Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 6 nº 12 (outubro/2006 - março/2007) - pág. 111-125
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

LA FILOSOFÍA MATEMÁTICA DE KARL MARX EN LOS MANUSCRITOS DE 1881. UN ESBOZO

Fernando Flores Morador
Mario A. Natiello
Universidad de Lund, Suecia

(aceito para publicação em abril de 2006)

Resumen

Los textos matemáticos de Marx nos muestran una persona informada, con una familiaridad con las matemáticas comparable a la de los estudiantes de materias técnicas de hoy en día y con una clara intuición para reconocer los procesos de evolución del pensamiento humano, siendo partícipe y en cierta medida precursor de la línea de pensamiento *operativa* contemporanea.

Palabras-clave: matemática, cálculo diferencial, infinitésimos, Marx

Abstract

The mathematical manuscripts of Karl Marx reveal an informed reader, having a familiarity with mathematics comparable to that of engineering and science students of today and showing a clear intuition to recognize the processes of evolution of human thought, participating and in some sense anticipating the *operational* currents of today.

Keywords: mathematics, differential calculus, infinitesimals, Marx

1. Introducción

Karl Marx escribió una serie de manuscritos acerca de cuestiones matemáticas. Aunque algunas traducciones parciales al ruso de esos manuscritos ya habían aparecido en el año 1933, la primera publicación completa de los mismos data del año 1968. Fue entonces cuando los manuscritos matemáticos fueron publicados en forma completa bajo la dirección de la matemática S. A. Yanovskaya. Una traducción parcial al inglés de la publicación en ruso de Nauka Press, 1968, apareció en el año 1983 bajo el título "The

Mathematical Manuscripts of Karl Marx" (primera edición en inglés del material, de la New Park Publications Ltd, London). Es interesante notar que hay publicaciones de estos manuscritos de Marx en alemán (1974) e italiano (1975) anteriores a la versión en inglés.

Algunos de los manuscritos están bastante completos, mientras otros parecen ser notas o apuntes más o menos fragmentarios. La parte más completa trata del concepto de diferencial y de la derivada de una función de una variable. Aparentemente, la intención de Marx era escribir una "Historia del Cálculo Diferencial", iniciando con Newton y Leibniz, pasando por D'Alembert y terminando con Lagrange.[1]

La publicación de 1983 aparece acompañada de un prefacio escrito por la profesora Yanovskaya y contiene además un estudio del matemático E. Kolman, colaborador por otra parte de Yanovskaya en un estudio de la filosofía de las matemáticas de Hegel. Estos y otros textos interpretativos de la obra matemática de Marx se caracterizan por una visión a la que llamaríamos "soviética" de la obra de Marx. En ellos domina la exaltación a los méritos de Marx y otros "héroes" del marxismo, alternada con las referencias a los "errores" de Kant y Hegel, y siguen en general una visión positivista del desarrollo histórico. De más está decir que estas y otras interpretaciones similares nos parecen hoy anticuadas por lo cual no podemos sino recomendar la realización de nuevas lecturas de la filosofía matemática de Marx, lecturas liberadas de la carga del marxismo escolástico y en la cual la obra de Marx pueda estudiarse en relación a otras fuentes que las tradicionales.

Mientras que Hegel en su *Lógica* nos deja una filosofía de las matemáticas completa y madura, y Engels en el *Anti-Dühring* y *Dialéctica de la naturaleza* nos deja un filosofía de las ciencias (e indirectamente de las matemáticas) bastante desarrollada y sin duda clara en sus objetivos y fines, Marx, por el contrario, deja sólo esbozos difíciles de precisar en su alcance. Las dudas que conciernen a la filosofía matemática de Marx, atañen también a toda su concepción de la "dialéctica materialista" que opone a la dialéctica hegeliana y que como veremos se distingue de la noción que Engels profesaba. Se puede decir en general, que el lugar del pensamiento filosófico de Marx en la evolución filosófica general de Occidente es todavía una gran incógnita. Sin duda su pensamiento es la consecuencia de la herencia hegeliana, pero su conexiones con Kant y en especial con el desarrollo de la filosofía matemática posterior no ha sido estudiada.

2. Antecedentes filosóficos

2.1. La filosofía matemática de Hegel

Para Hegel las nociones matemáticas son el producto de la lógica del devenir del pensamiento absoluto o Idea absoluta. La noción de infinitud y por ende su análisis del calculo infinitesimal reflejan esta posición según la cuál lo finito no puede ser concebido sin lo infinito, lo estático sin lo dinámico, etc. El tratamiento más completo de su filosofía de las matemáticas lo encontramos en la *Ciencia de la Lógica* (escrito entre 1812 y 1816). Hegel distingue entre un infinito "malo" o metafísico, de origen filosófico y uno "bueno" o

[1] Una línea en la pág. 75 sugiere que en lugar de terminar con Lagrange, Marx habría considerado incluir las ideas de Cauchy, en la versión del abate Moigno. Ver más adelante.

instrumental surgido en la exitosa aplicación de la noción de infinitésimo en matemáticas. En este sentido, Hegel ve en las matemáticas un campo independiente del saber, con su propias leyes. En el cálculo infinitesimal, las matemáticas encuentran

> "...la *contradicción capital* insita en el *mismo método propio particular*, sobre el cuál reposa como ciencia en general. Pues el cálculo infinitesimal permite y exige procedimientos que la matemática, en las operaciones con magnitudes finitas, debe absolutamente rechazar; y al mismo tiempo trata magnitudes infinitas como cuantos finitos y quiere aplicar a aquéllas los mismos procedimientos que vale a éstos. Es un aspecto capital del perfeccionamiento de esta ciencia el haber alcanzado para las determinaciones transcendentes y el tratamiento de éstas, las formas del cálculo habitual."[2]

Veremos que Marx retoma de Hegel esta visón de las matemáticas como discurso independiente y autosuficiente. Engels por el contrario, rompe con Hegel para concebir las matemáticas como el producto más o menos abstracto del pensamiento naturalista. Que Marx y Engels sigan caminos filosóficos diferentes es algo que en la historia del marxismo no ha sido suficientemente considerado.

