

EULER, UM MATEMÁTICO MULTIFACETADO*

Ubiratan D' Ambrosio
UNICAMP - Brasil

(aceito para publicação em junho de 2008)

Resumo

Leonhard Euler talvez tenha sido o matemático mais prolífico da história. As Obras Completas de Euler, em fase final de publicação, consistirão em 84 volumes, e ainda está sendo planejado um volume adicional, com os manuscritos não publicados, cadernos e diários. Neste trabalho serão destacados aspectos da sua variada produção, sua atuação na formação de escolas matemáticas e sua influência metodológica, particularmente na educação matemática.

Palavras-chave: Euler, século XVIII, academias, biografia.

Abstract

Leonhard Euler may have been the most prolific mathematician in history. His complete works, whose publication is now being concluded, will consist of 84 volumes, with an additional volume being planned, that will contain unpublished manuscripts, notebooks and journals. This work focuses on some aspects of his diverse production, his role in the shaping of mathematical schools and his methodological influence, especially on mathematics education.

Key words: Euler, 18th century, academies, biography.

“Entender a vida de um grande homem,
que exemplificou seu século iluminando
o mundo, é elogiar o espírito humano.”
Nikolaus Fuss, 1783

Introdução

Os inúmeros eventos comemorativos dos 300 anos do nascimento de Euler refletem a grande importância da sua obra matemática. É possível que constituam o maior conjunto de eventos que já houve em honra a um matemático.

* Palestra proferida no Encontro Brasileiro do Tricentenário de Leonhard Euler (1707–1783), promovido pela Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH) e Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo, com o apoio científico da International Commission on the History of Mathematics (ICHM), realizado em São Paulo, em 5 de dezembro de 2007.



Figura 1. Leonhard Euler (15 de abril de 1707 – 9 de setembro de 1783).
Estampa na Universitätsbibliothek Basel, feita a partir de um original de J. Rachette (1781).

Nasceu na Suíça e, por oportunidades profissionais, emigrou para a Rússia com 20 anos e ali se radicou, onde é considerado um herói nacional. Jamais retornou à Suíça. Especula-se que não tenha retornado em protesto ao fato de seu país não ter dado cidadania à sua esposa, nascida na Holanda. Mas a Suíça liderou as comemorações dos 300 anos do nascimento de Euler. Sua efígie está em papel-moeda da Suíça, e o governo suíço patrocinou um livro de histórias em quadrinhos sobre sua vida (Heyne et al. 2007) (Figura 2).

Em um artigo apresentando Euler ao público geral, o diário *Washington Post* (09/04/2007) cita uma entrevista com a adida cultural da embaixada da Suíça nos Estados Unidos, na qual ela diz “Ele está no topo”, referindo-se a cientistas, artistas e políticos na história da Suíça.

Há um grande número de livros e biografias de Euler disponíveis. O site oficial das comemorações dos 300 anos do nascimento de Euler remete a inúmeras fontes.¹

Particularmente rica, com boas imagens, é a excelente biografia por Rüdiger Thiele (2005), que traz mapas e fotos de lugares frequentados por Euler, documentos pessoais e inúmeras capas de livros. Há inclusive o desenho original de Euler para o problema das Sete Pontes.

Os programas dos eventos e as tábuas de matéria geralmente destacam e analisam algumas das principais contribuições de Euler à matemática pura e aplicada. Talvez menor atenção seja dada aos trabalhos de Euler na física experimental e em outras áreas do conhecimento que também atraíam a intelectualidade do século XVIII.

A obra matemática de Leonhard Euler (1707-1783) e os seus reflexos na matemática atual têm sido o tema de inúmeros eventos. Leonhard Euler talvez tenha sido o

¹ O site oficial dos eventos é <http://www.euler-2007.ch/en/>.

matemático mais prolífico da história. Suas Obras Completas, cuja publicação foi iniciada em 1911 e encontra-se em fase final, consistem em 84 volumes, e ainda está sendo planejado um volume adicional, com os manuscritos não publicados, cadernos e diários. Seus trabalhos são muito bem escritos, com interessantes exemplos, fundamentais em todas as áreas da matemática. Embora conhecesse várias línguas, Euler escrevia, principalmente, em latim, francês e alemão.

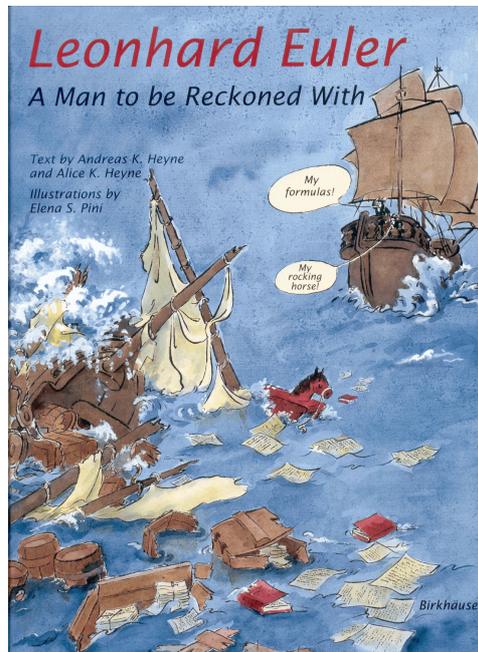


Figura 2. A vida de Euler, em quadrinhos.

A maneira como foi organizada a publicação das Obras Completas reflete sua produção variada. Na Série I, estão as “Obras Matemáticas”; na Série II, as “Obras Mecânicas e Astronômicas”; na Série III, as “Obras Físicas e Miscelânea”; na Série IV-A, a “Correspondência” e, na Série IV-B, os “Manuscritos”, consistindo em material jamais publicado, cadernos e diários.

