Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 3 nº 5 (abril/2003 - setembro/2003) - pág. 15 - 26
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

A HIPÓTESE DO CONTINUUM OU O PRIMEIRO PROBLEMA DE HILBERT

Irineu Bicudo

UNESP - Brasil

Toda linguagem é um alfabeto de símbolos,
cujo exercício pressupõe um passado
que os interlocutores compartem; como transmitir
aos outros o infinito Aleph, que minha
temerosa memória mal e mal abarca?
(J. L. Borges – Aleph)

Zénon! Cruel Zénon! Zénon d'Élée
M'as tu percé de cette flèche ailée
Que vibre, vole, et qui ne vole pas !
(A. Abelaira – Bolor)

I. INTRODUÇÃO

A matemática, como as demais ciências, avança com a resolução de problemas e a proposição de teorias. No entanto, ao contrário das outras, novas teorias, novas técnicas, novas idéias, novos métodos, em geral, no máximo, burilam ou estendem os antigos que continuam subsistindo ao lado dos novos. Porque, em suma, o conhecimento matemático possui um caráter cumulativo.

Como tem lugar, efetivamente, o progresso matemático?

Em cada época, e em cada ramo da matemática, há determinadas concepções, determinadas técnicas e determinados métodos dominantes. Chamemo-los, para usar a linguagem posta em voga por Thomas Kuhn, <u>paradigma</u> [do grego <u>paradeigma</u>, significando modelo]. A tendência inercial é a aplicação, a toda questão dada, naquele ramo, do modelo vigente, até a sua exaustão. O insucesso na resolução de um problema é, usualmente, atribuído à inabilidade do matemático, antes que à impropriedade do paradigma. A história da matemática registra inúmeros exemplos dessa situação.

Tomemos, como ilustração, a resolução de equações algébricas e, aí, o trabalho de Lagrange, o mais significativo na linha do paradigma existente, o da redução de uma equação dada a sua <u>resolvente</u>. A esse respeito, assim se expressa Hans Wussing: "Com suas extensas "Réflexions sur la résolution algébrique des équations", de 1770-71, Joseph-Louis Lagrange (1736-1781) iniciou um desenvolvimento de maior alcance. Em particular, esse trabalho mostra quão difícil era abandonar os padrões tradicionais de pensamento da álgebra contemporânea, em favor de um tipo radicalmente diferente de pensamento algébrico – mais especificamente, efetivar a transição do cálculo das raízes de uma equação ao estudo de sua estrutura".

Lagrange resume, como segue, o que fizera: "Aqui estão, se não me engano, os verdadeiros princípios da resolução de equações e a análise mais apropriada a conduzir a isso; tudo se reduz, como se vê, a uma espécie de cálculo das combinações, pelo qual se acha a priori os resultados esperados. Estaria, a propósito, fazer a aplicação deles às equações do quinto grau e de graus superiores, cuja resolução é, até o presente, desconhecida; mas essa aplicação demanda um número excessivamente grande de investigações e de combinações, cujo sucesso é ainda, aliás, muito duvidoso, para que possamos, presentemente, dar-nos a esse trabalho; esperamos, todavia, poder voltar a ele, em um outro tempo, e contentar-nos-emos aqui com ter posto os fundamentos de uma teoria, que nos parece nova e geral".

E, analisando o método que está propondo, pondera: "Resulta destas reflexões que é muito duvidoso que os métodos, em que acabamos de apostar, possam dar a resolução completa das equações do quinto grau e, com mais forte razão, a das de graus superiores; e essa incerteza, junto com o comprimento dos cálculos, que esses métodos exigem, deve repelir, de antemão, todos aqueles que poderiam estar tentados a fazer uso deles para resolver um dos Problemas mais célebres e mais importantes da Álgebra".

Vê-se que, como assinalara Wussing, mesmo frente ao fato, quase consumado, da exaustão do paradigma, inoperante, ao que tudo indicava, para dar conta da resolução de equações algébricas de graus superiores ao quarto, o grande matemático hesita em avançar no caminho que o levaria ao novo modo de encarar seu problema. Fica apenas na promessa, não cumprida, de retornar a ele em um outro tempo. Não que lhe faltassem recursos! Nas terras que amanhara, cresce o que plantaram Abel e Galois. E, então, produz-se o fruto desejado – o novo paradigma.