2.2. La filosofía científica de Engels

Para Engels, las matemáticas son la consecuencia de la abstracción de procesos reales de cambio. "Realidad" para Engels es sinónimo de "natural". El cálculo infinitesimal entonces es para Engels el producto abstracto de la comprensión de los *cambios* en la naturaleza. De alguna manera se anticipa aquí la idea engeliana de dialéctica, una versión simplificada y, si se quiere, superficial de la dialéctica hegeliana. Con Engels la dialéctica pasa a ser la "ciencia de las leyes más generales del cambio y del movimiento", sin embargo tampoco a Engels se le escapa la dificultad filosófica que supone el trabajo con la noción de "infinito":

> En tanto las matemáticas calculan magnitudes reales, pueden utilizar las nociones de infinitud sin vacilaciones. Para la mecánica terrestre la masa de la tierra es vista como infinitamente grande, del mismo modo que en astronomía la masa terrestre y la de los meteoritos correspondientes son vistos como infinitamente pequeños. [...] Pero tan pronto como los matemáticos se mudan en sus impugnables fortalezas abstractas, también llamadas "matemáticas puras", todas estas analogías son olvidadas y la infinitud se transforma en algo totalmente misterioso, y la forma en las operaciones [que] son llevadas a cabo se hace totalmente incomprensible, contradiciendo toda experiencia y toda razón. Las estupideces y absurdos comentarios con los que los matemáticos han excusado más que explicado su forma de operar, una forma de operar que curiosamente conduce siempre a resultados correctos, supera las más disparatadas fantasías de la filosofía de la naturaleza de Hegel.[3]

Subrayamos entonces que la filosofía matemática en Engels está subordinada a su *materialismo naturalista* y a un cierto tipo de reduccionismo pro el cual la matemática se

---

[2] Hegel, G.W.F. Ciencia de la Lógica. Tomo I. Solar, Hachette. 1968, página 212.

[3] Engels, F. *Dialectics of Nature*. Progress Publishers, Moscow. Página 271. Traducción propia.

comprenden como una ciencia de apoyo a las ciencias del mundo “real”.

2.3. La filosofía matemática de Marx

A diferencia de Engels, las matemáticas tienen para Marx una existencia propia, él concibe a las matemáticas como producto del pensamiento materialista pero sólo *en tanto cálculo*. En este sentido hay una diferencia muy clara entre las ideas de Marx y las de Engels. Digamos que todo parece indicar que ni Marx ni Engels comprendieron la naturaleza de estas diferencias, quizás debido a que Marx nunca llevó sus estudios al nivel de una formulación acabada y definitiva. Para Marx—como para Hegel—las matemáticas son un instrumento que no puede reducirse a su objeto de aplicación. Para Marx es ésta una ciencia en sí misma y como tal es autosuficiente e independiente de sus aplicaciones. Pero para Marx—a diferencia de Hegel—es además un *ciencia del cálculo*, del *álgebra* y como tal se resiste a toda reflexión metafísica. La obra del filósofo materialista siguiendo a Marx podría resumirse como el trabajo de limpieza de resabios metafísicos (es decir *esencialistas*) en matemáticas. Este “positivismo” de Marx, tan propio de su tiempo, se distingue a pesar de todo del reduccionismo positivista de Engels, según el cual las matemáticas solo tienen sentido en tanto ciencias de apoyo a las ciencias naturales.

Veremos que en Marx la noción de “cálculo” es la dominante y con ella la idea de que el cálculo es una práxis social teórica a la que se opone una filosofía esencialista estática. La idea de que la práctica matemática es una forma de la acción es por lo demás completamente ajena a Engels cuya idea de “acción” es mucho más simplista.

2.4. La noción de materialismo en Marx

Para poder comprender la filosofía matemática de Marx, se hace necesario considerar su comprensión del materialismo y de los problemas históricos heredados por Marx de la filosofía anterior. Los problemas centrales con los que Marx se enfrenta son *el nominalismo con sus problema inherentes*, el *problema del status de las ideas en un mundo material* y el del desarrollo de métodos que permitan *elucidar la verdad de la falsedad en historia y ciencias sociales*.