De toda a produção de Euler, cerca de 40% são sobre matemática e estão em 30 volumes da Série I. O resto da produção trata de mecânica, ótica, astronomia, magnetismo, acústica, filosofia, além de outros assuntos. A lista dos correspondentes é imensa. Com alguns, há uma intensa troca de cartas. Dentre seus correspondentes figuram, com maior intensidade, Nicolaus I Bernoulli, Clairaut, D’Alembert, Lagrange, Maupertuis e Frederico II. Também há correspondência com Daniel Bernoulli, Bertrand, Bonnet, Bouguer, Condorcet, Cramer, Delisle, Formey, Goldbach, Haller, Lalande, Lambert, Lesage,

Lomomonov, Marinoni, Sanchez, Stanislaw Poniatowski, Segner, Wettstein e outras 260 pessoas. Curiosamente, encontram-se algumas cartas na forma de pequenas notas, tratando de assuntos os mais variados.

Seus trabalhos foram indexados pelo historiador da matemática sueco Gustav Eneström (1856-1923), produzindo a referência básica a suas publicações (Lorey 1926). Nessa indexação, conhecida como Índice de Eneström, as publicações são identificadas pela letra E seguida de um número. A última referência no Índice de Eneström é E866.²

Euler é responsável por algumas expressões, consideradas as mais belas da matemática.³ São ilustrativos disso os seguintes quatro conhecidos resultados devidos a Euler:

$$(I) e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (II) V - A + F = 2 \quad (III) \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \text{ que é o valor de } \zeta(2).$$

$$(IV) \text{ Teorema (Euler, 1749 e 1786): } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

Lembro que $\zeta(s)$ é a chamada função “zeta de Euler”, $\zeta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

É interessante notar que Euler é considerado um dos pioneiros da iconografia, compreendida como o estudo das representações figuradas, tais como símbolos e imagens, sem levar em conta o valor estético que possam ter, e o repertório de imagens ou símbolos tradicionalmente associados a um tema, particularmente matemáticos e religiosos. A força argumentativa de uma representação simbólica fica bem ilustrada pelo número de contribuições de Euler ao que hoje consideramos símbolos matemáticos. A seguir dou alguns exemplos de símbolos introduzidos por Euler: $f(x)$, π , e , $i = \sqrt{-1}$, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, Σ , Δ , Δ^2 .

A força dos símbolos, como expressão de uma verdade (verdade de acordo com critérios pré-estabelecidos), que é um importante aspecto da iconografia, é ilustrada pelas fórmulas mostradas acima.

Mas também os símbolos têm força de argumento, o que é ilustrado pelo muito citado encontro entre Euler, reconhecidamente muito religioso, e o ateu Denis Diderot. Convidados pela czarina Catarina II, Euler e Diderot discutiam sobre a existência de Deus. Num certo momento, Euler diz a Diderot: "Senhor, $(a + b^n)/n = x$, logo Deus existe. Replique!", o que encerrou a discussão.

Neste trabalho, destacarei menos as contribuições de Euler à matemática pura e aplicada do que outros aspectos da sua vida e de sua variada produção, bem como sua

² A relação completa das obras de Euler classificadas por Gustav Eneström está disponível no site <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/index/enestrom.html>.

³ Ver o trabalho de Ed Sandifer: "Euler's Greatest Hits". *MAA Online*, February 2007. <http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%20It%2040%20Greatest%20Hits.pdf>.

atuação na formação de escolas e sua influência metodológica, particularmente na educação matemática.

Meu encontro com Leonhard Euler vai ao meu tempo de graduação, no início da década de 1950. Ele era mencionado em muitas das aulas, e a curiosidade levou-me a procurar seus escritos originais. Na excelente biblioteca da então Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo havia muitas obras de Euler. Anos depois, em meus estudos para o doutorado, trabalhando com cálculo das variações, Euler e Lagrange foram foco de minhas leituras. E, desde então, na minha trajetória de matemático, historiador e educador, tenho encontrado Euler. Até mesmo na etnomatemática.

O trabalho de Euler sobre loteria é fascinante. E também sua influência para que Howard Garns criasse, em 1979, o Sudoku, jogo que se tornou popular a partir da década de 1980 (Garns 1979). Os aficionados do Sudoku vêm, nos Quadrados Latinos, tão bem estudados por Euler, a base teórica sobre a qual foi criado o jogo.

O reconhecimento dessa influência da obra de Euler é evidenciado pelo fato de a Embaixada da Suíça em Tokyo ter organizado, no dia 21 de julho de 2007, uma competição de Sudoku, como parte das comemorações dos 300 anos de nascimento de Euler.

Euler, como matemático, físico, engenheiro e educador, foi uma figura central na Europa do século XVIII. Sua vida foi essencialmente em Basileia, Suíça (1707-1727), em São Peterburgo, Rússia, em duas fases (1727-1741 e 1766-1783), e em Berlim, Prússia (1741-1766). Mas sua ação estendeu-se a toda a Europa, e sua excelência acadêmica levou-o a ser membro de várias academias em outros países. Destaco a *Académie Royale des Sciences de Paris*, a *Royal Society of London* e a *Società Scientifica Privata Torinese*. Muitas das suas mudanças e contatos refletem o turbulento momento político da Europa, quando as nacionalidades começavam a tomar forma.

Talvez a indefinição política prevalecendo na Europa tenha tido influência na variedade de línguas em que as obras de Euler foram publicadas, nos originais e em traduções. A maioria de suas obras aparece em latim, pois na Rússia havia restrições quanto ao uso do francês. No período de Berlim, muitas publicações são em francês e em alemão.

Euler na sua infância e juventude (1707-1727)

Leonhard Euler nasceu em Basileia, na Suíça, no dia 15 de abril de 1707.

Seu pai, Paulus Euler, era um pastor calvinista, que havia sido aluno da Universidade de Basileia. Sua tese de conclusão de curso, escrita sob orientação de Jacob Bernoulli (1654-1705), era sobre razões e proporções (Figura 3).

Em 1708, Paulus Euler aceitou um ministério em Riechen e ali Leonhard foi criado.

