*Traduções*
*Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 18 nº 36 - pág. 117-138*
*Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática*
ISSN 1519-955X

# UM OLHAR SOBRE A PROP. XXXII DE JAMES GREGORY

Thais de Souza Costa
*Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM – Brasil*

Mônica de Cássia Siqueira Martines
*Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM – Brasil*

(aceito para publicação em agosto de 2018)

**Resumo**

Este trabalho tem como objetivo compreender os métodos de demonstrações utilizados por James Gregory, matemático escocês do século XVII, em seus trabalhos. Para isso, utilizamos como fonte de pesquisa a obra *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, de 1668, em especial a Proposição XXXII da mesma, na qual o autor, de acordo com Baron e Bos (1985), utiliza uma linguagem verbal e geométrica, com estruturas de demonstração baseadas no método da exaustão. No decorrer da pesquisa, traremos algumas informações referentes às fontes em história da matemática, uma breve biografia de James Gregory e a tradução da proposição estudada. Também apresentaremos uma interpretação matemática de como Gregory efetuou os cálculos da referida proposição, com o objetivo de tornar mais compreensível para a linguagem matemática atual e verificar as contribuições do autor para o Cálculo Integral.

**Palavras-chave:** Matemática, História, História do Cálculo Integral, James Gregory.

## [A LOOK AT JAMES GREGORY'S PROP. XXXII]

**Abstract**

This work aims to understand the methods of demonstration used by James Gregory, a Scottish mathematician of the seventeenth century, in his works. For that, we use as a research source the work *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, from 1668, especially Proposition XXXII of the same, in which the author, according to Baron and Bos (1985), uses a verbal and geometric language, with demonstration structures based on the exhaust method. In the course of the research, we will bring some information about sources in the history of mathematics, a brief biography of James Gregory and the translation of the proposition studied. We will also present a mathematical interpretation of how Gregory performed the calculations of this proposition, with the purpose of making it more comprehensible for the current mathematical language and verifying the author's contributions to the Integral Calculus.

**Keywords:** Mathematics, History, History of Integral Calculus, James Gregory.

## 1. Introdução

O século XVII foi marcado por atividades científicas que se tornaram significativas, em especial, ao que tange à matemática, tivemos contribuição de matemáticos de diversos países Itália, França, Inglaterra e Países Baixos. Questões relacionadas ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos instigavam os estudiosos da época e em especial dois grandes problemas: o problema das tangentes (determinar as retas tangentes a uma curva dada) e o problema da quadratura (determinar a área sob uma curva dada).

> Num clima de intensa competição e controvérsias sobre prioridades, acusações de plágios (utilização de resultados de outros sem menção ao autor) eram comuns. A tendência de crítica aos autores, devido aos métodos empregados nos seus trabalhos, fez com que crescesse o número de publicações desacompanhadas dos métodos empregados. Esta atitude motivou a circulação de manuscritos não publicados, acirrando ainda mais as disputas. (BARON e BOS, 1985, p.3)

A época também foi marcada por mudanças nos métodos de demonstração, onde haviam muitos que utilizavam a estrutura de demonstrações de Arquimedes e outros que se esforçavam para construir novas demonstrações mais rigorosas. Segundo Baron e Bos (1985), essa situação se deu principalmente pela introdução do simbolismo algébrico.

Matemáticos como Leibniz (1646-1716) e Newton (1643-1727) tiveram influência no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, mas é evidente que ambos se apoiavam em resultados e métodos desenvolvidos por outros matemáticos antes deles. Um desses foi James Gregory (1638-1675), matemático escocês que foi professor na universidade de *St Andrews* e na universidade de *Edimburgo.*

Gregory é autor de várias obras, entre elas destacamos *Vera circuli et hyperbolae* e *Geometriae pars universalis*, nas quais preocupou-se em estender e generalizar o método da exaustão[1]. Também se interessou em tentar provar a impossibilidade da quadratura do círculo, da elipse e da hipérbole. *Geometriae* continha tratados contendo todas as operações para determinar arco, tangente, área e volume, razão pela qual tenha influenciado diretamente no desenvolvimento do Cálculo.

O objetivo deste trabalho é compreendermos as estruturas de demonstração realizadas por Gregory, que Baron e Bos (1985, p.44) nos informam, ter sido realizada de modo verbal e geométrica, o que difere totalmente dos métodos que utilizamos hoje, algébrico. Acreditamos que ao analisarmos os métodos empregados por este matemático poderemos melhor entender a Matemática atual, onde os resultados nos são apresentados de modo pronto e acabado, quando cursamos disciplinas de Cálculo na graduação.

Por se tratar de uma iniciação científica, outro objetivo é compreendermos a área da História da Matemática como campo de pesquisa. Assim, apresentaremos um diálogo sobre as fontes históricas, uma versão sobre a vida de James Gregory e nosso trabalho usando fontes originais.

## 2. Sobre as fontes históricas

De acordo com Saviani (2006), a palavra fonte apresenta duas conotações. A primeira delas significa o ponto de origem, o lugar de onde brota algo que se projeta e se desenvolve indefinidamente e inesgotavelmente. A segunda conotação diz respeito à base ou ponto de apoio que definem os fenômenos que se busca compreender.

Em história, a palavra fonte é utilizada de forma semelhante, uma vez que as fontes históricas são "o ponto de apoio da construção historiográfica que é a reconstrução, no plano do conhecimento, do objeto histórico estudado." (Saviani, 2006).

Entretanto, é necessário ter em vista que as fontes históricas são passíveis de diferentes interpretações e significados, sendo necessário por parte do historiador uma leitura crítica destas para que as informações transmitidas sejam

[1] O Método da Exaustão foi um dos mais utilizados para demonstrar a quadratura do círculo ($A_c$ área do círculo), o qual consistia em inscrever ($I_n$) e circunscrever ($C_n$) polígonos ao círculo dado, afim de que quanto maior a quantidade de lados $n$ dos polígonos inscritos e circunscritos, mais a área do círculo se aproximava, por exaustão, da área destas figuras: $I_n \leq A_c \leq C_n$.

mais confiáveis. Nobre (2004) nos aponta a necessidade de uma maior quantidade de informações sobre determinados acontecimentos históricos para se firmar bases qualitativas que sustentem a informação adquirida. Quando as informações forem escassas ou originárias de fontes duvidosas, pode-se tirar diferentes interpretações sobre o mesmo tema.

Nobre (2004) nos traz ainda alguns exemplos históricos, em História das Ciências, especificamente em História da Matemática, em que as informações contadas sobre determinado matemático, que eram admitidas como verdades absolutas e com o tempo transformaram-se em verdades relativas. O autor nos aponta alguns casos em que personagens famosos da História da Matemática, teoricamente autores de muitos teoremas importantes, podem sequer nem ter existido, pela falta de evidências históricas, como Tales de Mileto ou Pitágoras. Além disso, temos os casos de diversos teoremas que levam nomes de matemáticos famosos, mas que na realidade pertenciam à outras pessoas, muitas vezes apagadas da história.