Como es sabido, más allá de algunos lugares comunes que poco nos dicen sobre la misma, la filosofía de Marx no es una filosofía *explícita*. La misma debe buscarse en textos que por lo general en lugar de explicarnos la realidad, nos demuestran “la” forma de entender el mundo. Los textos de Marx son en este sentido una *praxis teórica*. Ya en este sentido difieren Marx y Engels, en tanto para este último, todo parece ser explicable verbalmente. Los pocos textos explícitos de Marx deben buscarse en su correspondencia, en su obra inédita o en sus obras más tempranas. En los textos de juventud que culminan con las *Tesis sobre Feuerbach*, Marx usa todavía una terminología filosófica tradicional y se expresa en términos filosóficos comparables a los de su predecesores. Entre estos textos se encuentra *La Sagrada Familia*,[4] un texto en el cual Marx y Engels se dedican a la crítica del grupo de jóvenes hegelianos. Según Bruno Bauer y otros jóvenes hegelianos, el

---

[4] Karl Marx y Friedrich Engels. *The Holy Family or Critique of Critical Criticism. Against Bruno Bauer and Company*, 1844. Chapter VI. “d) Critical Battle Against French Materialism”. Traducción propia. http://www.marxists.org/archive/marx/works/1845/holy-family/index.htm.

materialismo de la Ilustración es un desarrollo de la idea de Spinoza sobre *sustancia*.[5] Contra esta noción reacciona Marx para quién el materialismo es una combinación del mecanicismo de Descartes y el empirismo de Bacon y Locke: “Hablando propiamente hay dos tendencias en el materialismo francés, una tiene su origen en Descartes, la otra en Locke.”[6]

Marx encuentra en el nominalismo inglés las formas materialistas más antiguas de la era moderna. Este materialismo es la consecuencia de la pregunta acerca de cómo es posible que la “materia piense”:

> El materialismo es el hijo natural de la Gran Bretaña. Ya el escolástico británico Duns Scotus se preguntaba: “¿Es posible que la materia piense?” En orden de conseguir esto se refugió en la omnipotencia divina convirtiendo a la teología en un abogado del materialismo. En cualquier caso Duns Scotus fue un nominalista y el nominalismo, la primera forma del materialismo, es dominante entre los escolásticos ingleses.[7]

El desarrollo continua según Marx de los nominalistas a Bacon, el fundador de la filosofía científica moderna: “El verdadero progenitor de materialismo inglés y de toda la ciencia experimental moderna es Bacon”;[8] para luego concretarse en la obra de Hobbes, aunque con este se transforma según Marx en una teoría misantrópica: “En su evolución posterior el materialismo termina siendo unilateral. Hobbes es quién sistematiza el materialismo de Bacon. El movimiento físico es subordinado al movimiento mecánico o matemático y la geometría es proclamada la reina de las ciencias. El materialismo se hace misantrópico.”[9]

A partir de aquí la filosofía materialista desarrolla problemas más o menos insalvables resumidos por Sidney Hook en el libro *From Hegel to Marx.* En esta obra Hook constata que el materialismo filosófico fue incapaz de desarrollar una epistemología propia: “El materialismo no fue capaz de desarrollar una teoría de la verdad. La sola existencia de ideas constituyó un problema insalvable al que se trató de resolver entendiéndolas como formas tenues de la materia.”[10] Para resolver parcialmente este problema es que Marx y Engels convierten la epistemología materialista en una *teoría de la acción,* en la cuál las consecuencias de la misma pasan a ser el elemento que garantiza la verdad resultante y las ideas aparecen entendidas como inseparables de esta acción constituyente.[11] La solución encontrada por Marx y Engels sin lograr resolver el problema del status ontológico de las ideas permitió resolver por lo menos el problema práctico de la elucidación de la verdad en situaciones concretas. De allí que sea perfectamente comprensible que Marx redujera el materialismo filosófico en matemáticas al impulso del álgebra, entendida como *práxis* en

---

5 Marx y Engels, *Sagrada familia*. Traducción propia.

6 Marx y Engels, *Sagrada familia*.

7 Marx y Engels, *Sagrada familia*.

8 Marx y Engels, *Sagrada familia*.

9 Marx y Engels, *Sagrada familia*.

10 Hook, Sidney. *From Hegel to Marx. Studies in the Intellectual Development of Karl Marx*. 1976. p.282.

11 Hook. Sid. 294.

las matemáticas. Veremos a continuación que esta posición tiene una historia anterior a Marx.

2.5. La dialéctica "materialista" de Marx

En *Das Kapital* Marx presenta la lógica del intercambio (comercial) de mercaderías de acuerdo a dos criterios fundamentales, el valor de *uso* y el valor de *cambio* de las mismas. El valor de cambio se establece de acuerdo a una *equivalencia lógica* entre términos basada en una *identidad numérica* oculta. Así, x metros de lienzo podrán ser cambiados por y alimentos. La relación entre x e y es lógica hasta que en el momento del cambio se transforma en una identidad numérica [$z = z$] en tanto x metros de lienzo son la expresión de z horas de trabajo social abstracto y en tanto y alimentos son también la expresión de z horas de trabajo social abstracto. La dialéctica materialista de Marx en *Das Kapital* reduce relaciones lógicas de equivalencia a relaciones numéricas creando de esta manera un "cálculo" (elemental) de las relaciones de intercambio económico.

En su filosofía matemática Marx actúa de una forma similar, convirtiendo procesos mentales complejos en relaciones mecánicas de cálculo.

2.6. La axiomática y el cálculo en la historia de las matemáticas y la lógica

La historia de la lógica y las matemáticas muestra dos tendencias muchas veces antagónicas: por una parte el *ideal axiomático* deductivo y por la otra, el *cálculo*. Como modelo típico de la primera de éstas tendencias se suele presentar la *geometría euclídea*, mientras que cómo ejemplo histórico típico de la segunda se suele presentar el *álgebra*. La historia de las ideas de las matemáticas y la lógica podría reducirse al seguimiento de dos tendencias manifiestas: la que maneja el ideal axiomático como un fin en sí mismo y la que ve en éstas la posibilidad de un instrumento de cálculo. Se podría afirmar que el modelo axiomático está de alguna manera naturalmente relacionado con un filosofía metafísica en la cuál las ideas matemáticas poseen una existencia ideal. Esta *idealidad* no impide su *realidad* sino que por el contrario la reafirma a través del idealismo filosófico. Por el contrario, el cálculo se asocia naturalmente a la filosofía árabe, al *nominalismo medieval cristiano* y más modernamente a las ideas de Wittgenstein y Lakatos. Creemos que la filosofía matemática de Marx puede asociarse a esta segunda tradición filosófica.