Os calvinistas eram rigorosos na sua obediência às leis e à ordem, o que, de certo modo, contrastava com o comportamento de Leonhard. Era uma criança prodígio e inquieta, sempre envolvida com brinquedos que permitiam satisfazer sua curiosidade sobre fenômenos físicos. Para distraí-lo de suas brincadeiras, algumas perigosas, o pai deu-lhe um livro que era uma importante introdução à álgebra e muito popular na época, o *Die Coss*, de Christoph Rudolff, que continha questões desafiadoras.

Este livro viria a ter grande influência na *Álgebra* de Leonhard Euler, publicada em 1770 (Figura 4). *Die Coss* foi, efetivamente, uma importante fonte de problemas para Euler.

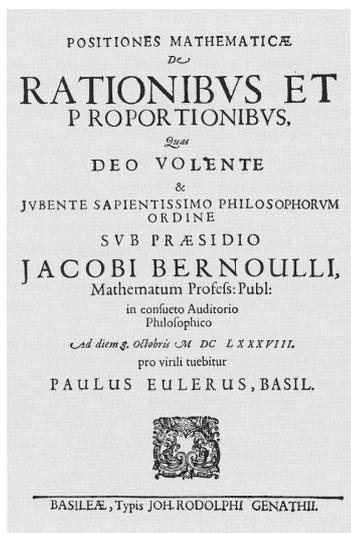


Figura 3. Tese de Paulus Euler.



Figura 4. A *Álgebra* de L. Euler.

Em 1713, Leonhard foi morar com sua avó, em Basiléia, e fez estudos clássicos. Com 13 anos, entrou na Universidade de Basiléia. Era uma idade comum para jovens brilhantes ingressarem na Universidade. Mesmo contrariando a vontade de seu pai, que insistia para que ele estudasse teologia, Leonhard enveredou pela matemática. Mas sempre se manteve fiel aos princípios e práticas religiosas calvinistas e, durante toda sua vida, conduzia diariamente as preces nas refeições da família, geralmente terminando sempre com um sermão.

Em 1723, aos 16 anos, Euler recebeu o grau de mestre, com uma tese comparando as filosofias de Descartes e de Newton. Foi um discípulo preferido de Johann Bernoulli (1667-1748), irmão de Jacob, e muito amigo de seus filhos Nicolaus II (1695-1726), Daniel (1700-1782) e Johann II (1710-1790). (Figura 5)

Interessou-se pelos problemas da isócrona e da braquistócrona, então temas centrais em Basiléia. Suas primeiras publicações são de 1726, quando publicou o trabalho "Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente" (Construção de curvas isócronas em um meio resistente qualquer), no *Acta Eruditorum*, Leipzig, 1726, 361-365. Euler apresenta uma outra versão do problema da braquistócrona, que havia sido publicado por Johann Bernoulli, em 1696.

Em 1727, ele escreveu “Meditationes super problemate nautico, quod illustrissima regia Parisiensis Academia scientarum proposuit” (Reflexões sobre um problema náutico, que foi proposto pela ilustre Academia Real de Paris). Tratava de mastros de navios e concorreu a um prêmio da Academia de Paris. Não recebeu o prêmio, mas recebeu uma menção honrosa que era, efetivamente, o reconhecimento de sua capacidade como engenheiro naval. O episódio é bem discutido no livro de Ferreiro (2007).

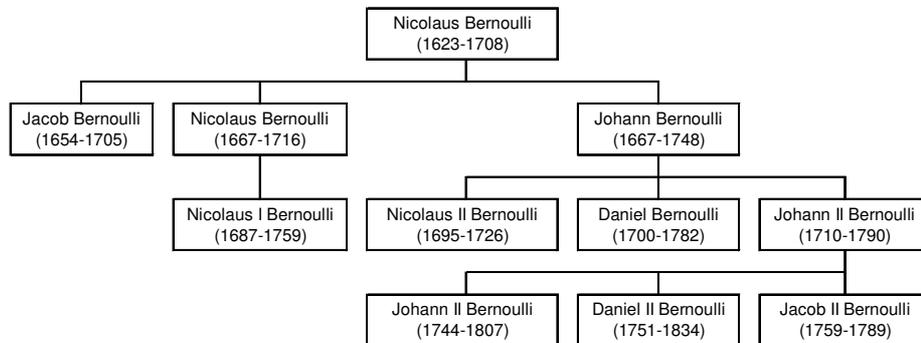


Figura 5. Árvore genealógica da família Bernoulli.

No próprio ano de 1727, escreveu a “Dissertatio physica de sono” (Dissertação física sobre o som), com a qual concorreu, ainda muito jovem, a uma cadeira de física na Universidade de Basileia. O trabalho foi muito bem recebido, mas Euler não chegou a ser professor dessa universidade, pois decidiu emigrar para a Rússia.

Euler em São Petersburgo (1727-1741)

O czar Pedro, o Grande (1672-1725), da Rússia, havia decidido criar uma “Academia de Ciências e Artes Curiosas”. Com sua morte em 8 de fevereiro, no mesmo ano, a czarina Catarina I (1684-1727) levou adiante o projeto. Assim, foram contratados, em 1725, Daniel e Nicolaus II Bernoulli. Por sugestão deles, Euler foi contratado, em 1727, para a seção de medicina. Após estudos intensivos durante a longa viagem, preparando-se para assumir suas funções, Euler chega, com 20 anos, a São Petersburgo. Mas, quando Euler chega a São Petersburgo, a czarina havia falecido. O ambiente intelectual de São Petersburgo, particularmente a Academia de Ciências, florescia.

