

## **RAZÃO E PROPORÇÃO: A HERANÇA ANTIGA**

John A. Fossa  
*UFRN – Brasil*

### **Resumo**

O papel da razão e da proporção na matemática antiga é abordado, tanto com respeito ao desenvolvimento da própria matemática, quanto com respeito às relações da matemática com outras áreas de conhecimento. Certa ênfase é dada ao pensamento platônico, vista a sua importância para a Idade Média e o Renascimento.

**Palavras-chave:** Matemática Antiga, Razão e Proporção, Matemática na Idade Média e Renascimento.

### **[RATIO AND PROPORTION: THE ANCIENT HERITAGE]**

### **Abstract**

The role of ratio and proportion in ancient mathematics is treated with respect to the development of mathematics itself, as well as with respect to the relations of mathematics to other areas of knowledge. Certain emphasis is given to the thought of Plato, given its importance for the Middle Ages and the Renaissance.

**Keywords:** Ancient Mathematics, Ratio and Proportion, Mathematics in the Middle Ages and Renaissance.

### **Apresentação**

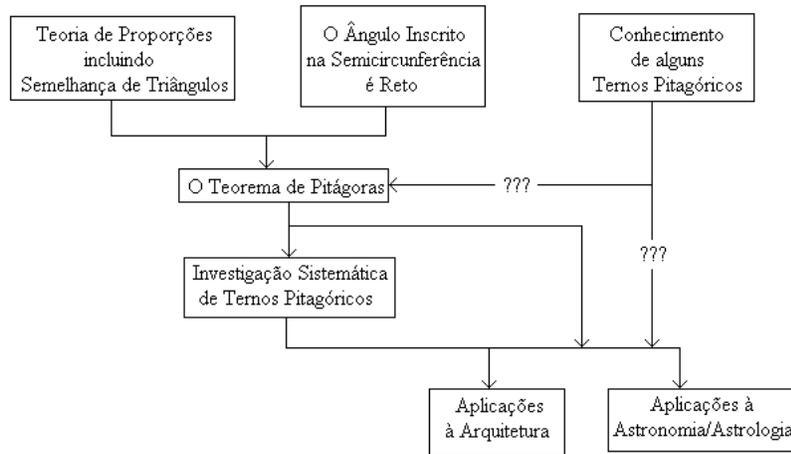
Talvez não seja inapropriado, numa mesa-redonda voltada à discussão da matemática na Idade Média e Renascimento, dedicar algumas palavras à matemática do mundo antigo, pois os matemáticos das referidas épocas consideravam-se herdeiros da tradição antiga. Em especial, queríamos fazer algumas observações sobre o uso de razões e proporções no mundo antigo, visto que esse assunto será tematizado pelos participantes da mesa. De fato, será tematizado explicitamente por Oscar João Abdounur, que falará sobre o próprio conceito de razão na matemática medieval, e por Carlos Artur Ribeiro de

Nascimento, que falará sobre a aplicação da matemática na física. Mas, também será tematizado implicitamente por Fábio Maia Bertato, que falará sobre a lógica, pois o silogismo aristotélico foi concebido pelo seu próprio inventor como uma espécie de proporção.

Quando voltamos a nossa atenção para o mundo antigo, então vemos que os conceitos de razão e proporção tiveram dois papéis distintos. Em primeiro lugar, os referidos conceitos foram instrumentais no desenvolvimento da própria matemática, seja esta considerada nos seus aspectos mais teóricos, seja nos seus aspectos mais práticos. Além disso, porém, tiveram uma importância fundamental na estruturação da compreensão de outras áreas de conhecimento pela matemática, especialmente, mas não exclusivamente, no contexto do pitagorismo e platonismo que formaram a espinha dorsal de uma grande parte do pensamento europeu dos períodos contemplados pela presente mesa. Sendo assim, faremos a seguir alguns breves comentários sobre esses pontos.