Um dos casos mais relevantes para essa pesquisa diz respeito à disputa acadêmica entre Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz sobre a descoberta das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. Newton acusou Leibniz de ter plagiado suas ideias, e este recorreu à *Royal Society of London* para que realizasse o julgamento do caso. Newton, que era presidente da entidade, ganhou o caso e Leibniz morreu desacreditado, e assim permaneceu por muito tempo, até a descoberta, em meados do século XIX, de manuscritos de Leibniz, datados de 1675, que comprovaram que ele teria descoberto o Cálculo Diferencial antes e de forma independente de Newton.

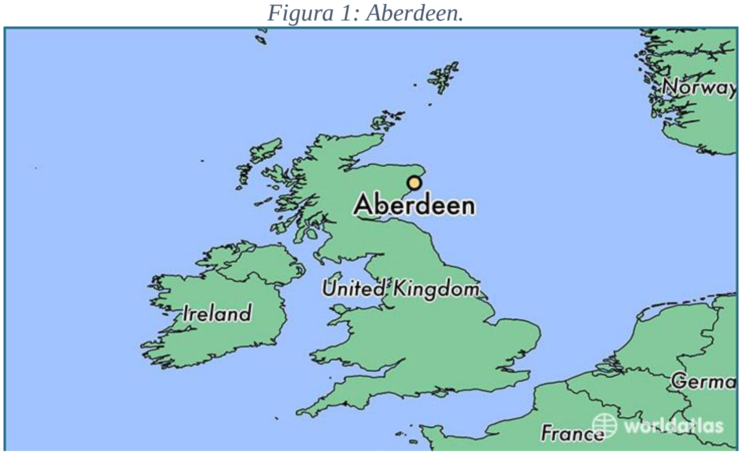
Com base nos exemplos citados, fica clara a necessidade do historiador de estar atento à origem das informações que tem acesso, além de fazer uma análise crítica em diversas fontes históricas, para não cair no erro de analisar fontes manipuladas ou incompletas.

Essa pesquisa se iniciou utilizando uma fonte histórica terciária, na qual tínhamos a tradução de um livro originalmente em inglês, que continha algumas considerações e traduções de partes da obra do matemático James Gregory. Como o objetivo da pesquisa era compreender e apresentar as principais contribuições de Gregory para o Cálculo Integral, em especial à proposição XXXII, achamos pertinente recorrer a fontes históricas primárias, ou seja, ir em busca da obra original do autor e fazermos nossa própria tradução e interpretação. Portanto, nossa principal fonte foi a obra *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (James Greory, 1667), encontrada, usando a busca pela internet, na *Biblioteca Nazionale Centrale de Firenze* .

## 3. Uma versão sobre a biografia de James Gregory

A biografia de James Gregory (1638-1675) que aqui trazemos, foi baseada na tradução de O'Connor e Robertson (2000). De acordo com estes autores, Gregory nasceu em uma pequena paróquia no rio Dee, a cerca de quinze quilômetros a oeste de Aberdeen, na Escócia, como pode ser visto na figura 1.

*Figura 1: Aberdeen.*




*Fonte 1: http//www.thewineabe.com/search/Scotland*

Pertenceu a uma família instruída, com a qual aprendeu matemática e tinha conhecimento da obra *Os Elementos*, de Euclides. Estudou durante quatro anos na Itália, onde conheceu os métodos italianos sobre indivisíveis, e foi professor na universidade de *St Andrews* e na universidade de *Edimburgo*.

*Figura 2: Imagem atribuída a James Gregory*

*Fonte 2: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Gregory.html*

Ainda segundo O'Connor e Robertson (2000), Gregory começou a estudar sobre ótica e construção de telescópios e foi encorajado pelo irmão a escrever o livro *Optica Promota*[2] (1663), onde escreveu no prefácio: "Movido por certo ardor juvenil e encorajado pela invenção da inequação elíptica[3], me vi rodeado com essas especulações ópticas, entre as quais a demonstração do telescópio."[4]

O livro começa com 5 postulados e 37 definições e fornece 59 teoremas sobre a reflexão e a refração da luz. Seguem proposições sobre astronomia matemática discutindo paralaxe, trânsitos e órbitas elípticas. Em seguida Gregory dá detalhes de sua invenção, um telescópio de reflexão, o qual usa um espelho primário côncavo, que converge a luz para um foco de um espelho secundário côncavo elipsoidal, para focalizar as imagens de um tubo de telescópio curto. A reflexão dos raios de luz da sua superfície converge para o segundo foco do espelho elipsoidal que está atrás do espelho principal. Há um furo central no espelho principal através do qual a luz passa e é levada ao foco por uma lente ocular. O tubo do telescópio gregoriano é, portanto, mais curto que a soma dos distâncias focais dos dois espelhos. Sua ideia era usar espelhos e lentes em seu telescópio. Ele mostrou que a combinação funcionaria mais eficazmente do que um telescópio que usava apenas espelhos ou apenas lentes (O'Connor e Robertson, 2000).

*Figura 3: Ilustração do telescópio Gregoriano*

*Fonte 3: //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6d/Lanature1873_telescope_gregory.png*

Entretanto, o livro trazia apenas uma descrição teórica do telescópio, uma vez que esse ainda não havia sido construído pela falta de habilidade na fabricação de lentes e espelhos. Dez anos após a publicação de Gregory, graças ao interesse do cientista Robert Hooke, foi possível a fabricação bem-sucedida do primeiro telescópio gregoriano (O'Connor e Robertson, 2000).

---

[2] "Os avanços da ótica" [tradução nossa]

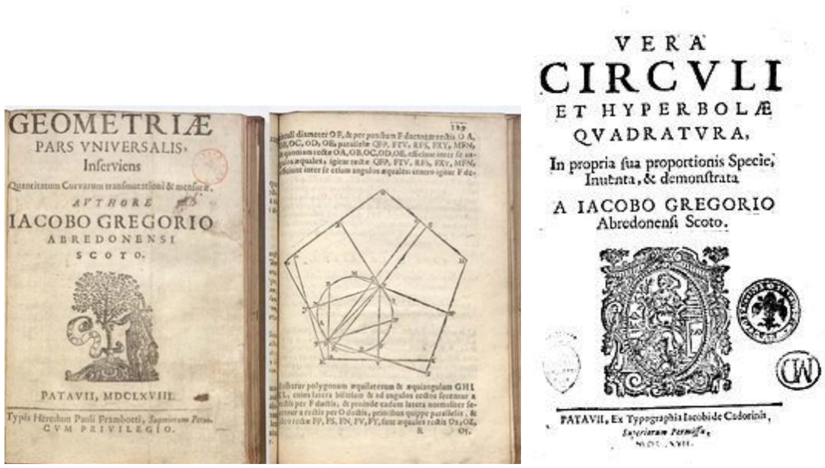
[3] A referência à "inequação elíptica" se refere as descobertas de Kepler. Gregory, em *Optica Promota*, descreve o primeiro telescópio de reflexão, hoje chamado de telescópio gregoriano.