É evidência desse florescimento acadêmico e, ao mesmo tempo, do prestígio de Euler, ainda tão jovem, a sua parada em Marburgo, quando de sua viagem para a Rússia. Encontrou-se com o famoso Christian Wolff (1679-1754), figura central na disputa Newton-Leibniz, e que era assessor do czar no plano de construir a Academia. Numa carta de 20 de abril de 1727, Wolff escreveu a Euler dizendo que ele estava viajando para o paraíso dos acadêmicos. A frase *Sie reisen jetzt in das Paradies der Gelehrten* ficou célebre. A morte da czarina Catarina I teve sérias consequências para o processo de modernização iniciado por Pedro, o Grande. Ascendeu ao poder um grupo de forte

tendência anti-europeização e que via a Academia como um luxo desnecessário. Surgiram conflitos entre os 17 membros estrangeiros da Academia, intensificaram-se as rivalidades entre seguidores de Descartes, de Newton e de Leibniz. Em meio à situação conflituosa, Euler transferiu-se da seção de medicina para a seção de matemática da Academia e, com o retorno dos irmãos Bernoulli para a Suíça, em 1733, tornou-se professor de matemática em São Petersburgo. Não foi surpresa, pois Euler tinha consciência de seu valor como matemático. De fato, em 1730, numa carta a Laurentius Blumentrost (1692-1755), então presidente da Academia de Ciências da Rússia, disse “na Europa há apenas poucos tão avançados em matemática e física quanto eu”.

Com a nova posição, seu bom salário permitiu casar-se com Katharina Gsell (1707–1773), filha de um pintor suíço, com quem teve 13 filhos. Com os filhos brincava e fazia experiências. Dessa época são seus importantes estudos sobre ciência naval.

Desde a infância, Euler sofria de uma doença cutânea, uma forma de tuberculose que afeta os gânglios linfáticos do pescoço. Como consequência perdeu, em 1738, a visão direita e ficou com a esquerda muito prejudicada.

Após a morte de Catarina I, a luta pela sucessão tornou péssimo o ambiente político na Rússia. Em 1741, Euler decidiu aceitar um convite de Frederico II, da Prússia, e mudou-se, com a família, para Berlim. Sua permanência na Rússia foi um período de grande produtividade. Dentre os inúmeros trabalhos que publicou, destacam-se: em 1736, um tratado de mecânica analítica, em 2 volumes, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*; em 1738-40, uma *Introdução à Arte da Aritmética para Uso nas Escolas Elementares Afiliadas à Academia Imperial de São Petersburgo*, em 2 volumes; em 1739, uma *Teoria da Música, Tentamen novae theoriae musicae* (Figura 6).

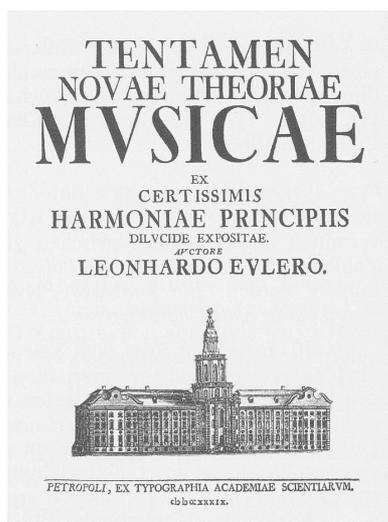


Figura 6. *Teoria da Música*, de L. Euler.

Completou, em 1738, uma *Ciência Naval*, que só seria publicada em 1749, como *Scientia navalis*, em 2 volumes (Figura 7).

Sua contribuição à navegação é considerada fundamental. Euler é um dos autores mais citados na importante obra de Ferreiro (2007)

Como comentei acima, escrever em latim é consequência de um nacionalismo exacerbado na Rússia. A adoção de línguas “neutras”, conhecidas por toda a intelectualidade da época, ainda era comum no século XVIII.

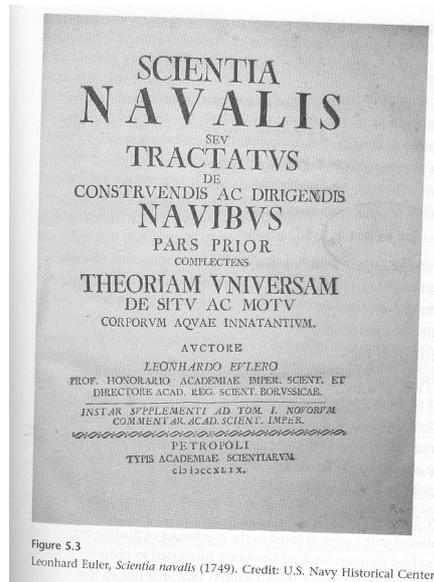


Figure 5.3
Leonhard Euler, *Scientia navalis* (1749). Credit: U.S. Navy Historical Center.

Figura 7. A *Ciência Naval*, de L. Euler

Euler em Berlim (1741-1766)

Frederico II (1712–1786), da Prússia, que viria a ser conhecido como “Frederico o Grande”, tornou-se rei em 1740.

A Sociedade de Cientistas Berlim-Brandenburgo havia sido fundada em 1700 e Leibniz havia sido seu presidente. Frederico II decidiu remodelá-la, nos moldes da Academia de Ciências de Paris. Convidou cientistas notáveis para dar corpo a essa renovação, inclusive o eminente Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759). Leonhard Euler foi convidado e, em 1741, mudou-se, com toda a família, para Berlim.

Em reação à solicitação de Frederico II para que ele se dedicasse a questões práticas, ligadas às suas permanentes campanhas militares, Euler escreve, no próprio ano de sua chegada, em 1741:

Nestes dias quase ninguém mais duvida da grande utilidade da matemática, pois as várias disciplinas e artes necessárias para o cotidiano não podem ser tratadas

sem sua ajuda. Contudo, muitos dizem que essa utilidade pertence apenas às partes mais simples desta ciência, assim dizendo, aos seus elementos, enquanto à matemática “superior” é negada qualquer utilidade. [...] A crítica à matemática superior, por estar se aprofundando muito na sua busca da verdade, deveria ser considerada uma razão para elogiar esta ciência e não para culpá-la (Euler E790, 4).

