Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 12 nº 25 (agosto/2012 - dezembro/2012) - pág. 73-84
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

MORITZ PASCH, PRECURSOR Y TESTIGO LÚCIDO DEL CAMBIO RADICAL EN MATEMÁTICAS

Mario H. Otero
Universidad de la República – Uruguay

(aceito para publicação em julho de 2012)

Resumen

El presente trabajo, a partir del marco general de las tesis matemáticas y en particular geométricas de Moritz Pasch, considera desarrollos de sus artículos posteriores, a partir de Pollard 2010, por su valor para comprender el conjunto de su obra. Ya en 1999 presentamos en Llull el trabajo de Pasch 'Acerca del valor formativo de las matemáticas , conferencia de 1894, que permitía percibir las tendencias' que se van a expresar en los artículos referidos. Es de esos textos que se puede concluir que Pasch no sólo es precursor sino testigo lúcido y coproductor de análisis decisivos para el cambio radical que se produce en geometría y en lógica hasta 1930.

Palabras-clave: Fundamentación, axiomática geométrica, empirismo, deducción estricta.

[MORITZ PASCH, PRECURSOR AND LUCID WITNESS OF MATHEMATICS' RADICAL CHANGE]

Abstract

This article presents, from the general frame of the Moritz Pasch mathematical and especially geometrical theses, his articles as appear in Pollard 2010. Their value is extremely important to understand Pasch whole work. In Llull 1999 we have presented Pasch lecture of 1894 'About the formative value of mathematics'. It allows to perceive the tendencies that appear in the referred articles. From all those texts we may conclude that Pasch is not only a precursor. He is a lucid /testigo/ and a coproducer of many of thedecisive analyses for the radical change in geometry and logic till 1930.

Keywords: Foundations, geometric axiomatic, empirism, strict deduction.

UNO

Pasch nace en 1843 -cuando Kierkegaard escribe *O bien o bien y* John Stuart Mili publica su *Sistema de lógica* -, y muere en 1930 en plena crisis económica mundial. Desarrolla su producción matemática durante casi sesenta y cinco años; durante diecisiete en geometría algebraica y casi el resto de su vida productiva en fundamentos de la matemática. La mayor parte de su carrera es en Giessen y llega en 1893-94 a Rector.[1] En 1894 pronuncia en ese carácter la conferencia *Acerca del valor formativo de las matemáticas*, cuya traducción al castellano fue presentada por nosotros en 1999 en *Llull*.

> Moritz Pasch is justly considered the first producer of a modern axiomatic.[2] His procedure later became characteristic. His conception of the origin of the axioms is clearly empiricist, but then his development of geometry excludes other procedures than demonstrative ones, considering that all the others, not unusual ones, are inconsequential.[3]

En resumen

> ...The theorem is only really demonstrated when the demonstration is completely independent from the figure. The axioms cannot be conceived without the corresponding figure, they are the expression of what has been observed in certain very simple figures. The theorems are not found in observation, they are demonstrated, every conclusion that appears in the course of the demonstration must be confirmed in the figure, but it is not justified by it, but rather by a certain proposition (or definition) that precedes it... No matter how little we detach from this procedure, the spirit of the demonstration loses all precision. [PASCH, 1882, paragraph 32]

Esa observación es correctamente afirmada en el caso de los axiomas pero

> apart from the perception of the senses, it is not licit to refer to "intuition" or "imagination" as special sources of mathematical knowledge [PASCH, added in 1912 to Chapter 23].

Pasch insiste en su empirismo estricto y muy especial.

> Mathematics establish relations between mathematical concepts that must accord with the experimental facts, although they are mostly not taken directly from experience, yet they are "demonstrated"; the same knowledge needed for the demonstration (apart from the definitions of derived concepts) constitute part of those relations. If the propositions based on the demonstration -the theorems- are

[1] Gillispie, Dictionary of scientific biography.

[2] Freudenthal remarks, not groundlessly, the curious fact that neither Klein nor Poincaré, although they repeatedly talk about axioms, present cases of them.