[4] Traduzido de O'Connor e Robertson (2000), "Moved by a certain youthful ardour and emboldened by the invention of the elliptic inequality, I have girded myself with these optical speculations, chief among which is the demonstration of the telescope."

Em 1664, Gregory foi para a Itália, onde passou os próximos três anos, e se instalou em Pádua. Foi durante esse tempo que Gregory entrou em contato com a escola dos geômetras italianos, particularmente a de Cavalieri, cujo método dos indivisíveis o levaria para o Cálculo Integral. Em Pádua, ele trabalhou com Angeli[5], que o influenciou (O'Connor e Robertson, 2000).

Seus principais trabalhos, publicados enquanto ainda estava em Pádua, são a *Vera circuli et hyperbolae quadratura*[6] (1667) e *Geometriae pars universalis*[7] (1668). Em *Vera Circuli*, pretendia provar uma propriedade sobre a natureza transcedental[8] dos números π e *e*. Apesar de seus argumentos conterem erros sutis, estes não diminuim o trabalho e a coleção de ideias contidas na obra, tais como: convergência, funcionalidade, funções algébricas, funções transcendentais, etc. Em *Geometriae pars universalis*, Gregory afirma ser "[...] uma primeira tentativa de escrever um livro-texto de forma sistemática sobre o que devemos chamar de cáculo" e o mesmo continha resultados muito significativos em análise infinitesimal (O'Connor e Robertson, 2000).

*Figura 4: Publicações de James Gregory*




*Fonte 4: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Bookpages/Gregory7.gif e https://library.si.edu/sites/default/files/media/adoptable_books/adopt-gregory-2.jpg*

[5] Stephano degli Angeli era um matemático italiano que estudava sobre infinitesimais, com ênfase na quadratura de espirais generalizadas, parábolas e hipérboles.

[6] "Verdadeira quadratura do círculo e da hipérbole"

[7] "Parte da geometria universal"

[8] Um número α é algébrico quando é possível encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual α seja raiz. Um número que não é algébrico é denominado transcendente.

Este livro, *Geometriae pars universalis,* contém a primeira prova conhecida de que o método de tangentes (diferenciação) é inverso ao método de quadraturas (integração). Gregory mostra como transformar uma integral, por uma mudança de variável, e apresenta a ideia que $x \rightarrow x - O(x)$, ideia essa que é base das fluxões de Newton. Newton e Gregory estavam trabalhando as ideias básicas do cálculo ao mesmo tempo, assim como outros matemáticos (O'Connor e Robertson, 2000).

James Gregory também foi responsável por fazer a expansão em série infinita de *arctg (x), tg (x)* e *arcsec (x)* em 1667 e tentou demonstrar que a quadratura euclidiana do círculo era impossível pela série

$$\text{arctg(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

série essa que desenvolveu um importante papel no cálculo do valor do π.

Atualmente, temos conhecimento de que em 1668, Gregory estava completamente familiarizado com as expansões em série de seno, cosseno e tangente. Ele também estabeleceu:

$$\int sec(x)\,dx = log(sec(x) + tg(x))$$

que resolveu um problema de longa data na época. Ele publicou *Geometriae pars universalis* como um contra-ataque à Huygens. Embora ele não tenha divulgado seus métodos no pequeno tratado, ele discutiu tópicos, incluindo várias expansões de séries, a integral da função logarítmica e outras ideias relacionadas (O'Connor e Robertson, 2000).

Também durante o seu tempo em Londres, no verão de 1668, Gregory compareceu a reuniões da *Royal Society* e foi eleito membro da Sociedade no dia 11 de junho do mesmo ano. Ele apresentou vários trabalhos à Sociedade sobre uma variedade de tópicos, incluindo astronomia, gravitação e mecânica (O'Connor e Robertson, 2000).

## 4. O uso do método da exaustão por Gregory

O *método da exaustão*, creditado a Eudoxo (390 - 337 a.E.C.[9]), foi utilizado e aperfeiçoado por Arquimedes de Siracura (287 – 212 a.E.C.). O método

> [...] consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, como um círculo, e ir dobrando o número de lados até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada. Arquimedes propôs um refinamento desse método,

[9] Usaremos a.E.C. (antes da Era Comum) para neutralizar conotações religiosas. (ROQUE, 2012, p.23)