G.H. Hardy enfatizou que "a matemática é um jogo de jovens". Interpreto-o como querendo dizer que só os jovens, incontaminados ainda pelo peso da tradição, ousam desdenhar as batidas sendas, e são eles que dão o passo decisivo, enfrentando, habitualmente, a virulenta crítica dos próceres, para penetrar no futuro, que estão a inaugurar.

Com essas considerações em vista, abordo, agora, o tópico que me diz respeito e que denomino "teoria matemática do infinito".

O problema do infinito está em pauta desde a antiguidade remota e sempre perturbou os cérebros mais bem pensantes. No entanto, talvez condicionado pelo efêmero da vida humana, o padrão, que se impõe, é o da finitude Desse modo, por maiores que possam ter sido os esforços por evitá-lo, o infinito foi, em tudo o que importa, sempre medido pelo finito. O mais notável exemplo dessa propensão é o conceito aristotélico do infinito potencial, tão bem captado pelo segundo postulado de Euclides. As partes consideradas são sempre finitas, mas admitem expansões a outras partes, também finitas, que podem ser estendidas a, ainda, outras partes, igualmente finitas, etc. Procura-se varrer, mais e mais, o ilimitado (ápeiron) pelo limitado (péras).

É, precisamente, esse tratamento, de querer abarcar o infinito com o finito, que conduz a paradoxos (como os de Zenão), que foram atribuídos, na história das idéias, ao conceito mesmo de infinito.

O modelo das coisas finitas conduz, inapelavelmente, pelas mãos da intuição, ao axioma, ou à noção comum (koinaì énnoiai), na denominação de Euclides, seguinte: "o todo é maior que a parte" (tò hólon tou mérous meĩzon). Por isso Galileu rejeita os conjuntos infinitos, declarando-os não submissos à razão, pois notara ser possível pôr os números inteiros, o todo (tò hólon), em correspondência um a um com seus quadrados, a parte (tò méros), fato até hoje conhecido como o paradoxo de Galileu.

Gauss, em carta de 12 de junho de 1831 a Schumacher, protesta "contra o uso de uma grandeza infinita como algo completo, uso que nunca foi permitido em matemática. O infinito é somente uma "façon de parler"; a querer ser rigoroso, fala-se antes de limites, dos quais certas razões se aproximam quanto se queira, enquanto que a outras é permitido crescer além de qualquer medida". E Cauchy, nas "Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral", sustentava a impossibilidade de manter como realmente existente uma infinidade de objetos, por causa dos paradoxos (de resto, já observados por Galileu) que se originam do conceito de infinidade.

Ludovico Geymonat comenta, com aprovação: "Ora, o que resulta maravilhoso em Bolzano é, por um lado, isto mesmo: que, enquanto sabe ser perfeitamente rigoroso nas demonstrações sobre limites (isto é, sabe interpretar, com exatidão, o conteúdo lógico preciso da palavra infinito, quando seja apenas uma "façon de parler"), compreende porém, por outro lado, não menos bem, que o conceito de infinidade atual é aquele também provido do mais alto interesse e pode ser tornado objeto de pesquisa perfeitamente rigorosa. Evoca, nessa convicção, o pensamento do grande Leibniz e repete com ele: "Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admittre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairment, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur" (Sou, de tal modo, a favor do infinito atual que, em vez de admitir que a natureza o abomina, matenho que ela o deseja em toda parte, para melhor indicar as perfeições de seu Autor)".

Apesar dessas incisivas declarações pela consideração do infinito atual, ou seja, de uma "grandeza infinita como algo completo", também já esposadas por Descartes, coube a Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) introduzir o novo paradigma e, assim, abrir as portas daquele paraíso, do qual Hilbert espera jamais sejamos expulsos.

II. PROBLEMA DE CANTOR DO NÚMERO CARDINAL DO CONTINUUM

Hilbert procede do seguinte modo em relação ao primeiro problema de sua famosa lista. Depois de explanar o conceito de número cardinal de um conjunto, como introduzido por Cantor, afiança que "as investigações de Cantor de tais agregados de pontos sugere um teorema muito plausível, que, no entanto, apesar dos ingentes esforços, ninguém foi bem sucedido em prová-lo. Eis o teorema:

Todo sistema de infinitos números reais, i.e., todo agregado de números (ou pontos) é ou equivalente ao agregado dos números naturais, 1, 2, 3, ... , ou ao agregado de todos os números reais e, portanto, ao continuum, isto é, aos pontos de uma reta; com respeito á equivalência, há, portanto, somente dois agregados de números, o agregado enumerável e o continuum.