### A Alvorada da Matemática

O presente autor (ver, por exemplo, FOSSA, 2010) tem caracterizado a matemática, propriamente dita, pela metodologia que usa para validar as suas proposições, a saber, o processo dedutivo que posteriormente desembocaria na axiomatização. Concebida dessa forma, a matemática é um produto cultural do homem que teve início – tudo indica – entre os primeiros pitagóricos. Se quisermos, no entanto, alargar o sentido da palavra ‘matemática’ por nela incluir as atividades proto-matemáticas geralmente associadas a ela, não deixará, decerto, de ser um produto cultural do homem, mas a sua origem se perderá na obscuridade da pré-história. Mesmo assim, investigações arqueológicas e histórico-culturais nos permitem fazer certas reconstruções sobre o surgimento da mesma e, de fato, Fossa (2010, Parte B, p. 389) argumenta que a evidência atual apoia ao esquema dado na Figura 1 como a reconstrução da matemática pré-histórica.



**Figura 1.** Esquema da matemática pré-histórica.

A mencionada figura mostra o papel fundamental de uma teoria pelo menos incipiente de proporção na alvorada da matemática.

### Dois Aspectos da Matemática Grega

Para não delongarmos demais, apenas observarmos, *en passant*, que a técnica de “falsa posição”, conhecida em várias culturas antigas, é uma aplicação da proporcionalidade. Voltaremos, no entanto, a nossa atenção para dois aspectos da matemática grega em relação à teoria de razões e proporções.

O primeiro aspecto da matemática grega que queremos comentar é o de que não se acha nela o conceito de “função”, que foi desenvolvido somente a partir do século XVIII. Na ausência do referido conceito, usava-se, primordialmente, a proporcionalidade para a elaboração de equações. Isto é um aspecto da matemática – especialmente da matemática aplicada – que perduraria na Idade Média e no Renascimento.

O segundo aspecto da matemática grega que queremos comentar é o fato de que a noção de razão está presente no próprio conceito grego de número (*arithmós*), pois isso é concebido como uma coleção de unidades. Isso tem várias consequências. Visto, por exemplo, que a unidade não tem partes, ela não pode ser partida e, assim, o conceito de fração não faz sentido. Dessa maneira, na matemática teórica, as razões fizeram o papel de frações e, na matemática prática, o conceito de razão foi concretizado pelos sistemas de mensuração, pois nesse contexto não há, aparentemente, problema com a existência de submúltiplos, nem a escolha de unidades menores.

De fato, é “inteiramente óbvio” que, dados dois segmentos, pode-se achar uma unidade que medirá os dois. Assim, a descoberta da incomensurabilidade foi uma grande surpresa aos gregos e ocasionou uma reformulação da sua teoria de razões e proporções. Isto é retratado em *Os Elementos* de Euclides, no Livro VII que é dedicado à referida teoria no contexto de números inteiros (positivos) e no Livro V, dedicado à nova teoria elaborada por Eudoxo, um matemático associado<sup>1</sup> à Academia platônica.

### A Matemática e a Certeza

Grande parte da jornada intelectual do homem antigo foi a procura de conhecimento seguro e foi na matemática que ele julgou ter achado a almejada certeza. Assim, era natural tentar transferir a certeza da matemática a outros campos de conhecimento por estruturar estes segundo princípios matemáticos. Neste empreendimento, a teoria de razões e proporções foi um dos mais importantes pontos de contato entre a matemática e as outras áreas.

Podemos lembrar, por exemplo, do conceito do macrocosmo (o universo) e o microcosmo (o homem) como tendo a mesma estrutura. Essa “mesma estrutura” era concebida, grosso modo, em termos de uma proporcionalidade existente entre os dois cosmos. Na *República*, Platão até postula um mesocosmo (o estado), enquanto o arquiteto

---

<sup>1</sup> É provável que Eudoxo fosse sócio de Platão na Academia.

italiano Andrea Palladio (1508-1580) parece ter acrescentado mais uma estágio nessa proporcionalidade, pois, apesar de existir certa especulação de que ele estruturou suas edificações segundo a "razão áurea", é muito mais provável que queria estruturá-las segundo a proporcionalidade comum do macro/microcosmo, porque desta forma estaria criando um miniuiverso em que o homem poderia se sentir "em casa".

A ubiquidade da influência da teoria de proporcionalidade, no entanto, é vista melhor através da doutrina dos quatro Elementos Materiais: o Fogo, elemento divino, próprio aos corpos celestiais, o Ar e a Água, elementos transicionais, próprios, respectivamente, à atmosfera e à superfície da terra, e a Terra, elemento mundano, próprio ao centro do universo. Esses elementos estiveram presentes, como princípios explicativos, em quase todos os campos de conhecimento. Como ilustração, abordaremos seu papel nos campos da Biologia e da Psicologia, através das correspondências listadas na Tabela 1.