2.7. El ideal axiomático en matemáticas

El modelo axiomático trabaja buscando crear un sistema de verdades construido en dos niveles: el nivel de los axiomas y el nivel de los teoremas. Los axiomas constituyen las bases del sistema, verdades a las cuales se considera "primitivas", imposibles de reducir a otras. Hasta principios del siglo XIX se consideraba a los axiomas verdades evidentes y por lo tanto incuestionables, hoy son considerados como puntos de partida de la reflexión: Por un lado se considera que el pensador los puede elegir más o menos "a gusto"[12], mientras que por otro lado la actividad del pensador tiene una finalidad (la ciencia no es un pasatiempo de salón) y así se nos ofrece una posibilidad de evaluar si un sistema de axiomas es más o menos adecuado que otro.

[12] P-O. Löwdin: "Axioms are by choice" Clases magistrales 1968-1982, Universidad de Uppsala.

Por ejemplo la identidad ”A = A” es un axioma lógico clásico construido sobre la evidencia de que todo ”ser” es idéntico a si mismo. Durante mucho tiempo se creyó que la evidencia era una forma “segura” de la verdad. Esta idea debió ser abandonada cuando el célebre axioma de las paralelas de Euclides (según el cual por un punto exterior a una recta R, pasa una y solamente una recta R’ paralela a R) fue cuestionado. Se inició así el desarrollo de las geometrías no-euclídeanas, las cuales mostraron que era perfectamente posible construir sistemas axiomáticos modificando substancialmente el mencionado axioma de las paralelas.

Con el nombre de ”teorema” se denomina a toda conclusión obtenida a partir de los axiomas según ciertas reglas deductivas específicas consideradas válidas. Aún cuando las reglas de deducción pueden ser vistas como una forma de cálculo, éstas aparecen subordinadas al ideal axiomático en el modelo geométrico inspirado en Euclides. El trabajo productivo de las matemáticas consistiría entonces en la búsqueda de nuevos teoremas a los cuales se habrá de ”demostrar” conectando a éstos con los axiomas[13]. Por ”demostración” se entiende entonces, el proceso lógico válido mediante el cual se conecta un teorema con los axiomas de un sistema. Una vez ”puesta en evidencia” la conexión, se acepta al teorema como ”verdadero” siendo la demostración la garantía que la subjetividad exige para considerar al teorema como una nueva etapa del conocimiento. El valor de la demostración es doble: por una parte pone en evidencia aspectos de la realidad matemática que no siempre son evidentes y por otra parte, pone en evidencia la existencia de un ”algoritmo” que relaciona al teorema con el axioma. La existencia de tal ”algoritmo” es fundamental para confirmar el ”control” que nuestra subjetividad ejerce sobre el problema. El modelo axiomático de conocimiento apunta entonces a la fundación del saber en las sensaciones subjetivas de ”seguridad”, ”certeza” y ”control”. Todo el valor del saber descansará entonces en la eficacia con la que estos estados de la subjetividad sean provocados.

2.8. Las matemáticas como *práxis*

Uno de los hechos más notables de la ciencia contemporánea es que hasta el siglo XIX, el desarrollo de las matemáticas y de la lógica ha sido posible prácticamente sin cuestionar estos factores subjetivos: eran simplemente entendidos como no problemáticos. La culminación de este ideal puede decirse que se alcanzó con el programa de fundamentación de las matemáticas de Bertrand Russell. Este programa fue criticado “internamente” por Gödel, quien mostró que se debe renunciar a la búsqueda de certeza absoluta en un sistema de axiomas como el de las matemáticas, y “externamente” por Wittgenstein quien intentó la desmistificación de la axiomática *à la* Russell en la ciencias matemáticas. Escribe Wittgenstein en *Remarks of the Philosophy of Mathematics*: “Los axiomas en un sistema matemático de axiomas se suponen 'autosuficientes'. ¿Pero autosuficientes en qué sentido? Debería decirse: en el sentido de lo que nos es más fácil de imaginar.”[14]

---

[13] A esto debe agregarse que las matemáticas no son puramente lúdicas, sino que además, el pensador con su trabajo persigue algún fin.

[14] Wittgenstein L. *Remarks on the foundation of Mathematics*. Basil Blackwell. Oxford, 1956. III-1, s. 113e. Traducción propia.

Lo que cuenta para Wittgenstein entonces no es el valor epistémico del axioma en tanto verdad ”generadora”, sino el ”papel” generador que a éste se asigna en un sistema. Wittgenstein antepone el carácter operativo de las matemáticas al ideal axiomático.

El análisis más acabado del proceso creativo en las matemáticas, resaltando su carácter de actividad humana, los límites de la certeza logico-matematica, la manera particular que tienen las matemáticas de identificar y rectificar errores y de aumentar la precisión y eficacia de sus afirmaciones fue presentado por Lakatos[15] en un diálogo imaginario acerca de una conjetura de Euler. Otros escritos de Lakatos resaltan también la naturaleza operativa de la ciencia. No obstante, la ciencia no se practica como un juego intrascendente sino persiguiendo un fin que podríamos simbolizar como la adaptación de la especie humana a las condiciones naturales.