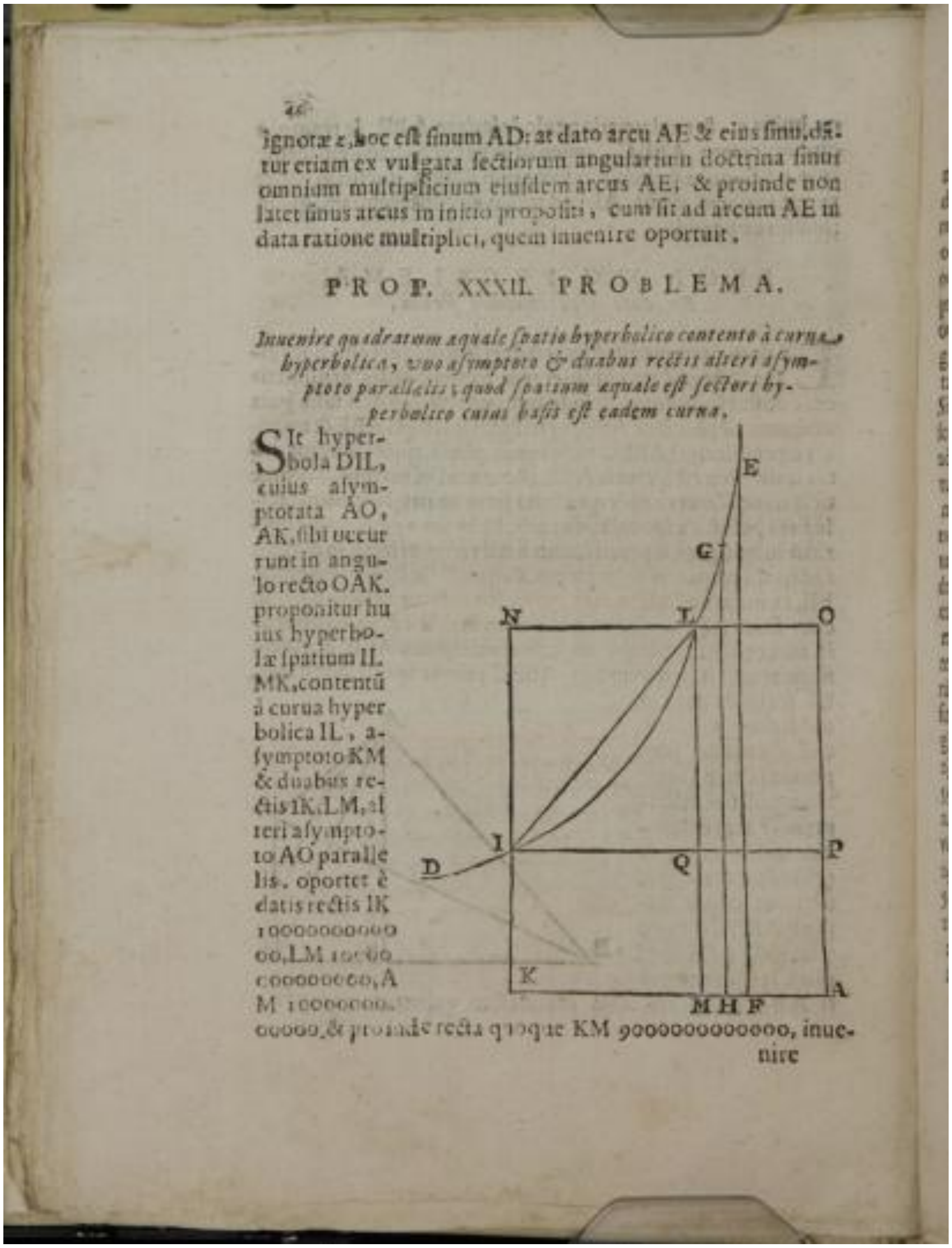
> comprimindo a figura entre duas outras cujas áreas mudam e tendem para a da figura inicial, uma crescendo e outra decrescendo. A área de um círculo, por exemplo, era envolvida por polígonos inscritos e circunscritos, de modo que, aumentando-se o número de lados, suas áreas se aproximavam da área da circunferência. Ou seja, a diferença entre as áreas dos dois polígonos deve poder ser tornada menor do que qualquer quantidade dada quando o número de lados aumenta. (ROQUE, 2012, p.203)

Até meados do Século XVII, muitos matemáticos ainda se baseavam no método de demonstração de Arquimedes, e assim ocorreu com James Gregory. Segundo Baron e Bos (1985, p.43), a obra *Vera circuli et hyperbolae quadratura* é a obra mais original dele, preocupou-se em estender e generalizar o método da exaustão, onde a quantidade desejada era inserida entre sequências de figuras inscritas e circunscritas. O autor estava muito envolvido com a mentalidade clássica, o que ficou claro ao analisar a proposição a seguir, suas demonstrações eram geométricas e verbais, sem desenvolver algebricamente a mesma. Ele "esboçou o início de uma teoria de convergência para tais seqüências, isto é, ele tentou definir condições segundo as quais era possível assumir que

$$L = \lim_{n\to\infty}(I_n) \; = \; \lim_{n\to\infty}(C_n)\text{''}.$$

As informações obtidas em fontes terciárias nos levou a investigar a proposição abaixo, uma vez que a mesma foi usada como exemplo do método de demonstração dito.

### 4.1. Texto original e tradução da Proposição XXXII de Gregory



46

ignotæ e, hoc est finum AD: at dato arcu AE & eius finu, datur etiam ex vulgata sectionum angularium doctrina finus omnium multiplicium eiusdem arcus AE; & proinde non latet finus arcus in initio propositi, cum sit ad arcum AE in data ratione multiplici, quem inuenire oportuit.

PROP. XXXII. PROBLEMA.

*Inuenire quadratum æquale spatio hyperbolico contento à curua hyperbolica, vno asymptoto & duabus rectis alteri asymptoto parallelis; quod spatium æquale est sectori hyperbolico cuius basis est eadem curua.*

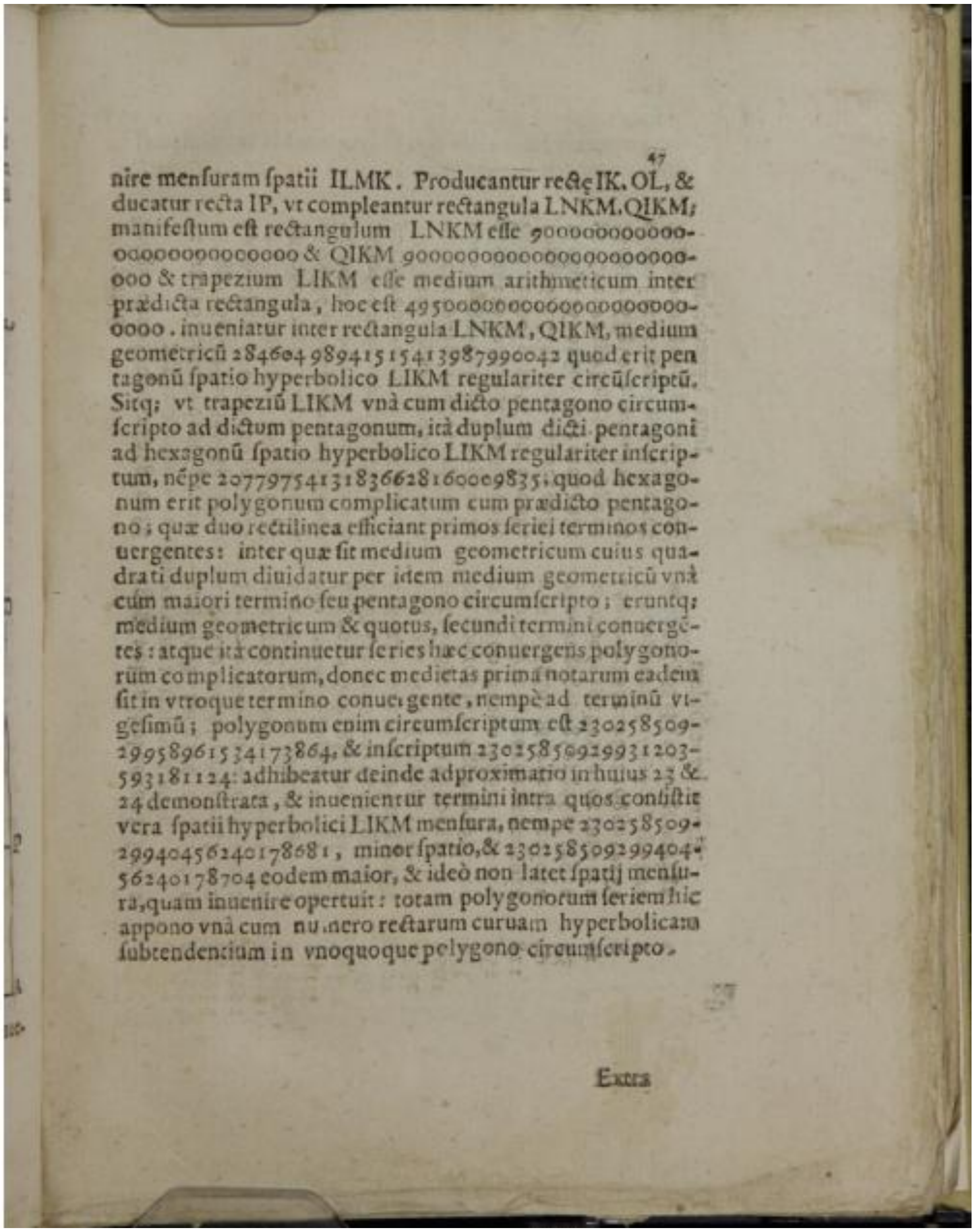
Sit hyperbola DIL, cuius asymptota AO, AK, sibi occurrunt in angulo recto OAK. proponitur huius hyperbolæ spatium ILMK, contentũ à curua hyperbolica IL, asymptoto KM & duabus rectis IK, LM, alteri asymptoto AO parallelis. oportet è datis rectis IK 1000000000000, LM 1000000000000, AM 100000000000, & proinde recta quoque KM 900000000000, inuenire