Desse teorema seguiria, imediatamente, que o continuun tem o número cardinal seguinte àquele do agregado enumerável; a demonstração desse teorema formaria, portanto, uma nova ponte entre o agregado enumerável e o continuum".

É interessante notar que, na continuação do comentário a esse problema, Hilbert define, ainda na linha de Cantor, o conceito de boa ordem e propõe a questão, também devida a Cantor, de bem ordenar o conjunto dos números reais.

Destaco, desse trecho, duas passagens. Em uma, lê-se: "Deixem-me mencionar uma outra proposição notável de Cantor, que está na mais íntima conexão com o teorema mencionado [acima] e que, talvez, ofereça a chave para sua demonstração". E a outra: "Parece-me muito desejável obter uma demonstração direta dessa notável proposição de Cantor, talvez dando, de fato, um arranjo dos números [reais] tal que, em todo sistema parcial, um primeiro elemento pudesse ser indicado".

Portanto, como primeiro item por ele arrolado, Hilbert insta com a comunidade a que resolva, de fato, dois problemas.

A última proposição foi demonstrada por Zermelo, em 1904, com o uso do Axioma da Escolha. Aliás, como sabemos, o teorema da boa ordem é equivalente ao Axioma da Escolha.

Traçarei um esboço histórico de como Cantor chegou a essas duas proposições e de que modo se dá a "íntima conexão" entre elas, proclamada por Hilbert.

Depois de escrita sua Dissertation, em 1867, sobre um difícil problema da teoria dos números, sob os auspícios de Kummer e de Kronecker, na Universidade de Berlim, Cantor publicou sua Habilitationsschrift, também na teoria dos números, em 1869. Nesse mesmo ano, torna-se Privatdozent na Universidade de Halle, onde trava conhecimento com o matemático Edward Heine, que já lecionava naquela instituição. Como conseqüência desse encontro, surgiriam os artigos de Cantor destinados a mudar, para sempre, o modo de encarar a matemática, pois, da cabeça desse Zeus, nasceria adulta e perfeita uma deslumbrante Athena, a teoria dos conjuntos.

Heine sugere a Cantor considerasse funções reais de variáveis reais, no que tange à representação por séries trigonométricas, visando à unicidade de tal representação. O próprio Heine provara, em 1870, a unicidade, no caso de a função dada ser contínua quase em toda parte, e de a série em questão também ser uniformemente convergente quase em toda parte. Cantor conseguiu, nesse mesmo ano, melhorar esse resultado, assumindo apenas que a série trigonométrica em pauta fosse convergente para todos os valores de x. No ano seguinte, continuou obtendo proposições mais gerais, provando a unicidade da representação mesmo se, para certos valores de x, fosse desprezada a representação da função ou, então, a convergência da série, desde que o total desses pontos de exceção fosse finito. Em 1872, mais um grande avanço: o teorema continuava válido, no caso de uma infinidade de pontos de exceção, mantida somente uma limitação quanto à distribuição desses pontos. Ora, uma infinidade de pontos em um intervalo limitado se acumulará em torno de, pelo menos, um ponto – seu ponto de acumulação. Cantor hoúvesse bem ao tratar do caso em que a infinidade dos pontos excepcionais admitia um único ponto de acumulação. Continuou triunfante, quando aquela infinidade possuia um número finito de pontos de acumulação e, ainda mais, no caso de haver uma infinidade de pontos de acumulação, mantido que essa infinidade tivesse, por sua vez, um único ponto de acumulação, e assim por diante, vencendo, persistentemente, cada etapa, graças à potência de seu método. Verdadeiramente, esse contínuo processo de generalizações parece modelar a posterior introdução, nos trabalhos sobre os números transfinitos, dos dois princípios geradores de ordinais, a saber:

(I) Dado qualquer ordinal α, existe um menor ordinal maior do que α, o chamado $\alpha+1$;

(II) Dada qualquer seqüência crescente α_n de ordinais, existe um menor ordinal maior do que todos os α_n, o chamado $\lim a_n$

Para prosseguir na busca de resultados melhores, Cantor sentiu ser necessário formular, com mais precisão, sua hipótese restritiva sobre os pontos de exceção. Para isso, intuiu haver mister de uma teoria mais acurada dos números reais.