3. Historia del cálculo diferencial

La historia del cálculo diferencial está muy bien documentada y no necesita una especial atención de nuestra parte. Además de varios libros (véase las referencias) sobre historia de la matemática, hay en Internet literalmente *miles* de artículos ricos en información. Haremos aquí una breve presentación del tema.

El cálculo diferencial fue inventado por Newton y Leibniz, aunque el concepto geométrico de derivada era conocido antes de estos autores (en estos términos, la derivada de una función en un punto dado es la inclinación de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto, siempre que esta construcción sea posible y la recta resultante no sea vertical). El gran trabajo de Newton y Leibniz fue el de organizar, estructurar y desarrollar el conocimiento alrededor del tema formulando una nueva teoría de alcances mucho mayores.

El razonamiento mediante el cual se introdujo el cálculo diferencial era—en términos modernos—vago e impreciso y si se quiere incorrecto. No obstante, hay frases y pasajes de Newton y Leibniz que sugieren que ellos eran conscientes de las eventuales imprecisiones[16]. Por otro lado, el cuerpo monumental de la literatura matemática después de Newton y Leibniz y hasta principios del 800 cae invariablemente en la imprecisión de usar, sin una definición más o menos libre de ambigüedades, el concepto de límite y unos objetos "evanescentes" llamados diferenciales y también infinitésimos (de aquí el nombre de *cálculo infinitesimal*), que a veces tenían las propiedades de objetos matemáticos tradicionales (digamos de *números*, lisa y llanamente) y a veces no. Para obtener el resultado deseado había que introducir reglas *ad hoc* para quitar de en medio los “diferenciales al cuadrado” y otros términos que constituyen un “obstáculo”. Justamente, el cálculo diferencial describe cómo operar con estos objetos de manera de obtener resultados correctos, útiles y consistentes.

Unas décadas más tarde, D'Alembert reformula las ideas de Leibniz en forma más algebraica pero usando también el concepto de límite en manera vaga. La vaguedad de los fundamentos del cálculo diferencial preocupó a más de un pensador de la época. El mismo

---

[15] Lakatos, Imre. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge University Press, London, 1976.

[16] Semën Samsonovich Kutateladze, Excursus into the history of calculus. Ver bibliografía.

D'Alembert en 1743[17] dijo acerca de las matemáticas algo que podemos traducir libremente como *"Hasta el presente...se le ha dado más interés a agrandar el edificio que a iluminar la entrada, a levantarlo más alto que a darle un sostén adecuado a los fundamentos."*

Un siglo después de Newton, Lagrange consiguió presentar la derivada en términos completamente algebraicos (sin usar diferenciales ni paso al límite) para el caso de (lo que hoy llamaríamos) *funciones analíticas*. El uso de límites en realidad no se puede evitar, pero se puede "esconder debajo de la alfombra" para un tipo especial de funciones (las funciones analíticas, digamos "aquellas donde la propuesta de Lagrange funciona bien"). Otras funciones derivables pero no analíticas requieren un tratamiento más atento. El método de Lagrange fue acogido primero con exagerado entusiasmo (a raíz de sus éxitos) y más tarde con una igualmente exagerada indiferencia (a raíz de sus limitaciones).

La formulación organizada del concepto de derivada, que sirva para cualquier función derivable sea analítica o no, necesita el concepto de límite. Estas ideas fueron progresando gradualmente a partir de Newton y Leibniz, culminando con Cauchy, Bolzano y Weierstrass (más tarde Cantor profundizó el concepto de infinito). El tratado de Lacroix de 1819 (ver bibliografía) ya avanzaba en esta dirección.

La contribución de Cauchy en 1821 fue fundamental. Es el primer intento de establecer el cálculo sobre bases sólidas. A través del concepto de límite, la idea de derivada se puede expresar sin recetas ambiguas y el cálculo operacional con infinitésimos se puede justificar en términos racionales. Cauchy no resolvió todos los problemas inherentes al cálculo. En términos modernos, no advirtió la diferencia entre *convergencia puntual* y *convergencia uniforme.* Este hecho trae consigo dificultades ya que uno de los teoremas de Cauchy entra en contradicción con los (previamente conocidos) resultados de Fourier sobre convergencia de series trigonométricas. En esa época se hablaba de *excepciones* al teorema de Cauchy (Abel, 1826). Cauchy quedó tan preocupado por este problema que nunca escribió el segundo volumen de su Curso de Análisis, ni permitió reeditar el primero, a tal punto que cuando la presión para producir un nuevo libro resultó muy alta, consintió en que el abate Moigno publicara los apuntes de sus clases[18].

El libro de Moigno[19] (escrito para para difundir y popularizar las ideas de su maestro y amigo Cauchy), tiene también una versión moderna del concepto de límite (aún algo incompleta, faltan algunos teoremas útiles), una versión moderna del concepto de derivada (apoyada en el concepto de límite) y una presentación *a posteriori* del concepto de diferencial.

La cuestión de la convergencia uniforme fue resuelta en 1847 por Seidel, quien inició así un mecanismo fructífero de perfeccionamiento de las matemáticas. Cuando un teorema tiene aparentes "contraejemplos", hay que analizar cuál es la hipótesis o premisa defectuosa para a través de ese análisis refinar la formulación[20]. Otras consecuencias de las dificultades con la convergencia uniforme no fueron advertidas antes de 1875.