<b>Elemento</b>	<b>Biologia</b>	<b>Psicologia</b>
Fogo	Bílis Amarela (Fígado)	Colérico
Ar	Sangue (Coração)	Sanguíneo
Água	Fleuma (Cérebro)	Fleumático
Terra	Bílis Preta (Baço)	Melancólico

**Tabela 1.** Correspondências dos Elementos Materiais na Biologia e na Psicologia.

As correspondências dos Elementos Materiais com fluidos do corpo proporcionam uma explicação da origem de doenças e poderão até indicar procedimentos curativos. Assim, alguém que tem uma preponderância de Ar poderá padecer de infecções respiratórias e, visto que Ar é correlatado com o sangue, seria necessário diminuir o volume deste fluido no corpo, o que explica a estranha prática de sangrar certos tipos de pacientes. Em termos psicológicos, uma preponderância de Fogo, por exemplo, gera o tipo colérico de personalidade. Em todos os dois casos, obtém-se saúde física e mental através da proporção correta dos Elementos Materiais na constituição da pessoa. Para Platão, a proporção Fogo:Ar::Ar:Água::Água:Terra seria, segundo Erickson e Fossa (2006), 3840:2880::2880:2160::2160:1620.

### **A Linha Dividida**

Não será possível explicar aqui todos os detalhes de como essa proporção é deduzida, mas devemos mencionar a estrutura matemática que fundamenta toda a filosofia e, portanto, boa parte da filosofia europeia perante os séculos. Trata-se da Linha Dividida, cuja geração é descrita por Platão na seguinte maneira: um segmento de reta é dividido em

alguma razão e as partes resultantes são também divididas nessa mesma razão. Aritmeticamente, isso produz, dada a visão pitagórica de Platão, (i) a proporção  $m^2:mn::mn:n^2$ , onde  $m$  e  $n$  são números inteiros positivos e, claramente,  $mn$  é a média geométrica dos extremos,  $m^2$  e  $n^2$ , ou (ii) um múltiplo de (i), a saber,  $km^2:kmn::kmn:kn^2$ , onde  $k$  é um inteiro positivo.

Quando essa estrutura é interpretada filosoficamente, obtém-se uma hierarquização da existência e dos modos de apreensão apropriados a cada modo. A Linha Dividida pode ser gerada aritmeticamente e iterada por um algoritmo simples, mas sua interpretação filosófica depende de uma comparação entre a aritmética e a geometria, pois os dois segmentos do meio são numericamente iguais, mas geometricamente distintos (embora congruentes). Dessa forma, por exemplo, as Formas Matemáticas são, por assim dizer, puras abstrações, enquanto as Formas Cosmológicas são contextos materiais informados por essas mesmas abstrações. Erickson e Fossa (2006, p. 182) fazem um resumo da teoria através de uma figura que reproduzimos aqui como a Figura 2.

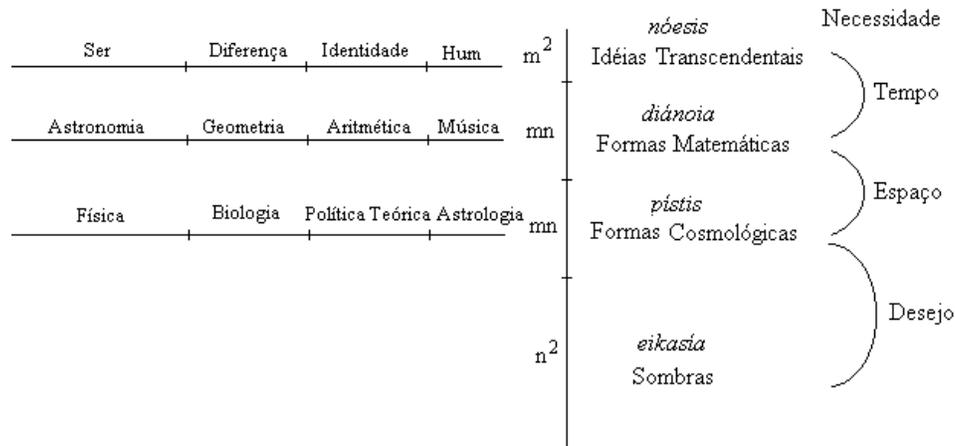


Figura 2. A Doutrina da Linha Dividida.