Interesses análogos de Dedekind puseram esses dois matemáticos em efervecente correspondência. Em carta àquele, de 29 de novembro de 1873, Cantor menciona uma questão sugerida por sua análise dos números irracionais: era possível pôr em correspondência um a um a coleção, N, dos números naturais e a dos números reais? Assumia um não como resposta, porém era incapaz de encontrar a razão disso. Dedekind respondeu-lhe que não via como proibir um tal relacionamento.

Não se passara um ano e Cantor descobriria uma chave útil para entender a natureza da continuidade. Em 1874, publicou o seguinte teorema no Journal de Crelle: “O conjunto, $\Re$, dos números reais não pode ser posto em correspondência um-a-um com o conjunto, N, dos número naturais”.

Assim, em algum sentido, há mais números reais do que números naturais, ou seja, de algum modo, os números reais compõem uma infinidade de ordem superior àquela constituída pelos números naturais.

A questão seguinte, que Cantor se propusera, indagava quantos pontos, em relação a uma reta, teriam um plano, um espaço de três dimensões, de quatro, etc.?

Quando conseguiu estabelecer uma correspondência um-a-um entre reta e plano, exclamou: “Vejo, porém não acredito!”.

Portanto, até essa época, todo conjunto infinito que considerava ou tinha a cardinalidade dos naturais ou a dos reais.

Com essa descoberta como bússola, dirige sua atenção, de volta, ao conjunto dos números reais, e escreve: “E agora que provamos, para um rico e extenso campo de agregados, a propriedade de ser capaz de correspondência com os pontos de uma reta contínua ou com uma parte dela (um agregado de pontos contidos nela), segue a questão: Em quantas e quais classes (se dissermos que agregados de mesma ou de diferente potência são agrupados, respectivamente, na mesma ou em diferentes classes) caem, de fato, os agregados lineares? Por um processo de indução, em cuja descrição não entraremos aqui, somos levados ao teorema de que o número de classes é dois: uma contendo todos os agregados suscetíveis de serem postos na forma: functio ipsius ν, em que ν pode receber todos os valores inteiros positivos; e a outra contendo todos os agregados de forma: functio ipsius x, em que x pode tomar todos os valores reais no intervalo (0, 1)”.

Aí está a hipótese do continuum, como acima enunciada por Hilbert.

Sigamos, agora, um pouco, os artigos “Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre” (Contribuições à Fundamentação da Teoria Transfinita dos Conjuntos). Neles, Cantor define: “Por um agregado (Menge) entendemos qualquer coleção, em um todo M, de objetos determinados e separados m de nossa intuição ou de nosso pensamento. Esses objetos são chamados os “elementos” de M”. Após outras considerações, ajunta: “Todo agregado M tem uma “potência” determinada, que também chamaremos seu “número cardinal”. Chamaremos pelo nome “potência” ou “número cardinal” de M o conceito geral que, por meio de nossa ativa faculdade do pensamento, surge do agregado M, quando fazemos abstração da natureza de seus vários elementos m e da ordem em que são dados.

Denotamos o resultado desse duplo ato de abstração, o número cardinal ou a potência de M, por $\overline{\overline{M}}$ ”.