Euler sentia-se realizado em sua nova situação. Tornou-se diretor da seção de matemática da Academia Real de Ciências e Belas Letras de Berlim e substituiu seu presidente, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759), nas suas ausências. Numa carta a seu amigo Christian Goldbach (Carta XL, de 13 de março de 1742, na coletânea organizada por P. H. Fuss), Euler dizia-se feliz e realizado, pois podia fazer exatamente o que queria em sua pesquisa. Estava orgulhoso pelo fato de o rei endereçar suas cartas *À mon Professeur Euler*. Curiosa a saudação em francês, pois Frederico II, Euler e Goldbach tinham todos o alemão como língua materna.

Em 1750, Euler sentia-se tão seguro e feliz que chegou a comprar uma boa casa, chamando sua mãe para morar com eles, o que denota sua intenção de radicar-se em Berlim.

Em 1743, Frederico II julgou que a reorganização da Academia estava completa e mudou o nome da instituição para *Académie Royale des Sciences et Belles Lettres* (Real Academia de Ciências e Belas Letras). O afrancesamento da corte prussiana de Frederico II era evidente. A primeira sessão da nova Academia teve lugar em janeiro de 1744 e, em 1746, Maupertuis foi oficialmente nomeado seu presidente. Euler foi nomeado diretor da seção de matemática da Academia e, após a morte de Maupertuis, em 1759, assumiu as responsabilidades da Academia, embora nunca tenha chegado a ser oficialmente seu presidente.

Pouco mais velho que Euler, Maupertuis também havia sido aluno de Johann Bernoulli. Em 1736, Maupertuis chefiou a Missão Geodésica Francesa, enviada pelo rei Luis XV à Lapônia para medir o comprimento de um grau do meridiano terrestre. Após seu regresso, foi reconhecido pelas principais academias européias, das quais se tornou membro. Mas, suas idéias foram contestadas, particularmente por Voltaire, que tinha amizade pessoal com Frederico II. Talvez o alinhamento filosófico com Maupertuis tenha sido causa de um esfriamento das relações de Euler com Frederico II.

O ambiente acadêmico da época era palco de enormes disputas. O acalorado debate filosófico-teológico sobre Descartes, Newton e Leibniz tornou-se ainda mais intenso após a publicação do controvertido “Princípio da Mínima Ação”, como proposto por Maupertuis, presidente da Academia de Berlim, no trabalho *Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusq'ici paru incompatibles* (Harmonia entre Diferentes Leis da Natureza que até Aqui Pareciam Incompatíveis). Esse ambiente político e a maneira como isto influenciou Euler e a sua reação a essas disputas, bem como possíveis conseqüências na sua vida acadêmica, são discutidos pelo Marquês de Condorcet (1741-1794), no seu *Éloge*, escrito como um tributo a Euler, perante a *Académie des Sciences de Paris*, por ocasião de sua morte (Caritat 1786).

Euler passou a sentir que Frederico II considerava suas pesquisas “sem importância”, exercendo sobre ele pressão para que cuidasse de coisas práticas, “úteis” para

as várias guerras em que a Prússia estava envolvida. Euler considerava isso uma falta de reconhecimento, o que tornava frustrante sua permanência em Berlim.

Em 1763, terminada a Guerra dos Sete Anos, Euler esperava tornar-se presidente da Academia. Frederico II havia convidado D'Alembert, que recusou e sugeriu Leonhard Euler para o posto. No entanto, Frederico II recusou-se a dar a ele o posto.

O período em Berlim foi muitíssimo produtivo. Sua produção foi intensa e seus livros eram populares, conhecidos em toda a Europa. Ele tinha inúmeras atividades ligadas à sua posição na Academia, como supervisionar a biblioteca, o observatório, o jardim botânico e as publicações, incluindo calendários e mapas.

Os inúmeros trabalhos dessa época eram submetidos às academias de Berlim e de São Petersburgo. Era tão grande o volume de seus trabalhos nesse período, quase 400, que alguns manuscritos só foram publicados após sua morte. Alguns de seus livros mais conhecidos são dessa época.

Em 1744, é publicado o *Methodus inveniendi*, que se tornaria o livro básico para o estudo do cálculo das variações (Figura 8).

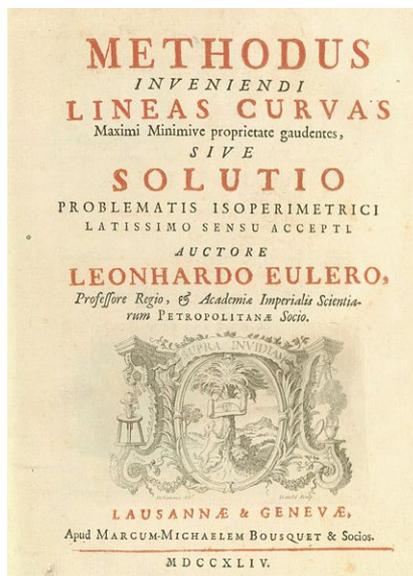


Figura 8. Livro de L. Euler sobre o cálculo das variações.

Ainda em 1744, foi publicado *Theoria motuum planetarum et cometarum* (Teoria do Movimento de Planetas e Cometas); em 1745, *Neue Grundsätze der Artillerie* (Novos Princípios de Artilharia) e, nesse mesmo ano, escreveu *Anleitung zur Naturlehre* (Introdução às Ciências Naturais) que só viria a ser publicado postumamente em 1862 (ver E842; OO III, 1); em 1748 o *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à Análise dos Infinitos), e *Reflexions sur l'Espace et le Temps (sic)* (Reflexões sobre o Espaço e o

Tempo); em 1749, a *Scientia navalis* (Ciência Naval, que havia sido terminada em São Petersburgo, em 1738); em 1753, a *Theoria motus lunae* (Teoria do Movimento da Lua); em 1755, o *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* vol 1, (Fundamentos do Cálculo Diferencial com Aplicações à Análise Finita e às Séries, volume 1), que havia sido escrito em 1748. Esta obra foi continuada em três outros volumes, tratando do cálculo integral, que apareceram, respectivamente, em 1763, 1768, 1770.