---

[17] Morris Kline, pág. 619. Ver bibliografía

[18] Lakatos, *Proofs and refutations.*

[19] *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégra*l (F. Moigno, 1840). La persona de Moigno es interesante en sí. Sería bueno escribir algo al respecto.

[20] Lakatos, *Proofs and Refutations,* p. 131.

3.1. La versión de los libros de texto contemporáneos

La version contemporánea del concepto de derivada, organizada hacia 1856 con Weierstrass, se puede formular más o menos como sigue:

Dada una función *f(x)* de una variable, consideremos la siguiente expresión para un punto cualquiera:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g(x)+B(x,h)$$

Exigiendo propiedades específicas para las funciones que aparecen en el miembro derecho, una igualdad de este tipo no siempre será válida para una *f(x)* arbitraria en el miembro izquierdo. Cuando las funciones son tales que el miembro derecho se puede descomponer en la suma de un término *g(x)* que no depende de *h* y otro término *B(x.h)* tal que para cada *x* fijo *B(x,h)* tiende a cero con *h*, entonces decimos que *f(x)* es derivable en el punto *x* y su derivada viene dada por *g(x)*. Una discusión similar se puede hacer usando la diferencia *Δf* o sea multiplicando toda la igualdad por *h*:

$$\Delta \mathrm{f} = f(x+h)-f(x)=g(x)h+hB(x,h)$$

El diferencial *df* se define luego como la parte lineal en *h* de la diferencia, o sea *df = g(x)h* que también se puede escribir como *df = g(x)dx*. El cálculo con diferenciales iniciado por Newton y Leibniz se puede explicar completamente (y si se quiere se puede evitar completamente) a partir de esta definición de derivada.

3.1. Una curiosidad

En los años 60, Robinson presenta el *Non-standard analysis,* a partir de ideas ya avanzadas hacia 1930 y que resalen atrás en el tiempo hasta Hilbert. Este análisis introduce unos nuevos números (non standard), además de los números reales tradicionales y nuevas reglas de cálculo que extienden las reglas tradicionales. Este análisis tiene la ventaja de simplificar algunas demostraciones del análisis clásico. Con el análisis non-standard la fraseología de los diferenciales inventada hace 300 años se puede reusar textualmente o casi. Por supuesto, los eventuales errores o vaguedades de los matemáticos de aquella época siguen siendo tales, ya que en el 1700 nadie conocía ni tenía la posibilidad de conocer el análisis non-standard. Esta corriente de pensamiento hasta el día de hoy no ha trascendido demasiado ni a la matemática en general ni a otras ciencias. Por ejemplo, las voces *"non-standard analysis" conference mathematics* dan (juntas) menos de 600 entradas en Google, mientras que el grupo *analysis conference mathematics* da unos 4.9 millones de entradas.

4. La matemática de los manuscritos de Karl Marx

Los manuscritos más organizados presentes en la edición inglesa contienen:

(a) Una derivación lo más algebraica posible del concepto de derivada. Hay un uso del límite digamos "escondido", si bien hecho en manera matemáticamente correcta en el contexto del manuscrito. Esto incluye una reconsideracion del concepto de diferencial.

(b) Una crítica del concepto de diferencial del tipo Newton-Leibniz y una presentación histórica del cálculo diferencial via Newton/Leibniz, D'Alembert y Lagrange.

Marx trabaja casi absolutamente con ejemplos. Las funciones que considera son las que hoy en día se llaman *funciones elementales* o sea sumas, productos y cocientes de potencias, raíces, exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas. Esto era de uso corriente en muchos libros accesibles en la segunda mitad del siglo XIX (p. ej. el tratado de Lacroix), aunque la investigación de "frontera" ya había llegado más lejos para ese entonces.

4.1. El concepto de derivada

Consideremos la función $f(x) = x^2$ (que describe una curva llamada parábola). La diferencia de los valores de la función en dos puntos x y $x_1 = x+h$ se puede escribir como $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$. El cociente entre la diferencia de la función y la diferencia entre los valores del argumento (o sea $x_1 - x = h$) resulta entonces:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$$

La función $2x$ está ligada a x^2 por razones geométricas. Marx observa que desde antes de Newton se sabía que se trata de la inclinación de la recta tangente a la parábola en el punto x. Lagrange dio a esta función tangente el nombre de *derivada*. El problema era hacer "desaparecer" ese h en exceso presente en el miembro derecho de la igualdad. Para eso, Newton y Leibniz inventan los diferenciales. Para que la invención sea útil, o sea para poder obtener $2x$ a partir de x^2 y en general para obtener la función tangente correspondiente a partir de cualquier otra función $f(x)$, los diferenciales necesitan un tratamiento excepcional, distinto de los números tradicionales. La "regla" es que para expresar el diferencial de $f(x)$ en términos del diferencial de x hay que reemplazar las diferencias por diferenciales y donde un diferencial aparece multiplicado por otro, hay que poner ese producto igual a cero. Veamos: aplicando la regla a la diferencia $f(x+h) - f(x)$, el término cuadrático en h desaparece, y luego al dividir por h lo que queda de esta diferencia, en el miembro derecho aparece sólo la derivada.

Marx critica este proceso como *metafísico*. Lo cual tiene mucho sentido ya que para los números tradicionales, si a y b son distintos de cero, entonces su producto $a.b$ también es distinto de cero. Un velo místico esconde el hecho que uno ya sabía adonde quería llegar[21].

