condições, a função $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ com período 1 e para a qual $d(a) = ah(a)$ com $a \in (0,1)$ e $d(1) = 0$ será uma derivação.

Para ver isso, observemos que (5a) se verifica para a e $b \in [0,1]$ com $a + b = 1$ e que (5b) se verifica para a e $b \in [0,1]$.

Suponha agora que a e $b \in [0,1]$ e $a + b \in [0,1]$.

Chegamos a

$$d(a) = d((a+b)\frac{a}{a+b}) = \frac{a}{a+b}\ d(a+b) + (a+b)d(\frac{a}{a+b})$$

$$d((a+b)\frac{b}{a+b}) = \frac{b}{a+b}d(a+b) + (a+b)d(\frac{b}{a+b})$$

somando obtemos (5a) para $a, b \in [0,1]$, $a+b \in (0,1]$. Então (5a) se verifica para a, b e $a+b \in [0,1]$. Se $a, b \in [0,1]$ e $a+b \in [1,2]$, temos $1-a$, $1-b \in [0,1]$ e $(1-a)+(1-b) \in [0,1]$. Logo

$$d(a)+d(b) = -d(1-a)-d(1-b) = -d(2-a-b) = d(a+b-1) = d(a+b)$$

Portanto (5a) se verifica para $a, b \in [0,1]$.

Para a e $b \in \mathbb{R}$ temos $a = a_o + m$, $b = b_o + n$ onde $a_o, b_o \in [0,1]$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Donde

$$d(a+b) = d(a_o + b_o) = d(a_o) + d(b_o) = d(a) + d(b).$$

Tendo então (5a), achamos

$$\begin{aligned} d(ab) &= d(a_o\ b_o + n\ a_o + m\ b_o) = d(a_o\ b_o) + d(n\ a_o) + d(m\ b_o) = \\ &= b_o\ d(a_o) + a_o\ d(b_o) + nd(a_o) + md(b_o) = bd(a) + ad(b) \end{aligned}$$

e portanto (5b) se verifica.

Quando $h : (0,1) \to \mathcal{V}$ é definida por $h(a) = \dfrac{d(a)}{a}$, onde $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ é uma derivação, a expressão $\xi h(\mathrm{sen}^2 \xi)$ em (4) toma a forma $2d(\mathrm{sen}\ \xi)/\cos\xi$. Pondo 0/0 = 0 chegamos ao

Teorema 1.7 *Para todo espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}$ as aplicações lineares $\phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \to \mathcal{V}$ que levam o subespaço $\triangle(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}/\mathcal{F})$ no zero, são determinadas por derivações $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ pela fórmula*

$$\phi(1 \otimes \xi) = d(\mathrm{sen}\ \xi)/\cos\xi$$

Uma derivação $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$ se anula no conjunto dos números reais algébricos. Se Ω é uma base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, toda função de Ω em $\mathcal{V}$ é a restrição de uma derivação $d : \mathbb{R} \to \mathcal{V}$. Provas destes resultados estão em [5].

Considerando agora o caso especial do Teorema 1.5 onde $\mathcal{V} = \mathcal{P}/\mathcal{F}$ e τ a identidade, vemos que todas as aplicações lineares $\phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}/\mathcal{F}$ para as quais $x = \phi \circ \triangle$ coincidem no conjunto de elementos $1 \otimes \xi$ para os quais $\mathrm{sen}\ \xi$ é algébrico, e se $\Omega \subset (0,1)$ é uma base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ e Γ e o conjunto daqueles ângulos $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$ para os quais $\mathrm{sen}\ \gamma \in \Omega$, existe apenas uma aplicação linear ϕ para a qual $x = \phi \circ \triangle$ e $\phi(1 \otimes \xi) = 0$ para cada $\xi \in \Gamma$. O conjunto $\{\pi, \Gamma\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$.

Seja $\{\pi, \wedge\}$ uma extensão de $\{\pi, \Gamma\}$ a uma base de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Então $\{1 \otimes \xi /\ \xi \in \wedge\}$ é uma base de $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ e $\{\phi(1 \otimes \xi)/\ \xi \in \wedge\ \Gamma\}$ e base de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$.