Quando ainda estava em Berlim, Euler terminou um livro sobre a teoria das lentes, *Théorie générale de la dioptrique*, que somente viria a ser publicado em 1862. Também iniciou a importante obra, considerada de divulgação científica e filosófica, denominada *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, que viria a ser publicada em 1768, em São Petersburgo, e tornar-se-ia um sucesso literário.

Retorno a São Petersburgo (1766-1783)

De acordo com Condorcet, no seu *Éloge*, as tropas russas pilharam a propriedade de Euler quando, durante a Guerra dos Sete Anos, atingiram a região de Berlim. Quando o comandante russo, General Tottleben, ficou sabendo, declarou que não tinha vindo guerrear a ciência, e imediatamente desculpou-se a Euler e o indenizou generosamente, muito acima dos prejuízos causados pelas tropas invasoras.

Ainda de acordo com Condorcet, o governo russo nunca tratou Euler como estrangeiro, mesmo quando ele transferiu-se para Berlim, e continuou pagando uma porção do seu salário.

Em 1762, quando Catarina II, a Grande (1729-1796), assumiu o poder na Rússia, empenhou-se em restabelecer o altíssimo padrão da Academia da Rússia. Decidiu convidar Euler para retornar a São Petersburgo, com grandes privilégios. Ele retornou em 1766 e foi recebido com as maiores glórias. Foram oferecidos a ele um altíssimo salário, excelente moradia e emprego para os filhos. Iniciou-se um outro período muito produtivo na vida acadêmica de Euler e no plano individual, uma total identificação com a Rússia.

Em 1771, Euler perdeu a visão do olho esquerdo, tornando-se totalmente cego. Sua produtividade, após a cegueira, foi intensa. Sua extraordinária memória permitia a ele ditar seus textos para alguns assistentes. Destacam-se seus filhos Johann Albrecht (1734-1800) e Christoph (1743-1808), bem como Anders Johan Lexell (1740-1784), Wolfgang Ludwig Krafft (1743-1814), Mikhail Evseyevich Golovin (1756-1790) e Nikolaus Fuss (1755-1826), talvez o mais ativo de todos, tendo redigido cerca de 200 trabalhos de Euler, feitos enquanto era totalmente cego.

Quando ocorreu o grande incêndio de São Petersburgo, em 1771, a casa de Euler pegou fogo. Ele obstinou-se a não abandonar a casa, pois não queria perder os manuscritos, ditados durante sua cegueira. Foi salvo, à força, pelo seu criado Peter Grimm. Parece que todos os manuscritos foram salvos. A gravura a seguir retrata a cena (Figura 9).



Figura 9. Euler sendo salvo do incêndio.
(cortesia da Science Photo Library H405/080)

Em 1773, faleceu sua esposa. Três anos depois, contrariando a opinião dos filhos, ele casou-se novamente, com Salome Abigail Gsell (1723-1793), sua cunhada. Leonhard Euler faleceu, possivelmente vítima de um acidente vascular cerebral, em 7 de setembro de 1783.⁴ Segundo seu assistente, Nikolaus Fuss, ele estava jantando com seu jovem colaborador, Anders Johan Lexell, matemático e astrônomo, cometólogo. Falavam sobre a órbita de um novo planeta, descoberto por Herschel em 1781 (depois viria a ser denominado Urano). Depois do jantar, enquanto brincava com seu neto, Euler foi acometido de um mal súbito. Teria dito ao neto “Estou morrendo”. Perdeu a consciência e faleceu. Foi sepultado no *Alexander Nevsky Navra*, um dos mais importantes mosteiros da Rússia, fundado por Pedro, o Grande, em 1710, e que serve de cemitério para os mais importantes escritores, artistas, atores e músicos da Rússia.

Na sua segunda fase trabalhando em São Petersburgo, Leonhard Euler teve grande produção. Na classificação do Índice de Eneström, há 275 trabalhos entre 1766 e 1783, classificados de E275 a E570.

Dentre esses, destaco, além dos livros sobre ótica e as *Cartas a uma Princesa da Alemanha*, escritos ainda em Berlim, o livro sobre o cálculo integral e, sobretudo, o *Vollständige Anleitung zur Algebra* (Introdução Completa à Álgebra, 2 vols), publicado

⁴ Há uma discordância de datas. Alguns usam para seu falecimento a data de 9 de setembro, e seu falecimento “oficial” ocorreu em 18 de setembro de 1783. Deve-se lembrar que, nessa época, a Rússia não havia adotado o Calendário Gregoriano.

somente em 1770. Com exceção de *Elementos*, de Euclides, este é o livro de matemática mais impresso no mundo. Parece ter sido escrito em 1765 e 1766.

O livro foi publicado pela Academia de Ciências em São Petersburgo, em 1770, em alemão. E. A. Fellman (1995) diz haver evidência que o livro foi escrito em 1765 e 1766, quando ele retornou para São Petersburgo e alguns anos antes de se tornar totalmente cego. Foi traduzido para o russo (1768-69), para o holandês (1773), para o francês (1774), para o latim (1790), inglês (1797 e 1822) e grego (1800). Uma edição popular alemã, publicada pela Reclam Verlag, vendeu, entre 1883 e 1943, mais de cem mil exemplares (Heefer 2006).