[3] This procedure is, to a certain exten,; comparable to the procedure used by Hilbert for his finitism.

> left out, it remains a group of propositions, from which all the rest can be deduced [PASCH, paragraph 12].

Justo antes afirma:

> The fundamental concepts have not been defined, because there is no definition whatsoever capable of replacing the observation of the appropriate natural objects...

Sin embargo, el carácter deductivo de la disciplina es salvado francamente:

> ... from a purely mathematical point of view (the conformity with its applications) may be left out and the definitions of a concept which have not relation with its applications may be accepted as good and still be preferred to the rest" [PASCH, added in 1912 to the Introduction].

Los conceptos fundamentales no se han definido

> The point, the straight line and the plane surface (in the general sense), two elements being incident and pairs of elements being separated, perform in position geometry the role of primitive concepts, to which all the rest must be referred to". [PASCH, paragraph 55].

El parágrafo 77 se enfoca en la convicción de Pasch en el carácter estrictamente lógico-deductivo de la axiomática:

> We have said before how much of graphic geometry exists as a consequence of theorems SS 7, 8 and 9, in these we can replace constantly the words point and plane surface and therefore, the consequences are also legitimate, without restrictions when these substitutions are done in them. Moreover, if geometry is to be deductive, the procedure of deduction must be effectively independent of the character of the geometrical concept, as it should be of the figures; we can only take into account the relations between the geometrical concepts established as definitions in the theorems used. In the case of deduction it is licit and useful, but in no way necessary, to think about the meaning of the geometrical concepts present. So precisely when this is necessary, the defects of the deduction and (if the defects do not disappear by modifying the reasoning) the insufficiency of the theorems, that had been put before as means of demonstration, arise. (...) It is clear that this discussion is not superfluous when we observe that the conditions set beforehand often remain unfulfilled, even in works concerning the foundations of geometry or other mathematical disciplines. From a generalised viewpoint, the theorems must be logical consequences of the axioms. But there is not always a conscientious use of all the means of demonstration".

El método rigurosamente deductivo no es un obstáculo inútil, excluye toda arbitrariedad y da a la matemática el carácter de certeza absoluta que es atribuido a ella.

De ese modo hay un sentido fuerte de demostración deductiva sin interferencias de intuiciones, observaciones, aplicaciones, en la construcción que hace Pasch de la geometría. El carácter no definido de los conceptos primitivos y de su independencia de figuras, y particularmente de significados, es bien claro.

Pasch procede de un modo que luego va a ser característico. Su concepción del origen de los axiomas es claramente empirista pero, en cambio, su desarrollo de la geometría excluye, como dijimos, otras formas de proceder que las demostrativas, considerando que todas las demás, que no son inusuales, resultan no válidas y por ello intranscendentes.

> [...] el teorema sólo está realmente demostrado cuando la demostración es completamente independiente de la figura. Los axiomas no es fácil concebirlos sin la figura correspondiente, son la expresión de lo que se ha observado en ciertas figuras muy sencillas. Los teoremas no se fundan en la observación, sino que son demostrados, toda conclusión que aparece en el curso de la demostración debe confirmarse en la figura, pero no es con ella como se justifica, sino con una proposición cierta (o con una definición) que le precede […] A poco que se separe de este procedimiento, pierde ya toda precisión el espíritu de la demostración [PASCH, paragraph 32].

La observación es reivindicada en el caso de los axiomas pero,

> …aparte de la percepción de los sentidos, no es lícito referirse a la intuición o a la imaginación como fuentes especiales de conocimientos matemáticos [PASCH, adición de 1912 al capítulo 23],

con lo que Pasch confirma su estricto pero especial empirismo.

> La matemática establece relaciones entre los conceptos matemáticos, que deben estar de acuerdo con los hechos experimentales, aunque en su mayor parte no se toman directamente de la experiencia, sino que son demostradas; los mismos conocimientos precisos para la demostración (aparte de las definiciones de los conceptos derivados) constituyen una parte de tales relaciones. Si se prescinde de las proposiciones basadas en la demostración -los teoremas-, queda un grupo de proposiciones, los axiomas, de las cuales pueden deducirse todas las demás: [...]". [PASCH, parágr. 12].