Na seqüência, estabelece a igualdade de números cardinais; introduz, entre eles, as relações opostas de “menor” e “maior”; define adição, multiplicação e exponenciação de potências; fala dos números cardinais finitos e, no §6, do primeiro artigo, menciona o menor cardinal transfinito, indicado por Aleph-zero. Neste ponto, aparece pela primeira vez a letra hebraíca “Aleph” para denotar um número infinito. Lembro que Cantor era de ascendência judaica e que há, na tradição mística do povo judeu, a idéia de Moisés como intérprete da voz divina para os filhos de Israel. Essa visão foi desenvolvida, mais radicalmente, por Maimonides, cujo pensamento encontra, no rabino Mendel de Rymanóv, seu mais importante porta-voz. Segundo este, tudo o que Israel ouvira da revelação no Monte Sinai foi o <u>Aleph</u>, com que o texto bíblico começa o primeiro Mandamento – o <u>Aleph</u> da palavra “anokhi” (eu). Alías, o <u>Aleph</u> sempre foi tido, pelos cabalistas, como a raiz espiritual de todas as outras letras, encompassando, em sua essência, o alfabeto todo e, portanto, todos os outros elementos do discurso humano. Mas, ouvir o <u>Aleph</u> é ouvir quase nada, não transmite um significado específico. No entanto, por isso, o ocorrido no Monte Sinai transforma-se em uma revelação mística, impregnada de um significado infinito e que, para tornar-se uma fundamentação da autoridade religiosa, deve ser traduzida na linguagem humana. Foi o que fez Moisés.

Ouso interpretar que, ao escolher o <u>Aleph</u> para representar as infinidades, mesmo que não conscientemente, Cantor chama a si o papel de Moisés, vertendo para a língua dos homens a, até então, inconcebida linguagem do infinito.

Ainda, no mesmo §6, vemos: “Depois de ter introduzido o menor número cardinal transfinito $\aleph_o$, e de ter derivado suas propriedades mais à mão, surge a questão quanto aos números cardinais mais elevados e de como eles procedem de $\aleph_o$. Mostraremos que os números cardinais transfinitos podem ser arranjados de acordo com sua magnitude, e que, nessa ordem, formam, como os números finitos, um “agregado bem ordenado”, em um sentido estendido das palavras. A partir de $\aleph_o$ procede, por uma lei determinada, o próximo número cardinal maior, $\aleph_1$; a partir desse, pela mesma lei, o próximo maior, $\aleph_2$; e assim por diante. Mas, mesmo a seqüência ilimitada de números cardinais

$$\aleph_o, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

não exaure o conceito de número cardinal transfinito. Provaremos a existência de um número cardinal, que denotaremos por $\aleph_\omega$, e que se mostra ser o próximo maior do que todos os números $\aleph_\nu$; a partir dele, procede, do mesmo modo como $\aleph_1$ de $\aleph_o$, um próximo maior $\aleph_{\omega+1}$, e, assim, por diante, sem fim".

A seguir, Cantor define o conceito de "agregado simplesmente ordenado" e assevera : "Todo agregado ordenado M tem um determinado "tipo ordinal" ou, mais concisamente, um determinado "tipo", que denotaremos por $\overline{M}$.

Por isso entendemos o conceito geral, que resulta de M, se abstrairmos apenas a natureza dos elementos m, e retivermos a ordem de precedência entre eles".

Conceitua a "similaridade" entre agregados ordenados, isto é, a igualdade de tipos; menciona "classes de tipos" e garante que "Cada uma dessas classes de tipos é, portanto, determinada pelo número cardinal transfinito a, que é comum a todos os tipos pertencentes à classe".

Os Alephs serão os números cardinais dos agregados bem ordenados e, como tais, possuem, realmente as propriedades prometidas por Cantor.

Hilbert expressa-se, como segue, sobre a criação cantoriana, cujo núcleo julga ser a teoria dos números transfinitos: "Esta parece-me a mais maravilhosa floração do espírito matemático e, no todo, uma das mais altas realizações da atividade puramente intelectual da humanidade".

Apesar disso, tudo o que Cantor concebera, até então, era insuficiente para resolver a questão da comparabilidade de dois cardinais quaisquer. A resposta a essa questão era afirmativa para os Alephs, por serem cardinais de conjuntos bem ordenados – e essa era a principal razão da simplicidade e transparência da aritmética no domínio de tais números. Mas, para os cardinais dos conjuntos não ordenados, ou mesmo daqueles ordenados, porém não bem ordenados, como o continuum linear, a questão permanecia aberta.

Daí, a existência de um fosso profundo a separar o domínio dos conjuntos bem ordenados e o dos outros conjuntos, não ordenados ou apenas ordenados. A esperança era lançar uma ponte sobre essa abertura, mostrando que qualquer conjunto poderia ser transformado em um bem ordenado, pelo rearranjo de seus elementos na sucessão especial que caracteriza este último tipo.