No Teorema 1.5 tomemos $\mathcal{V} = \mathbb{R}$. O subespaço $\triangle(\mathcal{P})$ de $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ é a interseção dos núcleos dos lineares $\phi : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ cujos núcleos contêm $\triangle(\mathcal{P})$. Assim temos o

Teorema 1.8 *O subespaço* $\triangle(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{P}/\mathcal{F})$ *de* $\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ *consiste daqueles elementos* $\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \otimes \xi_\nu$ *para os quais*

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu d(\text{sen } \xi_\nu)/\cos\ \xi_\nu = 0$$

para toda derivação $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Em particular, um elemento da forma $k \otimes \xi$ com $k \neq 0$ pertence a $\triangle(\mathcal{P})$ se e só se $\text{sen } \xi$ é algébrico.

Para ângulos arbitrários $\xi_1, \ldots \xi_n$, sejam $t_1, \ldots, t_s$ números reais, algebricamente independentes sobre $\mathbb{Q}$ e tais que os números $\text{sen } \xi_\nu$ sejam algébricos sobre o corpo $\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_s)$. Supondo que os polinômios característicos dos $\text{sen } \xi_\nu$ sobre $\mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_s]$ sejam conhecidos, achamos para os números $d(\text{sen } \xi_\nu)/\cos \xi_\nu$ onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma derivação, expressões da forma

$$\sum_{\sigma=1}^{s} c_{\nu\sigma}\ d(t_\sigma),$$

onde $c_{\nu\sigma}$ são independentes de d. Como os valores $d(t_\sigma)$ podem ser arbitrários chegamos a que os conjuntos $\{k_1, \ldots, k_n\}$ para os quais

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \otimes \xi_\nu$$

pertence a $\triangle(\mathcal{P})$ são determinados como as soluções das s equações lineares $\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\ c_{\nu\sigma} = 0$, $\sigma = 1, \ldots, s$.

Denotemos por $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as derivações $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ de todas as funções de $\mathcal{D}$ em $\mathbb{R}$.

Seja $\varepsilon : \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ a linear que leva $1 \otimes \xi$ na função $d \to d(\text{sen } \xi)/\cos \xi$.

Então o Teorema 1.8 diz que $\triangle(\mathcal{P})$ é o núcleo de ε.

Os Teoremas 2 e 6 são ilustrados pelo diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{P} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "\Delta"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{P}/\mathcal{F} \arrow[rr, "\delta"] & & \mathbb{R}\otimes(\mathbb{R}/\pi\,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{R}^{\mathcal{D}}
\end{tikzcd}
$$

O resultado de Dehn fala da existência de δ tal que $\triangle = \delta \circ \chi$. O resultado de Syndler diz que a primeira parte da sequência horizontal é exata e nossa caracterização da imagem $\triangle(\mathcal{P})$ diz que a segunda parte é exata.

Referências

[1] N. Bricard, Sur ine question geometric relative an polyedres, Nouv. Ann. Math., 15(1986) 331-334.

[1] M. Dehn, Uber den Rauminhalt, Math. Ann. 55 (1901) 465-478.

[1] H, Hadwiger, Vorlesungen uber inhalt, Oberflache und isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlion 1957.

[1] D. Hilbert, Foundations of Geometry Open Court Dubl Co(1965).

[1] B, Jessen, J. Karpf, A. thorup, Some functional equations in groups and rings, Mat. Scand 22 (1968) 257-265.

[1] B, Jessen, The Álgebra of polyedra and the Dehn-Sydler Theorem. math. Scand, 22(1968) 241-256.

[1] O. Nicolletti, Sulla equivalence dei poliedri, Rend. Circ. Mat. Palermo, 40(1015), 43-80.

[1] P. Sydler, Condition necessaires et sufficientes pour l'equivalence des polyedres de l'espace euclidean a trois dimensiones comm. Math. Helv 40(1965) 43-80.

[1] H. Lebesgue, Sur l'equivalence des polyedres, en particulier des polyedres regulieres, et sur la dissection des polyedres regulieres en polyedres, Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938) 193-226, 18(1945) 1-3.

Antonio Conde - Departamento de Matemática - ICMC - USP.
Caixa Postal 668, cep: 13560-970, São Carlos. SP.
e-mail: conde@icmc.usp.br