PROP. XXXII. PROBLEMA

*Encontrar um quadrado cuja área seja igual ao espaço hiperbólico sob a curva hiperbólica. Com duas linhas retas paralelas às assíntotas, a área é a mesma quando a base é igual à medida desse espaço de uma seção hiperbólica.*

Seja *DIL* uma hipérbole com assíntotas *AO* e *AK* perpendiculares em *OAK*. Considere o espaço hiperbólico *ILKM*, formado pela curva hiperbólica *IL*, assíntotas *KM* e as retas *IK* e *LM* paralelas à assíntota *AO*. É necessário dar as distâncias referidas para as retas: *IK* = 1.000.000.000.000, *LM* = 10.000.000.000.000, *AM*=1.000.000.000.000, e consequentemente, *KM*=9.000.000.000.000[10], queremos encontrar a medida do espaço *LIKM*.

[10] IK=$10^{12}$, LM=$10^{13}$, AM=$10^{12}$ e KM=$9.10^{12}$



47

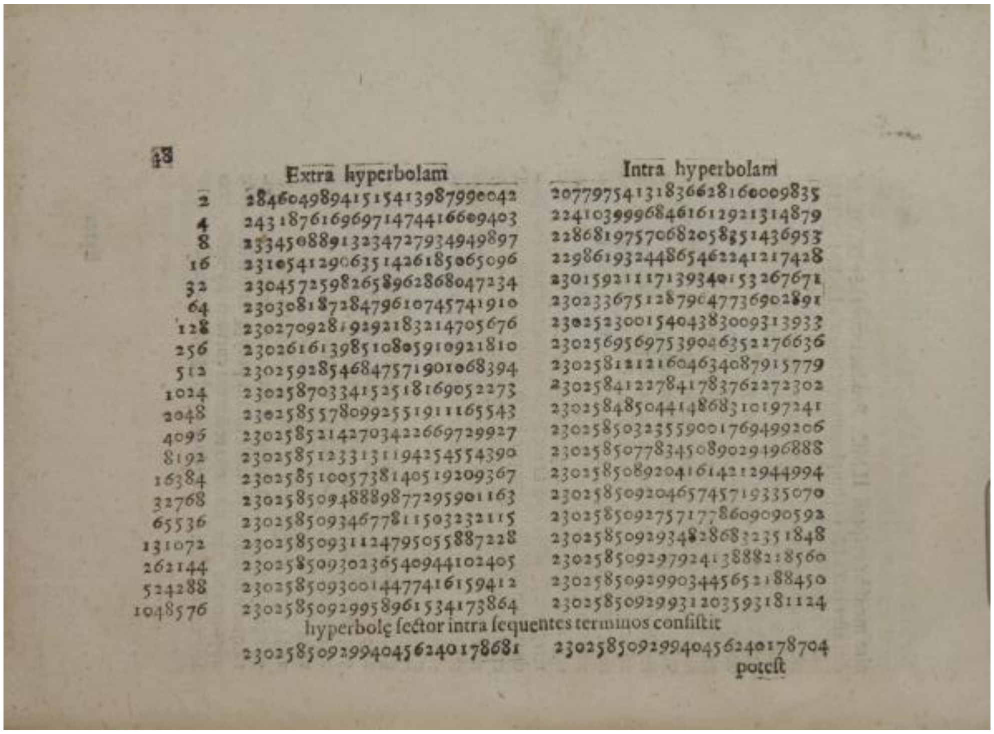
nire menſuram ſpatii ILMK. Producantur rectę IK, OL, & ducatur recta IP, vt compleantur rectangula LNKM, QIKM; manifeſtum eſt rectangulum LNKM eſſe 9000000000000000000000000 & QIKM 900000000000000000000000000 & trapezium LIKM eſſe medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc eſt 4950000000000000000000000. inueniatur inter rectangula LNKM, QIKM, medium geometricũ 28460498941515413987990042 quod erit pentagonũ ſpatio hyperbolico LIKM regulariter circũſcriptũ. Sitq; vt trapeziũ LIKM vnà cum dicto pentagono circumſcripto ad dictum pentagonum, ità duplum dicti pentagoni ad hexagonũ ſpatio hyperbolico LIKM regulariter inſcriptum, nẽpe 20779754131836628160009835; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos ſeriei terminos conuergentes: inter quæ ſit medium geometricum cuius quadrati duplum diuidatur per idem medium geometricũ vnà cum maiori termino ſeu pentagono circumſcripto; eruntq; medium geometricum & quotus, ſecundi termini conuergẽtes: atque ità continuetur ſeries hæc conuergens polygonorum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem ſit in vtroque termino conuergente, nempè ad terminũ vigeſimũ; polygonum enim circumſcriptum eſt 23025850929958961534173864, & inſcriptum 23025850929931203593181124: adhibeatur deinde adproximatio in huius 23 & 24 demonſtrata, & inuenientur termini intra quos conſiſtit vera ſpatii hyperbolici LIKM menſura, nempe 23025850929940456240178681, minor ſpatio, & 23025850929940456240178704 eodem maior, & ideò non latet ſpatij menſura, quam inuenire opertuit: totam polygonorum ſeriem hic appono vnà cum numero rectarum curuam hyperbolicam ſubtendentium in vnoquoque polygono circumſcripto.