Isso transformaria todos os cardinais transfinitos em Alephs e deixaria a hipótese do continuum na forma preferida

$$2^{\aleph_o} = \aleph_1 .$$

É preciso também lembrar, como episódio dessa história, que, no Terceiro Congresso Internacional, reunido em Heidelberg, em 1904, isto é, um pouco antes da demonstração de Zermelo, que decidiria a questão, Julius König apresentou um trabalho que, pretensamente, mostrava a falsidade da hipótese do continuum. Em particular, König argumentava que o continuum não poderia ser bem ordenado e, por isso, não poderia ser posto em correspondência um-a-um com o bem ordenado $\aleph_1$. Schoenflies, presente ao Congresso, assim comenta a situação: "Para Cantor, afirmar que todo conjunto possa ser bem ordenado e que, em particular, o continuum tem a segunda cardinalidade [infinita] era uma espécie de dogma, que era parte e parcela do que ele sabia e cria na teoria dos conjuntos. Conseqüentemente, a apresentação de König, que culminou na proposição de que o continuum não poderia ser um Aleph (conseqüentemente, não poderia ser bem ordenado), teve um efeito atordoante, especialmente porque sua apresentação foi expremamente elaborada e precisa".

Zermelo torna-se o anjo salvador, indicando, no dia seguinte ao da exposição de König, a falsidade de um resultado atribuído a Felix Bernstein, e que embasava a demonstração daquele.

III. O QUE SE SABE SOBRE A HIPÓTESE DO CONTINUUM

O próprio Hilbert tentara, em vão, provar a hipótese de continuum, incapaz que foi de completar a demonstração. Então, em 1938, Kurt Gödel, de modo surpreendente, mostra que a hipótese do continuum era consistente com os axiomas padrões da teoria dos conjuntos Zermelo-Fraenkel (com o axioma da escolha), ZFC; isto é, provou que se esses axiomas forem, por si sós, consistentes, então, a partir deles, não há como refutar a hipótese do continuum (ou, mesmo, a hipótese generalizada do continuum, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, para todo α). Aliás, Donald Martin nota que existe uma relação, embora tênue, entre a demonstração bem sucedida de Gödel e a frustada tentativa de Hilbert.

Além disso, Gödel conjecturou que os axiomas formais, ZFC, eram insuficientes para provar a hipótese do continuum e, assim, que essa proposição seria formalmente indecidível em ZFC. Foi o que, em 1963, mostrou Paul Cohen – a independência da hipótese do continuum (e, mesmo, da hipótese generalizada do continuum) em relação a ZFC.

Embora seja desapontador o desfecho a que se chegou, no que tange à veracidade ou não da notável hipótese, os resultados alcançados, como não é incomum quando estejam em jogo intuições, ainda que falsas, de gênios matemáticos, abriram passagem a importantes avanços na área.

Lembremos que uma sentença de primeira ordem, φ, é consistente com ZF (ou ZFC) se sua negação não puder ser provada em ZF. Ou seja, φ é consistente com ZF, se a teoria ZF + φ não levar à contradição.

Por outro lado, a sentença φ é independente de ZF (ou ZFC), se φ não for um teorema de ZF, isto é, se a negação de φ for consistente com ZF.

Há duas maneiras de estabelecer a consistência de uma proposição matemática, em relação à teoria ZF (ou ZFC) dos conjuntos: a fácil e a difícil. A primeira consiste em achar alguma outra sentença ψ, que se saiba ser consistente com ZF, e, então, em provar que, em ZF, ψ implica φ. A outra exige a construção de um modelo M dos axiomas da teoria ZF, e, portanto, dos teoremas de ZF, no qual φ seja verdadeira.

Os resultados, tanto o de Gödel quanto o de Cohen, relativos à hipótese do continuum, foram obtidos pelo segundo método.

Gödel construiu, para a sua demonstração, pela primeira vez na história, um modelo de ZF, bastante natural, o universo L dos conjuntos construtíveis, que é o menor modelo de ZF contendo todos os ordinais. Depois de L, a melhor maneira de construir modelos de ZF é o método de forcing, inventado por Cohen em sua prova da independência da hipótese do continuum.

Essas técnicas, nas mãos de seus inventores e, mais particularmente, quando usadas, como foram, por matemáticos muito criativos – um Jensen, um Solovay, um Silver, um Martin, um Kunen, e muitos outros – iniciaram uma verdadeira revolução no modo de lidar com a teoria dos conjuntos.