Algo antes nos dice:

> Los conceptos fundamentales no han sido definidos; pues no hay definición alguna capaz de sustituir a la observación de objetos naturales adecuados.

Con todo, se salva de modo neto el carácter deductivo de la disciplina:

> [...] desde el punto de vista puramente matemático, puede prescindirse de ello (de acuerdo con sus aplicaciones) y aceptar como buenas las definiciones de un concepto que no tienen relación alguna con sus aplicaciones, y aún preferirlas a las demás [PASCH, adición de 1912 a su Introducción].

Los conceptos fundamentales no son definidos. De todos modos

> El punto, la recta y el plano (en la acepción general), el ser incidentes dos elementos y el estar separados pares de elementos, desempeñan en la geometría de Posición el papel de conceptos primitivos, a los cuales deben referirse todos los demás [PASCH, párr. 55].

En el párrafo 77 se centra el pensamiento de Pasch sobre el carácter lógico deductivo estricto de la axiomática:

> Hemos dicho antes que, cuanto de Geometría gráfica existe, como consecuencia de los teoremas de los SS 7, 8 y 9; en éstos pueden sustituirse constantemente las palabras punto y plano y, por tanto, las consecuencias son también legítimas, sin restricción alguna, cuando en ellas se haga la indicada sustitución.

Por otra parte, si la geometría ha de ser realmente deductiva, el proceso de la deducción debe ser, en efecto, independiente del carácter del concepto geométrico, como debe serlo de las figuras; solamente pueden tenerse en cuenta las relaciones entre los conceptos geométricos establecidas a modo de definiciones en los teoremas utilizados. En el caso de la deducción es lícito y útil, pero en modo alguno necesario, pensar en la significación de los conceptos geométricos que se presentan; de tal modo, que precisamente cuando esto se hace necesario, de ello

> …resulta lo defectuoso de la deducción y (si los defectos no desaparecen por modificación del razonamiento) la insuficiencia de los teoremas que, como medio de demostración, se habían antepuesto [...]. Se ve que esta discusión no es superflua, observando que, frecuentemente, quedan incumplidas las condiciones de antemano impuestas, hasta en los trabajos que se refieren a los fundamentos de la geometría, o de otras disciplinas matemáticas. Según la manera general de ver, los teoremas deben ser consecuencias lógicas de los axiomas. Pero no siempre se hace uso concienzudo de todos los medios de demostración... El método rigurosamente deductivo no es una traba inútil, excluye toda arbitrariedad e infunde a la matemática el carácter de absoluta certeza que se le atribuye.]

Se da pues, en la construcción de la geometría por Pasch, un fuerte sentido de la demostración deductiva sin interferencias de intuiciones, observaciones, aplicaciones u otros, se tiene claro el carácter de no definidos de los primitivos y de su independencia de figuras y particularmente de significados.

DOS

Hemos recogido los aportes a nuestro tema contenidos en *Vorlesungen ueber neuere Geometrie*,[4] que ya son suficientemente ilustrativos del pensamiento de Pasch.

[4] En la traducción de Ude y Rey Pastor (1812).

Sin embargo, Pasch (1894) contiene una exposición sistemática que es digna de consideración, sobre todo por ser una presentación integrada de su punto de vista. La conferencia del rector y profesor de matemáticas de la Ludwig Universitat, fue efectuada para un público académico amplio, en oportunidad del centenario de la Universidad. De todos modos, resulta de primera el nivel de dicho discurso. Resulta conveniente considerar que entre las *Vorlesungen* y la conferencia como Rector de Giessen, transcurren doce años.

Gino Loria, en *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (1896), cita, entre otros, trabajos de Pasch sobre las curvas racionales, sobre la teoría de complejos lineales, colineaciones y reciprocidad, sobre la geometría proyectiva y la introducción analítica de las formas geométricas (1887), insiste en la influencia que tuvo Pasch en Veronese (1882), sobre los fundamentos de la geometría de varias dimensiones expuestos en forma elemental (1891), algunas previas a 1882, otras comprendidas entre el 82 y el 94, otras posteriores al 94.