Introdução Completa à Álgebra, em 2 volumes, é um verdadeiro manual didático, na forma de problemas resolvidos e comentados. Euler introduz problemas de dificuldade crescente para ilustrar e chegar a fórmulas e teoremas e a exposições conceituais, recorrendo, muitas vezes, a livros clássicos, como o *Die Coss*, de Christoph Rudolff, que foi mencionado no início deste trabalho, e o *Liber Abbaci*, de Leonardo Fibonacci, que servem de fontes para inúmeros problemas. Um dos mais interessantes é o problema da “herança desconhecida”. Resumidamente, o problema é o seguinte: um pai tem N filhos; deixa para seu 1º filho 1 u.m. (unidade monetária) mais $1/N$ do que sobra; para o 2º filho, 2 u.m. mais $1/N$ do que sobra; e assim por diante. Mostrar que, no final, todos os filhos ganham o mesmo e nada sobra. Fibonacci e seus seguidores, que formularam variantes do problema, mostraram como funciona com $N=7$ ou $N=10$. No seu livro, na seção #604, Euler discute esse problema, observando que “esta questão é de uma natureza particular e, portanto, merece atenção”. E explica a solução. Sua utilização na formação de professores para as noções básicas de álgebra e para a resolução de problemas foi muito bem destacada por Vicente Meavilla na sua tradução parcial e comentada, para o espanhol, da obra *Vollständige Anleitung zur Algebra* (Seguí 2007).

O livro *Vollständige Anleitung zur Algebra* foi traduzido para o português por Manuel Ferreira de Araújo Guimarães e publicado em 1809, tendo sido o primeiro livro didático impresso no Brasil após a introdução da imprensa no Brasil, com a chegada da Família Real portuguesa, em 1808 (Silva 2009).

O legado de Euler

Ao morrer, Euler recebeu homenagens e glória do governo russo e das academias da Europa.

Seu assistente em São Petersburgo, Nikolaus Fuss, escreveu um conhecido elogio obituário, lido perante a Academia de Ciências, no dia 23 de outubro de 1783 (Figura 10). Nele, o autor apresenta, além de uma narração de aspectos importantes de sua vida, uma análise de suas obras e de suas contribuições matemáticas.

A primeira frase desse *Éloge* é a epígrafe deste trabalho.

No discurso de elogio obituário feito a ele pelo Marquês de Condorcet, na Academia de Ciências de Paris, a frase final é

Assim, um país que, ainda no início deste século, era visto como bárbaro, ensinou às nações mais ilustradas da Europa como honrar as vidas de grandes homens na história recente. Ele dá a essas nações um exemplo que, muitas entre elas,

poderiam sentir-se embaraçadas por não saber como antecipar ou imitar (Caritat 1786).

Esses elogios refletem o reconhecimento que Euler teve ainda vivo, e, ao mesmo tempo, a surpreendente inserção da Rússia entre as principais nações da Europa.

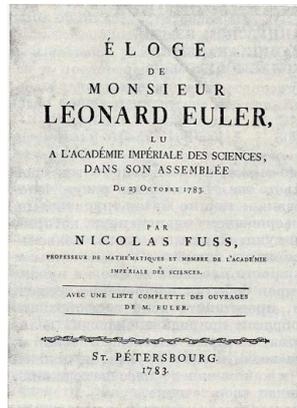


Figura 10. O *Éloge*, de N. Fuss.

De fato, no *The New York Times* de 6 de setembro de 1925 (p. 12), num artigo de Avrahm Yarmolinsky sobre as comemorações dos 200 anos da fundação, por Pedro, o Grande, da Academia de Ciências e Artes Curiosas, em São Petersburgo, Rússia, lê-se:

Foi uma grande sorte para a Rússia que entre os seus primeiros espaços havia homens dos mais dotados, especialmente nos campos de matemática e astronomia. Assim, a história inicial da academia está associada ao nome ilustre de Leonhard Euler, possivelmente o mais distinguido matemático de um período maravilhosamente rico em gênios matemáticos. Este homem notável, que podia recitar a *Eneida* do começo ao fim sem interrupção, foi o autor de 750 tratados matemáticos, alguns ainda não publicados, que repousam nos arquivos da Academia.

Curiosamente, o artigo, escrito e publicado no *The New York Times*, nos primeiros anos da União Soviética, isto é, poucos anos depois da queda do regime czarista, é intitulado “A Academia Russa completa dois séculos”. Deve-se reconhecer que o progresso matemático e científico da Rússia no século XIX, que muito deve ao trabalho pioneiro de homens como Euler no século XVIII, serviu de base para o enorme desenvolvimento científico e tecnológico da União Soviética. De acordo com os críticos do *The New York Times*, a Academia “adaptou-se ao regime soviético”, como está no subtítulo do artigo. De fato, as comemorações dos 300 anos do nascimento de Euler mostram como sua memória continua cultivada, como o foi na Rússia czarista e na União Soviética. De fato, o prestígio de Euler atravessou todos os regimes políticos.

Poucos anos após sua morte, no próprio século XVIII, sua genialidade foi reconhecida na importante obra *A Mathematical and Philosophical Dictionary*, por Charles Hutton, publicada na Inglaterra, em 1795. Nesta obra lê-se:

EULER (Leonhard), um dos mais extraordinários, e mesmo prodigiosos, gênios matemáticos que o mundo jamais produziu.

Quero destacar a iconografia de Euler. Conforme diz a historiadora Patrícia Fara, a iconografia é uma importante fonte histórica:

Historiadores geralmente estudam mais textos que figuras, e negligenciam as valiosas informações históricas que podem ser recolhidas de artefatos materiais. Retratos oficiais [...] revelam como uma reputação foi modelada. Mesmo imagens de ficção espalhafatosa revelam verdades sobre o significado de uma figura cultuada (Fara 2002).

A imagem conhecida do Euler quando jovem é uma mezzotinta⁵ feita por Vasilij Sokolov (Figura 11), em 1737:



Figura 11. Mezzotinta de Euler, por Vasilij Sokolov.

A gravura foi feita a partir de uma pintura perdida, de Johann Georg Brucker. A perda da pintura que serviu de modelo para Sokolov talvez seja resultado do incêndio de 1771 que destruiu a casa de Euler.

⁵ Mezzotinta ou maneira-negra é um processo de gravura a entalhe em que a placa de metal, após produzir um negro uniforme, é trabalhada para dar o branco absoluto e a granulagem dos meios-tons.