Las primeras 70 páginas del manuscrito tratan de una propuesta alternativa, en línea con el enfoque moderno de Cauchy. La derivada se define haciendo el paso al límite (concepto previamente formalizado por Cauchy; nótese que Marx usa la idea de límite pero no da una definición matemática del mismo), en el cociente de las diferencias (en el ejemplo de más arriba, el límite del miembro derecho cuando h tiende a cero). Luego se definen los diferenciales *a posteriori*, como la parte lineal en h de la diferencia (está así también en el tratado de Lacroix, pág 5). Esta propuesta viene llamada *racional* por Marx justamente porque desmitifica el proceso de diferenciación. Marx prosigue en el análisis mostrando las ideas bajo diversos puntos de vista y con distintos ejemplos, notando que una

[21] Errores como éste cometemos todos (tanto los matemáticos como los no matemáticos). Cometer errores no es tan grave, lo que es grave es negarse a corregirlos después de haberlos advertido.

vez definidos los diferenciales, éstos representan una operación bien precisa y se pueden usar como símbolos operacionales. De esta manera, todas las reglas de diferenciación establecidas a partir de Newton y Leibniz siguen siendo válidas como cálculo operacional, pero ahora tienen un fundamento racional.

4.2. La historia del cálculo diferencial

El resto de la versión inglesa de los manuscritos trata de unos apuntes de historia del cálculo diferencial. Marx vio en la evolución Newton/Leibniz, D'Alembert, Lagrange de las ideas matemáticas, a partir de su inicio místico hasta su culminación en una presentación racional, un proceso filosófico interesante que valía la pena resaltar. El trabajo nunca fue terminado pero los lineamientos de la obra están claros.

La profesora Yanovskaya resume el estudio sobre el cálculo diferencial de Marx como el estudio del proceso de *algebraización*[22] de las ideas que condujeron al descubrimiento y formulación del cálculo infinitesimal. Este proceso tendría tres etapas: El cálculo diferencial "místico" de Leibniz y Newton; el cálculo diferencial "racional" de Euler y D'Alembert; y finalmente el cálculo "algebraico puro" de Lagrange.[23] Frente a este proceso la figura de Marx no permanece neutral. Por el contrario, Marx se considera partícipe en el proceso de "limpieza" de los elementos metafísicos que en el cálculo diferencial oscurecen el álgebra subyacente.

5. Discusión

La crítica de Marx al concepto de límite y diferencial coincide con la visión moderna del tema y está anticipada en los libros de Lacroix y Moigno que el mismo Marx menciona. El diferencial y la diferenciación se definen en esos libros *a posteriori* (una vez entendido el concepto de derivada) de la manera que proponía Marx. A partir de los manuscritos da la impresión que Marx supiera que Lacroix había hecho contribuciones al tema (se trata sólo de una mención en pág. 68), pero no hay ninguna indicación acerca de la relación concreta entre Marx y el libro *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégra*l (F. Moigno, 1840), sólo mencionado en una lista de textos en p. 75.

No vale la pena discutir si Marx fue un innovador *también* en matemáticas. No lo fue. Nunca publicó sus textos, ni siquiera los terminó, no hay ningún teorema "nuevo" (en realidad expone sus ideas en forma narrativa y usando casos particulares, en lugar de adoptar la estructura del teorema). Algunas de sus ideas estaban anticipadas en libros que él mismo utilizó. Por otro lado, es moneda corriente que el rigor matemático en la Inglaterra del 1800 estaba atrasado respecto del continente. Así que en el contexto en el que Marx trabajaba, su intención era innovadora. Como textos de matemática no eran "de frontera", ya que los primeros textos datan de unos 20 años después del tratado de Cauchy.

El valor indiscutido de estos textos reside en la visión filosófica y aún pedagógica de la evolución del pensamiento científico, o sea en haber advertido un proceso de perfeccionamiento del conocimiento matemático. Vistos como textos de historia de las ideas (matemáticas), los manuscritos identifican agudamente un grave problema de las

---

[22] Marx, *Manuscritos Matematicos*. Preface. Pág. XXVIII.

[23] Marx, *Manuscritos Matematicos*. Preface. Pág. XXIV.

matemáticas de los siglos XVII y XVIII, que ya D'Alembert habia notado y que comenzó su resolución a partir de Cauchy.

En ese sentido, el trabajo de Marx continúa y supera exitosamente a Hegel. La crítica de Hegel a los diferenciales mencionada más arriba, fue presentada en un momento histórico en el que los matemáticos reconocían el hecho como un problema y aún no habían encontrado una solución, o sea que es históricamente válida. La crítica posterior de Marx intuye el proceso evolutivo hasta su solución. Por el contrario, la cita de Engels más arriba lo pone por detrás de Marx en la evolución de las ideas y llega con un atraso de más o menos 60 años. Era razonable pensar así en la época de Hegel, pero era falta de información hacerlo en 1883. Igualmente hay que reconocer que el acceso a la información 125 años atrás (aún para Engels) no se puede medir con los parámetros del día de hoy.

El análisis y descripción de este proceso de perfeccionamiento del conocimiento matemático, con la identificación de "contraejemplos" y su uso subsecuente para refinar el conocimiento, tuvo que esperar un siglo todavía hasta cristalizarse en la detallada descripción de Lakatos en *The Logic of Mathematical Discovery* (ver más arriba). Queda a Marx el mérito de haber sido un precursor de esta manera de pensar.