Na referida figura, a linha vertical é uma espécie de linha principal, enquanto as linhas horizontais são linhas subsidiárias mostrando como as partes da linha principal se decompõem em outras linhas divididas. Para nossos propósitos, o mais interessante destas é a que mostra a decomposição da própria matemática no *quadrivium* (os quatro estudos matemáticos): Astronomia, Geometria, Aritmética e Música. Dada a importância dos números para os pitagóricos, poderá ser surpreendente achar a Música – em vez da Aritmética (a ciência dos números) – na parte mais nobre da linha, correspondente ao lugar de Hum (Deus) na linha das Ideias Transcendentais. Faremos uma rápida explicação, pois é relevante ao nosso tema.

A estrutura das várias linhas sugere uma teoria de emanações e, de fato, filósofos posteriores, como Plotino (205?-270?), fizeram isto de modo explícito. A maneira mais natural de entender isto é aquela segundo a qual tudo origina com o Hum, cujas emanações

desabrocham no tempo. Se voltarmos para a Figura 2, portanto, veremos, na coluna intitulada “Necessidade”, os elementos que emergem em cada nível e que limitam a existência dos seres do novo nível, bem como a certeza obtida deles através do modo de apreensão apropriado àquele nível. Assim, as Ideias Transcendentais têm o tipo mais perfeito de existência, enquanto as Formas Matemáticas, visto que dependam das Ideias Transcendentais, têm uma existência menos perfeita. Semelhantemente, conhecemos as Ideias de forma perfeita, através da Intuição, uma espécie de união do conhecedor e conhecido, que é dada de uma só vez, sem a necessidade de qualquer meio intermediário. As Formas Matemáticas, em contraste, são conhecidas através do meio intermediário da linguagem discursiva e isto cria uma ordem limitante que não está presente na Intuição.

Voltando à linha dos quatro estudos da matemática, vemos que a Música está na posição mais nobre. Mas, a Música é o estudo de razões e proporções. Isso indica, portanto, que o conceito do desabrochamento dos vários níveis não é inteiramente correto, pois é resultado das limitações impostas à nossa compreensão devido ao fato de sermos entidades imersas no tempo<sup>2</sup> e no espaço. Do ponto de vista da Intuição, ou seja, de “*God’s eye view*,” o Hum já existe *junto com* os outros níveis, pois os números não existem primeiro para depois entrarem em relações de proporção entre si, mas já existem relacionados entre si. Para usar uma analogia utilizada por Brouwer (1881-1961) em outro contexto, a situação é como a dos polos magnéticos, pois estes não existem independentes do campo magnético – ao contrário, os polos e o campo são dados conjuntamente. Assim, na visão filosófica platônica, a razão e a proporção estão no cerne do real.

### Conclusão

Tentamos mostrar, de forma breve, algo da importância dos conceitos de razão e proporção no mundo antigo, tanto para o desenvolvimento da própria matemática, quanto para outros campos de conhecimento. Ainda incluímos algumas indicações de como as doutrinas antigas perduraram, ou se desenvolveram, na Idade Média e Renascimento.

### Bibliografia

ERICKSON, Glenn W.; FOSSA, John A. *A Linha Dividida: Uma Abordagem Matemática à Filosofia Platônica*. Rio de Janeiro: Relume Dumará, 2005.

FOSSA, John A. *Os Primórdios da Teoria dos Números*. Natal: Editora da UFRN, 2010.

<p><b>John A. Fossa</b> Departamento de Matemática Universidade Federal do Rio Grande do Norte Natal - Brasil</p> <p><b>E-mail:</b> jfossa@oi.com.br</p>
--

<sup>2</sup> A ordem que limita a Matemática não é, estritamente falando, a ordem do tempo fenomenal (que surge apenas no próximo nível), mas a ordem da relação de consequência. Esse detalhe, porém, pode ser ignorado no presente contexto.