IV. CEM ANOS DEPOIS

Como o que foi demonstrado por Gödel e por Cohen deixa, do ponto de vista filosófico, o problema do continuum, a primeira questão da lista de Hilbert?

Na concepção formalista de Hilbert, a hipótese do continuum era uma asserção da matemática ideal , antes que da matemática real Ele, presumivelmente, pensava que os axiomas formais da teoria dos conjuntos seriam suficientemente fortes para decidir proposições desse tipo. Sua fé inabalável na matemática já o fizera professar, no prólogo aos problemas, que : "Esta convicção na resolubilidade de todo problema matemático é um poderoso incentivo ao trabalhador. Ouvimos, dentro de nós, o perpétuo chamado: Aí está o problema. Procura a solução. Poderás achá-la pela razão pura, pois, na matemática, não há ignorabimus?".

Não resta esclarecido se ou não ele consideraria os trabalhos de Gödel e de Cohen como uma resposta ao problema enunciado.

Gödel em "What is Cantor's continuum problem?", mantém que o significado da hipótese do continuum é independente dos axiomas formais e que as demonstrações de independência apenas mostrariam a fraqueza de nossos atuais axiomas. Seu ponto de vista é que a hipótese do continuum é verdadeira ou falsa e que nos cabe descobrir qual é o caso. Gödel, de fato, intuia-a falsa. Argumenta, demoradamente, que a impossibilidade de decisão somente pode significar que nossos axiomas não contêm uma descrição completa daquela realidade. E salienta: "uma tal crença não é, de modo algum, quimérica, pois é possível apontar caminho pelo qual a decisão de uma proposição, que seja indecidível a partir dos axiomas usuais, possa, no entanto, ser obtida.

Primeiramente (ele continua), os axiomas da teoria dos conjuntos não formam um sistema fechado em si, mas, bem ao contrário, o próprio conceito de conjunto, sobre que estão baseados, sugere sua extensão a novos axiomas que asseveram a existência de ainda mais iterações da operação "conjunto de". Esses axiomas podem ser formulados também como proposições afirmando a existência de números cardinais muito grandes (i.e., de conjuntos tendo esses números cardinais). O mais simples desses "axiomas da infinidade" fortes afirma a existência de números inacessíveis (no sentido fraco ou forte) maiores do que $\aleph_o$".

Outros axiomas de cardinais grandes têm sido formulados, revelando que nosso sistema axiomático, para a teoria dos conjuntos, é incompleto, podendo, no entanto, ser completado, sem arbitrariedade, por novos axiomas, que apenas desvelarão mais o conteúdo de nosso conceito de conjunto.

Claramente, os axiomas usuais dos cardinais grandes não podem ser demonstrados em ZFC, supondo ZFC consistente. Mas, há três tipos de argumentos para sua aceitação:

(i) analogia com $\aleph_o$;
(ii) princípios de reflexão;
(iii) plausibilidade das conseqüências.

Por exemplo, o argumento da analogia com $\aleph_o$, como explica Martin, tem o seguinte teor: "$\aleph_o$ é inacessível, mensurável, etc. Para cada uma dessas propriedades $\underline{P}$ seria somente por acidente, caso acontecesse de $\aleph_o$ ser definível como o único cardinal infinito gozando de $\underline{P}$. Portanto, pode-se esperar que existam cardinais grandes tendo a propriedade $\underline{P}$".

Os axiomas de cardinais grandes, entretanto, apesar de todo esforço que tem sido feito e dos inúmeros resultados conseguidos, pouco nos dizem sobre a hipótese de Cantor.

Lévy e Solovay mostraram que os fenômenos de independência ainda persistiam, depois da adição dos princípios de cardinais grandes.

Ainda na esteira de Martin, é interessante saber que um outro meio vem sendo usado na procura de evidência pró ou contra a hipótese de continuum, consistindo no exame de casos <u>simples</u>. Aquela hipótese diz que todo conjunto de reais é, no máximo, enumerável ou tem a cardinalidade do próprio continuum.

Podemos, então, testar essa afirmação com conjuntos de números reais que sejam <u>simples</u>, em algum sentido. Se tais conjuntos não fornecerem contra-exemplo, trataremos de analisar se existem razões para suspeitar serem esses conjuntos simples, de um modo relevante, diferentes dos conjuntos arbitrários de reais.