Extra

Dadas as retas *IK*, *OL* e traçando uma *IP*, de modo que complete os retângulos *LNKM* e *QIKM*. Mas é claro que a área dos retângulos são $LNKM=90.10^{24}$ e $QIKM=9.10^{24}$ e que a área do trapézio *LIKM* é a média aritmética entre as medidas acima, então *LIKM=49.500.000.000.000.000.000.000.000.* Entre os retângulos *LNKM* e *QIKM* é encontrada a média geométrica igual a *28.460.498.941.515.413.987.990.042*, que será a área do pentágono regularmente circunscrito no espaço hiperbólico *LIKM*. Assim, o trapézio *LIKM*, junto com o dito pentágono circunscrito [está] para o dito pentágono, assim como o dobro do dito pentágono [está] para o hexágono regularmente inscrito no espaço hiperbólico *LIKM*, que mede[11] *20.779.754.131.836.628.160.009.835*. Dessa forma temos as áres do hexágono regularmente inscrito e do pentágono dito acima, que serão os primeiros termos da série convergente. O mesmo é feito entre as médias geométricas pela qual o dobro de seu quadrado é divido pela mesma média geométrica somado ao maior termo, ou ao pentágono circunscrito. E esta dará a média geométrica e será o segundo termo convergente. E, desta forma, esta série de polígonos pode ser continuada, ao passo que a primeira metade se torna a mesma em ambos os lados, até o final da convergência. A saber, o vigésimo termo, onde o polígono circunscrito é *23.025.850.929.958.961.534.173.864* e o inscrito, *23.025.850.929.931.203.593.181.124.* A aproximação utilizada é a demonstrada nas proposições *23* e *24* e a partir dos termos pode ser encontrada a medida do espaço hiperbólico *LIKM*, delimitada abaixo por *23.025.850.929.940.456.240.178.681* e acima por *23.025.850.929.940.456.240.178.704*. Acrescento aqui, além da série dos

[11] A palavra original em latim é *népe*, traduzimos para *mede* pelo contexto da frase.

polígonos, o número de linhas subentendendo a curva hiperbólica em qualquer polígono circunscrito. [12]



48

| | Extra hyperbolam | Intra hyperbolam |
|---|---|---|
| 2 | 28460498941515413987990042 | 20779754131836628160009835 |
| 4 | 24318761696971474416609403 | 22410399968461612921314879 |
| 8 | 23345088913234727934949897 | 22868197570682058351436953 |
| 16 | 23105412906351426185065096 | 22986193244865462241217428 |
| 32 | 23045725982658962868047234 | 23015921117139340153267671 |
| 64 | 23030818728479610745741910 | 23023367512879047736902891 |
| 128 | 23027092819292183214705676 | 23025230015404383009313933 |
| 256 | 23026161398510805910921810 | 23025695697539046352276636 |
| 512 | 23025928546847571901068394 | 23025812121604634087915779 |
| 1024 | 23025870334152518169052273 | 23025841227841783762272302 |
| 2048 | 23025855780992551911165543 | 23025848504414868310197241 |
| 4096 | 23025852142703422669729927 | 23025850323559001769499206 |
| 8192 | 23025851233131194254554390 | 23025850778345089029496888 |
| 16384 | 23025851005738140519209367 | 23025850892041614212944994 |
| 32768 | 23025850948889877295901163 | 23025850920465745719335070 |
| 65536 | 23025850934677811503232115 | 23025850927571778609090592 |
| 131072 | 23025850931124795055887228 | 23025850929348286832351848 |
| 262144 | 23025850930236540944102405 | 23025850929792413888218560 |
| 524288 | 23025850930014477416159412 | 23025850929903445652188450 |
| 1048576 | 23025850929958961534173864 | 23025850929931203593181124 |