Por supuesto, la visión filosófica de Marx acerca de la evolución histórica de las ideas, las relaciones sociales, etc., está presentada en manera más detallada en sus textos más conocidos. En nuestra opinión, Marx encontró interesante, o quizás divertido el hecho que la evolución del concepto de derivada encajara tan bien en su modelo de evolución histórica.

El estilo encendido, a veces irónico y soberbio de Marx se reconoce también en estos manuscritos.

> ... that $\frac{dy}{dx}$ really signifies, not the extravagant $\frac{0}{0}$, but rather the Sunday dress of $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, as soon as the latter functions as a ratio of infinitely small differences, hence differently from the usual difference calculation. (p.29)
>
> *f'(x)* is by no means found by using the symbol $\frac{dy}{dx}$, rather instead the differential expression $\frac{dy}{dx}$ as the symbolic equivalent of the already derived function of *x*. (p. 41)
>
> And there in the [Newtonian] first method, how has the point of departure of the differential symbols as operational formulae been obtained? Either through covertly or through overtly metaphysical assumptions, which themselves lead once more to metaphysical, unmathematical consequences... (p. 64)
>
> Some contemporaries still hide behind the statement that the differentials and differential coefficients merely express very approximate values. (p. 68)

> But infinitely small quantities are quantities just like those which are infinitely large (the word infinitely [small] only means in fact indefinitely small); the *dy*, *dx* etc. or $\dot{y}$, $\dot{x}$ therefore also take part in the calculation just like ordinary algebraic quantities, and in the equation above *(y + k) - y* or *k = 2xdx + dxdx* the *dxdx* has the same right to existence as *2xdx* does; the reasoning is therefore most peculiar by which it is forcibly suppresed... (p. 83)
>
> ...where *dx* is assumed by metaphysical explanation. First it exists, and then it is explained. [...] the terms in x and Δx which are obtained in addition to the first derivative, for instance, must be *juggled away* in order to obtain the correct result... (p. 91)

5.1. Marx y el signo "="

Cuando Marx usa la igualdad como definición, llama al lado izquierdo de una igualdad el "lado simbólico" (pensando al caso en que uno escribe "sea $A = e^x + 2$ ", leído como: Usemos el símbolo *A* para representar el miembro derecho de la igualdad) o el "lado de la iniciativa". Cuando Marx se encuentra con igualdades donde hay símbolos de ambos lados, se siente en la necesidad de explicar por qué la igualdad tiene sentido. Los matemáticos en general no distinguen con "nombres" los lados de una igualdad (salvo para indicar de cuál de los dos están hablando), pero por razones de fluidez narrativa, las igualdades se suelen escribir de una cierta manera según el discurso en el que aparecen.

El signo igual en matemáticas tiene otras funciones aparte de la de definición, como por ejemplo indicar una identidad como $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (el miembro izquierdo y el derecho son la misma cosa para cualquier par de números) o una ecuación como $x^2 = 9$ (aquí la igualdad expresa que la afirmación es válida sólo para ciertos valores de *x*). Marx resalta una función de la igualdad que tiene importancia para su concepción dialéctica del mundo. Los objetos que están a ambos lados de una igualdad son por cierto equivalentes, digamos: "la misma cosa", en las condiciones en que la igualdad es válida. En muchas ocasiones esa "misma cosa" esta parcialmente escondida de un lado del signo igual. Por ejemplo, no es inmediatamente evidente mirando solamente el miembro izquierdo de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) + p(x)h + q(x)h^2 + \ldots$, que ese cociente se pueda escribir como una serie de potencias en *h* cuyos coeficientes son funciones de x con ciertas propiedades específicas. El lado derecho de la igualdad revela o desarrolla una información que estaba por así decirlo "escondida" en el miembro izquierdo. Marx subraya este uso de la igualdad para expresar procesos de evolución intelectual. Por ejemplo, hay algunas consideraciones filosóficas o pedagógicas acerca de si conviene usar la diferencia o el incremento (que son dos caras de una misma moneda).

Agradecimientos

Uno de nostros (M.A.N.) agradece fructíferas discusiones con su amigo y colaborador de muchos años, prof. Hernán Solari, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

Bibliografía

Apps, Philip, *What is nonstandard analysis?*, http://members.tripod.com/PhilipApps/nonstandard.html

Hegel, G. W. F. *Ciencia de la Lógica.* Solar, Hachette. 1968.

Kutateladze, Semën Samsonovich, *Excursus into the history of calculus,* http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/history.pdf, véase también http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/cv.html

Lacroix, Sylvestre François, *Traitè du calcul différentiel et du calcul integrel*, Paris, 1819.

Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* N. York, 1972.

Katz, Victor, *A history of Mathematics*, Reading, 1998.

Lakatos, Imre, *Proofs and rerutations, The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, Cambridge (UK) 1976.

Marx, Karl, *The Mathematical Manuscripts of Karl Marx,* London, 1983.

Moigno, Abbe F., *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégra*l, Paris, 1840.

Reinke, Luke, *A Survey of the History of Calculus,*http://www.duke.edu/~ltr/

Wittgenstein L. *Remarks on the foundation of Mathematics*. Basil Blackwell. Oxford, 1956.

Fernando Flores Morador
Departamento de Historia de las Ideas, Universidad de Lund, Suecia.
E-mail: fernando.flores@kult.lu.se

Mario A. Natiello
Centro para las Ciencias Matemáticas, Universidad de Lund, Suecia
E-mail: mario.natiello@math.lth.se