Killing lo cita en *Einführung in der Grundlagen der Mathematik*. Freudenthal (1962) señala que en ese intervalo ven la luz varias obras de distintos autores sobre fundamentos de la geometría.

H. C. Kennedy dice:
The father of rigor in geometry is Pasch. [¿datos?]

Fano (1891) lo cita en notas, Frege también en 1903, en el primero de sus escritos polémicos con Hilbert, Heath en una obra central. Grattan-Guinness, en cambio, en su tabla de *minor german geometers (*1997), apenas lo sitúa entre los modernos.

TRES

La conferencia de 1894 Pasch la pronuncia como rector en la conmemoración del centenario de la Universidad de Giessen. Ella es reflejo del estado de la práctica matemática hacia fines del XIX, de cómo repercute en la enseñanza y de cómo se conciben ambas en ese momento.

La conferencia constituye una sistematización de las ideas que en ese momento se tiene de la geometría y de las matemáticas. Constituye, a la vez, un lúcido reflejo del desarrollo histórico de las matemáticas. Se trataría, más bien que de ideas exclusivas de Pasch, de las que estaban en el aire entonces. Esta resulta de una hipótesis algo más que plausible. Veremos más adelante como este aspecto de la obra de Pasch se acentúa con el tiempo.

Las ideas de nuestro autor sobre el rigor, ¿estaban ya en el aire hacia 1894? Hasta podríamos afirmar que Pasch 1882 ya no era ajeno a ellas. Allí se adelanta la idea de la historicidad del rigor que sólo mucho después Judith Grabiner desarrollara ampliamente.

Pasch nos presenta ideas interesantes de la ciencia matemática como *mathesis universalis*, nos muestra su deber de hablar de esa ciencia, de su utilidad y/o puridad, de las matemáticas en la enseñanza superior técnica -tema acuciante desde entonces hasta hoy-, de la deducción y de la especificidad de aquella disciplina, del origen del conocimiento de los principios y de la necesaria deducción de los teoremas sin interferencias externas; del lenguaje matemático, de los significados a atribuir, o a prescindir respecto a los términos primitivos. Este hombre dedicado casi cincuenta años a la cuestión de los fundamentos, sin excluir "tareas menores" en otros temas significativos en relación con aquélla, expone sus ideas con brillantez. Contribuye a plantear los problemas de la enseñanza de la cultura matemática a la que está destinada gran parte del texto. Una porción significativa está dedicada a la demostración y ello constituye a Pasch no sólo como un impulsor de la axiomática moderna en la práctica matemática en 1882, sino en sistematizador de ideas para nada triviales en 1894. Si Pasch cita a veces, pero sin referencias precisas (a diferencia de cómo procede en las lecciones de 1882, probablemente porque se trataba de una conferencia dirigida a un público amplio), ello sólo refleja una forma de pensar acostumbrada en su tiempo. Hilbert, en comparación, citaba bien poco.

CUATRO

Más que detallar cada uno de los aportes de Moritz Pasch, vamos a incitar, a recomendar especialmente la lectura de los textos de la conferencia porque así lo merece.

No solo es Pasch el creador más significativo de una axiomática moderna, el gran precursor de la contagiada axiomática prácticamente a todas las ciencias,[5] sino también, en una segunda época, *el testigo lúcido de un cambio radical* en matemáticas que se da, en gran parte, en el curso de su vida.

Hilbert toma especialmente en cuenta la obra de Pasch en sus trabajos *Nuevos fundamentos de la matemática* de 1922,[6] y *Fundamento lógico de la matemática de* 1923.[7]

> The standard way to prove a geometric theory consistent is to provide an arithmetical model. Our theory in, indeed consistent. (POLLARD, 2010).