Um exemplo de conjunto simples, nesse contexto, é-nos dado pelos conjuntos <u>projetivos</u>. São conjuntos de reais obtidos dos conjuntos de Borel pela iteração de duas operações:

(i) tomar a imagem contínua;
(ii) complementação.

Constituem, pela definição dada, uma hierarquia:

$\sum_1^1$ - conjuntos (ou conjuntos analíticos) são imagens contínuas de conjuntos de Borel;

$\prod_n^1$ - conjuntos são complementos de $\sum_n^1$ - conjuntos;

$\sum_{n+1}^1$ - conjuntos são imagens contínuas de $\prod_n^1$ - conjuntos.

É sabido que todo conjunto de Borel é, no máximo, enumerável ou tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$. O mesmo vale para os $\sum_1^1$ - conjuntos.

Sierpinski provou que todo $\sum_2^1$ - conjunto é a união de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Portanto, em todos esses casos, a hipótese do continuum está confirmada.

Por outro lado, é consistente com ZFC que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ e que existem $\sum_2^1$ - conjuntos (e mesmo $\prod_1^1$ - conjuntos) de potência $\aleph_1$.

Também é consistente com ZFC que $2^{\aleph_0}$ pode ser tão grande quanto se deseje e que há $\prod_2^1$ - conjuntos de toda cardinalidade $\leq 2^{\aleph_0}$.

Desse modo, fica-se sem informações sobre os níveis mais altos da hierarquia projetiva.

Muito recentemente (1995/1996), Jacob Zimbarg Sobrinho, atualmente professor aposentado da Universidade de São Paulo, desenvolveu um sistema completo para a lógica plena de segunda ordem e derivou, da correspondente teoria dos conjuntos, a hipótese generalizada do continuum. Logo, nesse sistema, decide-se a hipótese do continuum: ela é verdadeira.

Mas, caso nos mantenhamos, como é hábito, na linguagem de primeira ordem, a que se considera, por excelência, a linguagem da matemática (é possível ver, nessa atitude, o peso assombroso da tradição) a pergunta: "É verdadeira ou não a hipótese do continuum (do reino do infinito)?" ainda não achou resposta. Por isso, talvez possamos dizer que, mais uma vez, Cantor encarna, à perfeição, a figura de Moisés: o que ele não foi capaz de revelar, seu povo é incapaz de saber.

BIBLIOGRAFIA

(1) Barwise, J. – Handbook of Mathematical Logic, North-Holland Publ. Co., 1977.

(2) Cantor, G. – Contributions to the Foundings of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, 1955.

(3) Fraenkel, A.A. – Abstract Set Theory, North-Holland Publ. Co., 1953.

(4) Geymonat, L. – Storia e Filosofia dell'Analisi Infinitesimale, Levotto & Bella, 1947.

(5) Gödel, K. – What is Cantor's continuum problem?", in P. Banacerraf & H. Putnan (ed.) – Philosophy of mathematics, Cambridge Univ. Press, 1983 (2nd ed.).

(6) Hardy, G.H. – A mathematician's Apology, Cambridge Univ. Press.

(7) Hilbert, D. – On the infinite, in P. Benacerraf & H. Putnun (ed.) – Philosophy of mathematics, Cambridge Univ. Press, 1983 (2nd ed.).

(8) ___________ - Mathematical Problems, in Mathematical Problems arising from Hilbert Problems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXVIII, Part 1, Amer. Math. Soc., 1976.

(9) Lagrange, J.L. – Réflexions sur la résolution algèbrique des équations, Nouv. Mém. Acad. Berlin, pour les années, 1770/1771.

(10) Maddy, P. – Realism in Mathematics, Claredon Press, 1992.

(11) Scholem, G.G. – On the Kabbalah and its Symbolism, Schocken, 1969.

(12) Zimbarg, S°, J. – A few remarks on my paper "A Quest for Realism", SBA, 43° Seminários Brasileiro de Análise, Fascículo Especial, IME-USP, maio de 1996.

Irineu Bicudo: Departamento de Matemática - IGCE - UNESP.
e-mail: ibicudo@rc.unesp.br