A imagem mostra um jovem bem apessoado, ainda com as duas vistas normais. A gravura original de Sokolov está no Hermitage, em São Petersburgo. Há cópias em Basileia e no Sudhoff-Institut, em Leipzig. Nada se sabe sobre Sokolov e pouco sobre Brucker, a não ser que este viveu em São Petersburgo entre 1733 e 1737.

Na sua importante análise da iconografia de Euler, Florence Fasanelli argumenta que a febre que causou a perda de sua visão ocorreu em 1735 e que, em 1737, ele já estaria com sua vista prejudicada. Fasanelli atribui a uma liberdade de artista o fato de Euler aparecer com as vistas normais na gravura de Sokolov (Fasanelli 2007).

Outras imagens são disponíveis e conhecidas⁶. As mais divulgadas são três pinturas de Jakob Emanuel Handmann, um reconhecido paisagista alemão, com algumas obras de retrato. A primeira pintura conhecida, de 1753, é em pastel, e serviu de modelo para uma outra pintura, feita em 1756, pelo próprio Handmann. No mesmo ano, ele pintou um retrato grande de Euler, medindo 142 cm por 108 cm (Figura 12).



Figura 12. Euler, retratado por Handmann (1753, 1756, 1756).

Sobre Handmann e as circunstâncias em que foram pintados esses retratos, bem como uma análise iconográfica, ver a obra citada de Fasanelli.

Outro retrato muito interessante, devido ao destacado pastelista Joseph Friedrich August Darbes (1747-1810), serviu de modelo para uma gravura feita pelo seu contemporâneo Samuel Kuetner (1747-1828), em 1780. O próprio Kuetner teria financiado a pintura de Darbes. As dimensões do quadro e da gravura são da ordem de 30 cm por 20 cm. (Figura 13)

Não obtive qualquer informação sobre Samuel Kuetner, mas Joseph Friedrich August Darbes é muito conhecido, tendo pintado retratos de personalidades européias. Fasanelli faz, em seu artigo citado, uma síntese da carreira de Darbes. Segundo Fasanelli, o retrato de Darbes é o que nos dá a imagem mais aproximada do Euler real.

⁶ Visite o site <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/portraits/portraits.html>.



Figura 13. Euler, em retrato de Darbes e gravura de Kuetner.

Outras gravuras, na sua maioria póstumas, são conhecidas.⁷

Os selos postais e as notas bancárias recorrem a outras imagens, mas não tive acesso às pinturas originais e os artistas responsáveis, nem à legislação que possibilitou essas emissões.⁸

Concluo este trabalho, que é, sobretudo, um tributo ao grande gênio de Leonhard Euler, cujas múltiplas faces procurei destacar, particularmente sua retidão profissional e suas qualidades humanas, citando o último e emocionado parágrafo do elogio fúnebre de Fuss:

Minhas lágrimas vão se mesclar com as suas, e as memórias da bondade que ele fez para mim em particular jamais serão apagadas de minha memória.

Referências

Caritat, Marie Jean Antoine Nicolas de (Marquis de Condorcet). 1786. "Éloge de M. Euler". *Histoire de l'Académie Royale des Sciences 1783*. Paris, 37-69. Traduzido para o inglês por John S.D. Glaus, The Euler Society, 2005, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Euler_elogium.html.

Eneström, Gustav. <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/index/enestrom.html>.

Euler, Leonhard. "Commentatio de Matheseos sublimioris utilitate". Índice de Eneström 790 (ver nota 2).

⁷ Visite o site http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/CF/by_discipline_display_results.cfm?Research_Discipline_1=Physics.

⁸ Vale visitar o interessante site de Jeff Miller <http://jeff560.tripod.com/>, que inclui um link para "Images of Mathematicians on Postage Stamps".

- Euler, Leonhard. "Carta a Goldbach, 13 de março de 1742". *Opera Omnia*, Série IV, vol. 1, *Correspondence*, OO762 (classificação provisória)
- Fara, Patricia. 2002. *Newton. The Making of Genius*. New York: Columbia University Press, 2002.
- Fasanelli, Florence. 2007. "Images of Euler". In: Bradley, Robert E. & Sandifer, C. Edward (eds.). *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. New York: Elsevier B. V., 109-120 .
- Fellmann, E.A. 1995. *Leonhard Euler*. Reinbek: Rowohlt.
- Ferreiro, Larrie D. 2007. *Ships and Science. The Birth of Naval architecture in the Scientific Revolution, 1600-1800*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Garns, Howard. 1979. "Number Place". *Dell Pencil Puzzles and Word Games*.
- Heefer, Albrecht. 2006. "The Origins of the Problems in Euler's Algebra". *Bull. Belg. Math. Soc.* vol. 13, 949-952.
- Heyne, Andreas K.; Heyne, Alice K.; Pini, Elena S. 2007. *Leonhard Euler: A Man to Be Reckoned with*. Tahu Matheson (Translator). Basel: Birkhäuser.
- Lorey, W. 1926. "Gustav Eneström". *Isis*, vol. 8, n° 2, 313-320.
- New York Times, The*. Edição de 6/12/1925, p.12.
- Seguí, Vicente Meavilla. 2007. *Aprendiendo de los Grandes Matemáticos. Selección de Problemas lineales y cuadráticos rescatados de los Elementos de Álgebra de Leonhard Euler (1707-1783)*. Badajoz: Tecnigraf/FESPM.
- Silva, Circe Mary Silva da. 2009. O Livro Didático mais Popular de Leonhard Euler e sua Repercussão no Brasil, *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 9, n. 17, 33-52.
- Thiele, Rüdiger. 2005. The Mathematics and Science of Leonhard Euler (1707-1783), Chapter V, in: Kinyon, Michael & van Brummelen, Glen (eds.). *Mathematics and the Historian's Craft*. The Kenneth O. May Lectures Series. New York: Springer-Verlag, 81-140.
- Washington Post, The*. Edição de 9/4/2007

Ubiratan D'Ambrosio
UNICAMP

E-mail: ubi@usp.br