hyperbolę ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

23025850929940456240178681 23025850929940456240178704

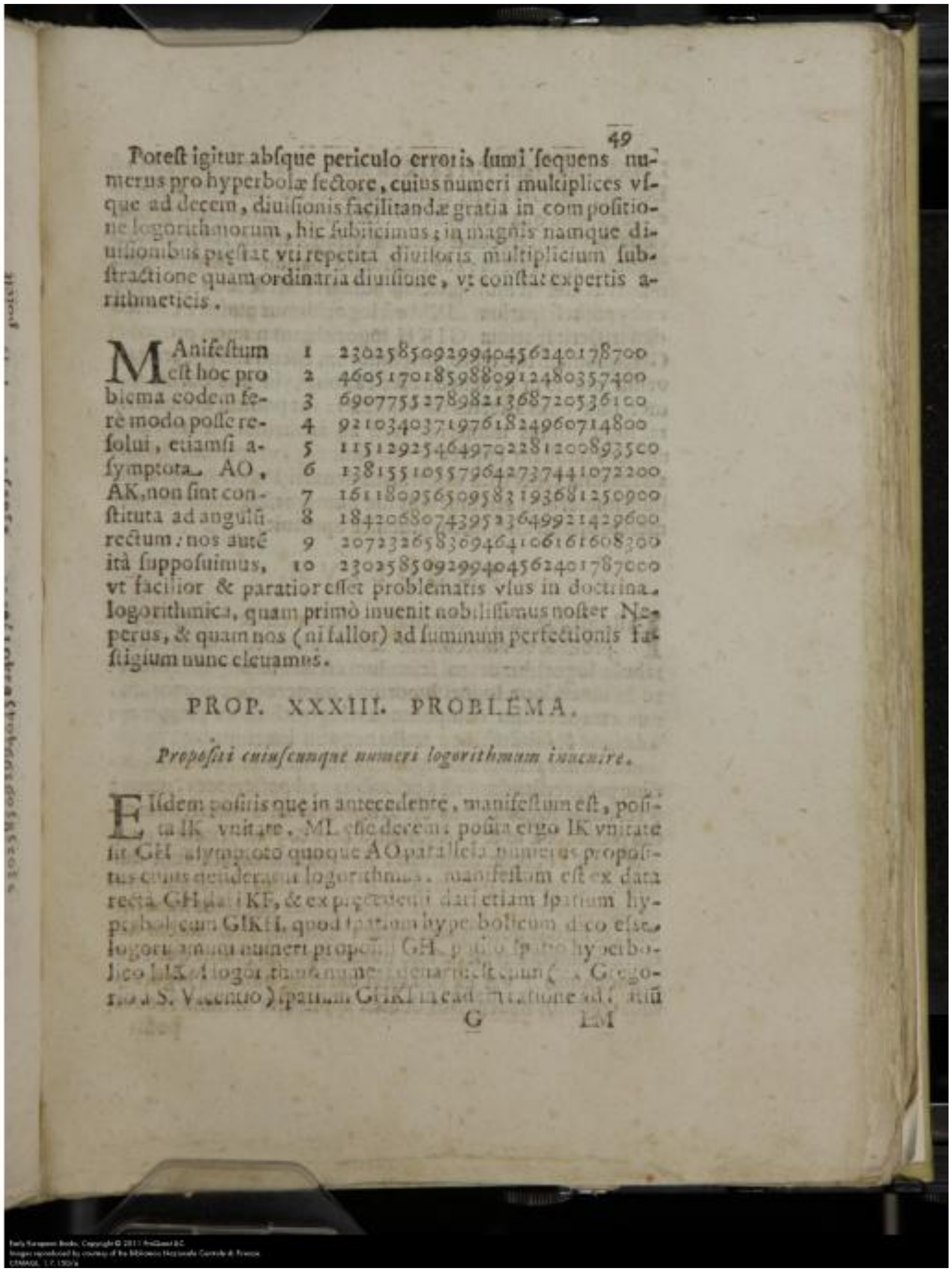
poteſt

[12] Proposição 23: Sejam *A* e *B* dois polígonos complexos com *A* circunscrito no setor de uma hipérbole e *B* inscrito. Uma série convergente destes polígonos complexos pode ser continuada de acordo com o nosso método de desenhar o subconjunto, de modo que os polígonos circunscritos são *A*, *C*, *E*, *K*, etc. e os inscritos são *B*, *D*, *F*, *L*, etc.
Proposição 24: Pelas mesmas suposições acima, eu reivindico que *Z*, que é um setor de hipérbole, é menor do que o menor dos dois continuamente proporcional meios aritméticos de *A* e *B*. Disponível em https://github.com/jacobw56/Vera-Circuli-EN/blob/master/document.tex\#L1

| | **Extra hyperbolam** | **Intra hyperbolam** |
|---|---|---|
| **2** | 28460498941515413987990042 | 20779754131836628160009835 |
| **4** | 24318761696971474416609403 | 22410399968461612921314879 |
| **8** | 23345088913234727934949897 | 22868197570682058351436953 |
| **16** | 23105412906351426185065096 | 22986193244865462241217428 |
| **32** | 23045725982658962868047234 | 23015921117139340153267671 |
| **64** | 23030818728479610745741910 | 23023367512879647736902891 |
| **128** | 23027092819292183214705676 | 23025230015404383009313933 |
| **256** | 23026161398510805910921810 | 23025695697539046352276636 |
| **512** | 23025928546847571901068394 | 23025812121604634087915779 |
| **1024** | 23025870334152518169052273 | 23025841227841783762272302 |
| **2048** | 23025855780992551911165543 | 23025848504414868310197241 |
| **4096** | 23025852142703422669729927 | 23025850323559001769499206 |
| **8192** | 23025851233131194254554390 | 23025850778345089029496888 |
| **16384** | 23025851005738140519209367 | 23025850892041614212944994 |
| **32768** | 23025850948889877295901163 | 23025850920465745719335070 |
| **65536** | 23025850934677811503232115 | 23025850927571778609090592 |
| **131072** | 23025850931124795055887228 | 23025850929348286832351848 |
| **262144** | 23025850930236540944102405 | 23025850929792413888218560 |
| **524288** | 23025850930014477416159412 | 23025850929903445652188450 |
| **1048576** | 23025850929958961534173864 | 23025850929931203593181124 |

O setor hiperbólico situa-se entre os seguintes termos

23025850929940456240178681     23025850929940456240178704



49

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cuius numeri multiplices vſque ad decem, diuiſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubiicimus; in magnis namque diuiſionibus præſtat vti repetita diuiſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diuiſione, vt conſtat expertis arithmeticis.

MAnifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolui, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad anguluũ rectum; nos autẽ ità ſuppoſuimus,

| | |
|---|---|
| 1 | 23025850929940456240178700 |
| 2 | 46051701859880912480357400 |
| 3 | 69077552789821368720536100 |
| 4 | 92103403719761824960714800 |
| 5 | 115129254649702281200893500 |
| 6 | 138155105579642737441072200 |
| 7 | 161180956509583193681250900 |
| 8 | 184206807439523649921429600 |
| 9 | 207232658369464106161608300 |
| 10 | 230258509299404562401787000 |

vt facilior & paratior eſſet problematis vſus in doctrina logorithmica, quam primò inuenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc eleuamus.

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

*Propoſiti cuiuſcunque numeri logorithmum inuenire.*

EIſdem poſitis quæ in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK vnitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK vnitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cuius deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data recta GH dari KF, & ex præcedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri [illegible] (ex Gregorio à S. Vincentio) ſpatium GHKI in eadem [illegible] ad [illegible]

G LM

É, portanto, possível, sem perigo de erro, assumir o seguinte número para o setor da hipérbole, dos quais os múltiplos do número até 10, facilitando a divisão graças à composição do logaritmo, revelado por esta. De fato, na divisão longa, é melhor usar subtração repetida para repetição de divisão do que a divisão comum, como qualquer mestre de aritmética concordará.

Claro que este problema pode ser resolvido da mesma forma se as assíntotas $AO$ e $AK$ não formarem ângulo reto. No entanto nós podemos assumir isso para que o problema se torne mais fácil e mais usado na doutrina dos logaritmos, o qual foi primeiro descoberto por nosso notável Napier, e o qual nos tem elevado (a menos que eu esteja enganado) ao mais alto nível de perfeição.

| | |
|---|---|
| 1 | 2302585092994045624017870O |
| 2 | 4605170185988091248035740O |
| 3 | 6907755278982136872053610O |
| 4 | 9210340371976182496071480O |
| 5 | 1151292546497022812008935OO |
| 6 | 1381551055796427374410722OO |
| 7 | 1611809565095831936812509OO |
| 8 | 1842068074395236499214296OO |
| 9 | 2072326583694541061616083OO |
| 10 | 2302585092994045624017870OO |

### 4.2 Interpretação da Proposição

O autor assume que a figura NOAK é um quadrado de lado 10.000.000.000.000. Não conseguimos provar com régua e compasso que a figura presente no livro é, de fato, um quadrado. Porém ao longo do texto ele aponta outras características que confirmam isso, como o fato de que os ângulos A, K e N sejam retos.

Para encontrar a medida do espaço *LIKM*, podemos somar a área do retângulo *KIQM* à área do triângulo *LIQ*. Daí, temos que:

$$A(LIKM) = 9.10^{24} + \frac{9.10^{12}.9.10^{12}}{2} = 9.10^{24} + 40{,}5.\,10^{24} = 49{,}5.\,10^{24}$$

$$LNKM = KM.LM$$

$$A = 9.\,10^{12}.\,10.\,10^{12} = 90.\,10^{24}$$

$$QIKM = KM.IK$$

$$A = 9.\,10^{12}.\,1.\,10^{12} = 9.\,10^{24}$$

$$Mg = \sqrt{90.\,10^{24}.\,9.\,10^{24}} = \sqrt{810.\,10^{24}} =$$
$$= 28.460.498.941.515.413.987.990.042$$

Daí, temos que 28.460.498.941.515.413.987.990.042 é a área de um pentágono regularmente circunscrito no espaço *LIKM*. Esta é a primeira das áreas contida na figura 7, em relação aos polígonos circunscritos à hipérbole.