No sólo Pasch sino también, como es bien sabido, Hilbert comete el error de utilizar la idea de consistencia relativa, y especialmente de suponer consistente la aritmética. Hilbert vivió para ver su error, en cambio Pasch no porque cuando muere en 1930, Gödel todavía no había difundido su teorema de 1931.[8]

---

[5] Heinrich Scholz presenta una axiomatica para la teología.
[6] Neubegründung der Mathematik, Hilbert, 1978.
[7] Die logischen Grundlagen der Mathematik, Hilbert, 1978.
[8] Por otra parte, la geometría de Pasch no cubre las curvas y además su axiomática es la de la geometría proyectiva. Su término primitivo es el segmento y no la recta como presenta Hilbert 99.

CINCO

Desde la primera edición de Pasch 1882 transcurren treinta años hasta la segunda. Durante ese período su producción matemática, lejos de estancarse, se desarrolló en un conjunto de valiosos trabajos, muchos de los cuales llegan hasta nosotros en Pollard 2010. De la lectura de este manojo de trabajos, de su riquísimo contenido, es que afirmamos que Moritz Pasch no sólo fue testigo del cambio radical de las matemáticas que se produce justamente en ese período, sino precursor y actor del mismo.

Un agrupamiento razonable de los trabajos principales para nuestro objetivo, pero no el único, sería:

A. 6. Preludio a la geometría	1922 p. 117-138
B. 1. Geometría empírica	
en Cuestiones fundamentales de la geometría	
7. Geometría física y matemática	1922 p. 139-147
8. Geometría natural	1924 p. 149-150
C. 2. Decidibilidad	1918 p. 51-54
4. Definición implícita	1921 p. 95-107
5. Cuerpo rígido	1922 p. 109-116
10. Fundamento apropiado de las matemáticas I	1924 p. 175-182
12. Conceptos y pruebas en matemáticas	1925 p. 183-203
13. Reflexiones sobre el fundamentales	
de las matemáticas II	1926a p. 215-219
14. Método axiomático en las matemáticas modernas	1926b p. 221-242

Se indica el año de las publicaciones originales y las páginas correspondientes en Pollard 2010.

SEIS

Una nota de Pasch 1917 que dice

> Thing of the first, second, third kind” instead of point, line, surface…

remite claramente al Hilbert 99 de mesas, sillas y chopes.
Ello le permite a Pasch manejar, según dice, “la imprecisión de los conceptos geométricos”. Mientras que Hjelmslev 1915 trata estas cuestiones pero, según Pasch, no ofrece “un análisis de su ‘sistema práctico’ al insistir en su lugar que “a detailed logical análisis of

individual logical axioms in the manner of Euclid will always prove to be clumsy and unnatural". [datos?]

Por otra parte Hjelmstev 1923 critica como Pasch introduce una geometría natural que trata de describir las propiedades espaciales existentes de las cosas externas. Considera que ello no es compatible con una geometría axiomática. Pasch 1924 responde que no todo lo fundamental está en las proposiciones básicas, nucleares, básicas, los axiomas. Nuestro autor considera asimismo que Hjelmsted se ve obligado a utilizar definiciones implícitas por más que critique su utilización en Pasch. Éste piensa que sus resultados en *Prelude to geometry, the essentials ideas* contribuye positivamente al programa de su crítico.

Por otra parte, cuando Hjelmslev lo critica por introducir el uso de coordenadas, Pasch lo admite fundadamente. Es más, la geometría matemática no encierra imprecisiones como la geometría física. La imprecisión de los conceptos de ésta da lugar a la introducción de números irracionales

> Alongside these mathematical points, fixed in the unchangeable mathematical world-mass", we can consider other mathematical points that move passing through the stationary points – he latter serving as temporary locations of positions. If you would rather make do with stationary points alone, you can treat motion as a "transformation" [p. 147].

Como vemos Pasch trata, en varios momentos distantes entre sí, los argumentos de Hjelsmlev, con especial cuidado, y sólo señalamos artículos de 1917 y 1924.

Con tono irónico Pasch 1917 cita a Paul du Bois-Reymond:

> If a proof is an explanation, then ultimately, and speaking in general terms,it is the construction of a logically satisfying sequence of ideas that links an idea thatdisquiets us to some ideas that leaves us undisturbed

Pasch apunta asimismo a la coincidencia de trozos de Sturnflels 1915 con tesis suyas.