Em seguida o autor utiliza a seguinte proporção para encontrar a área de um hexágono regularmente inscrito no espaço hiperbólico *LIKM*:

$$\frac{A_t + A_p}{A_p} = \frac{2.A_p}{A_h}$$

Onde $A_t$ representa a área do trapézio LIKM, $A_p$ a área do pentágono circunscrito encontrado e $A_h$ a área do hexágono que se pretende calcular. Daí:

$$\frac{(49.500.000.000.000.000.000.000.000) + (28.460.498.941.515.413.987.990.042)}{28.460.498.941.515.413.987.990.042}$$
$$= \frac{2.(28.460.498.941.515.413.987.990.042)}{A_h}$$

Então $A_h = 20.779.754.131.836.628.160.009.835$, que é exatamente a primeira área contida na figura 7, em relação aos polígonos inscritos.

Observe que a igualdade

$$\frac{A_t + A_p}{A_p} = \frac{2.A_p}{A_h}$$

pode ser escrita como:

$$A_h = \frac{2.{A_p}^2}{A_t + A_p}$$

A mesma coisa é feita para os valores seguintes. Para encontrar a área do polígono circunscrito, Gregory calcula a média geométrica de dois polígonos de mesmo lado, sendo um circunscrito e um inscrito. Por exemplo, na terceira linha, o valor dado na primeira coluna é equivalente a média geométrica dos dois valores encontrados na segunda linha:

$$\sqrt{(24318761696971474416609403).(22410399968461612921314879)}$$
$$= 23345088913234727934949897$$

Já nas figuras inscritas, Gregory utiliza proporções, nas quais substituímos o $A_h$ pela área de um polígono que queremos descobrir e $A_t$ e $A_p$ pelas duas áreas circunscritas anteriores. Por exemplo, a área do políígono inscrito dada na terceira linha pode ser obtido utilizando os polígonos circunscritos da linha 2 e 3:

$$A_3 = \frac{2.{a_3}^2}{a_3 + a_2}$$

onde $A_3$ representa a área do terceiro polígono e $a_2$ e $a_3$ representam as áreas dos segundo e terceiro polígonos inscritos, respectivamente. Daí, temos:

$$A_3 = \frac{2.(233450889132347879349498 97)^2}{23345088913234787934949897 + 24318761696971474416609403}$$
$$= 22868197570682058351436953$$

## 5. Algumas Considerações

O trabalho foi desenvolvido como pesquisa de Iniciação Científica em História da Matemática na Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Para a compreeensão da área escolhida como investigação científica foi necessária aprendizagem sobre as diferentes fontes históricas, e como as interpretar. Notamos diferenças entre as fontes primárias e terciárias, fazendo-nos perceber que o trabalho nesta área requer atenção e cuidados diferentes das demais.

A pesquisa com fontes primárias permite, uma desmistificação de cientístas que são ditos excepcionais, uma vez que ao voltar o olhar para os trabalhos originais, podemos perceber que apesar de científico e matemático, é visível que muitos cometiam erros ou apresentavam demonstrações que continham falhas. Uma Matemática quase que empírica, bem diferente da qual nos fazem ter ideia hoje em dia. Fazer a tradução do texto original nos possibilitou novos caminhos nos fazendo permanecer neste campo de trabalho dentro da área de História da Matemática para futuros trabalhos.

**Bibliografia**

AZEVEDO, Fernando (org.). 1994 (2ª Ed.). *As ciências no Brasil*, Rio de Janeiro, Editora UFRJ.
BARON, Margareth E. *Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do Cálculo*. Margaret E. Baron e H. J. M. Bos. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e M.a José M. M. Mendes. Brasília, Editora Universidade de Brasília. 1985, c1974.
CAMENIETZKI, Carlos Ziller. 1995. O Cometa. O Pregador e o Cientista Antonio Vieira e Valentin Stansel observam o céu da Bahia no século XVII. *Anais do V Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*. Ouro Preto.
D'AMBROSIO, Ubiratan. 1998. *Mathematics in the 19th and the first half of the 20th century in South America*. Conference presented at the AMS-MAA Joint Annual Meeting Special Session on History of Mathematics III, in Baltimore, January 10, 1998.
D'AMBROSIO, Ubiratan. 2000. History of Mathematics in the Americas. (to be published)
_____________________. 2001. A Matemática na época das grandes navegações e início da colonização. In: *Revista Brasileira de História da Matemática*, **vol. I, n° 1**. 3-20.
GREGORY, James. *Optica Promota*. Londres, 1663.
_______________. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Pádua, 1667
_______________. *Geometriae Pars Universalis*. Pádua, 1668.
KLISINSKA, Anna. *The Fundamental Theorem of Calculus: A case study into te didactic transposition of proof*. Luleå, 2009.
LEAHY, Andrew. *An Introduction to James Gregory's Geometriae Pars Universalis*. Knox College, 2001.
MELCHIORS, Angeline. SOARES, Maricélia. *História do Cálculo Diferencial e Integral*. Maiêutica - Curso de Matemática.
NEWTON, Isaac. 1687. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London.
NOBRE, Sergio. *Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática*. In: Ciência e educação, v. 10, n.3, p. 531-543, 2004.
SAVIANI, Dermeval. *Breves considerações sobre fontes para a história da educação*. Revista HISTEDBR On-line, Campinas, n. especial, p. 28-35, ago. 2016.
O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. MacTutor History of Mathematics (2000). *James Gregory*. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory.html . Acesso em: 24 mai. 2018.
OLIVEIRA, João Milton de. *A Irracionalidade e Transcendência do Número π*. Rio Claro: [s.n.], 2013. p. 21.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Jahar, 2012.

SILVA, Circe Mary Silva. 1999. *A matemática positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES.

TURNBULL, H. W. *James Gregory, in The James Gregory Tercentenary Memorial Volume*. The Mathematical Gazette. Vol. 24, No. 259 (May, 1940), pp. 125-129

**Thais de Souza Costa**
Departamento de Matemática – UFTM – campus de Uberaba – Brasil
**E-mail**: thaiscosta-@live.com

**Mônica de Cássia Siqueira Martines**
Departamento de Matemática – UFTM – campus de Uberaba - Brasil
**E-mail:** monica.siqueiramartines@uftm.edu.br