SIETE

Kronecker sería, para nuestro autor en 1818, quien propuso antes que nadie el requisito de decidibilidad; y argumentó que cualquier concepto cuya definición no esté basado en una prueba de decidibilidad debe ser descartado. Ese requisito no fue de fácil aceptación. Y

Cuando es aceptado por Pasch éste dice

> We might then distinguish between settled and unsettled areas. I make a distinction between calculation satisfying the decidability requirement and "improper" calculation…Most of mathematics is unsettled.

Otras veces utiliza la distinción entre matemáticas rígidas y plegables.

Pasch 1921 considera las definiciones implícitas y en especial su utilización por parte de Dedekind en sus decisivos trabajos, lo cual resulta especialmente interesante.

OCHO

La mayor parte de los artículos publicados de 1924 a 1926 y especialmente el último, de la colección de Pollard, sobre el método axiomático en matemáticas modernas, no hacen sino apoyar la tesis de que Pasch no es sólo precursor y testigo lúcido sino que acompaña críticamente el desarrollo de la geometría y de las matemáticas desde los setentas del siglo diecinueve casi hasta su muerte en 1930.

BIBLIOGRAFÍA

ARNOLD, V. (s.f.) "Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts?". En: V. Arnold et al.(eds., s.f.) *Mathematics: frontiers and perspectives*. American Mathematical Society.

BABBAGE, J. "Memories of the Analytical Society". En: A. Hyman (1989) *Science and reform: selected works of Charles Babbage*. Cambridge, Cambridge University.

BOOLE, G. (1966) El cálculo de la lógica. *Galileo*, segunda época, n. 4.

BORGA, M., FREGUGLIA, P. & PALLADINO, D. (1985) *I contribute fondazionali della scuola de Peano*. Milano, Franco Angeli.

BULDT, B. & SCHLIMM, D. (2010) "Loss of vision: how mathematics turned blind while it learned to see more clearly". En: B. Lowe & T. Múller (eds.) *Philosophy of mathematics sociological aspects of mathematical practice.* London, College.

CORRY, L. (2002) "David Hilbert y su filosofía empirista de la geometría". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 9 (1).

_________ (2006) "The origins of Hilbert axiomatic method". En: J. Renn *The genesis of general relativity, v. 4, Theories of gravitation in the twilight of classical physics: the promise of mathematics and the dream of unified theory*. Dordrecht, Springer.

EWALD, W. (1996) *From Kant to Hilbert, a source book on the foundations of mathematics*. Oxford, Clarendon.

FREUDENTHAL, H. (1962) "The main trends in the foundations of geometry in the 19th century". En: E. Nagel, P. Suppes y A. Tarski (eds.), *Logic, methodology and philosophy of science*. Stanford, Stanford University.

HALLETT, M. & MAJER, U. (eds., 2004) *David Hilbert's lectures on the foundations of geometry, 1891-1902.* Dordrecht, Springer.

HILBERT, D. (1971) *Foundations of geometry*. La Salle IL, Open Court. /traducción de la décima edición en alemán; edición original de1899/.

_________ (1978) *Ricerche sui fondamenti della matematica*. Napoli, Bibliopolis.

HORMIGON, M. (1995) *Paradigmas y matemáticas: un modelo teórico para la investigación en historia de las matemáticas*. Zaragoza, Universidad de Zaragoza.

KENNEDY, H. C. (1972) "The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano", *American Mathematics Monthly*, 78 (2).
LORIA, G. (1896) *ll passato ed il presente delle principali teorie geometriche*. Torino, Clausen.
NAGEL, E. (1939) "The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry". *Osiris*, 7.
NOVÝ, L. "Efforts to find a new approach to algebra". En: (Autor) *Origins of modern algebra.* Academia (Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences).
OTERO, M. H. (1983) "El escándalo de los beocios". *Llull, 10-11*
_________ (1988) "El concepto de racionalidad: un caso, la polémica Frege-Hilbert". En: Olivé, L. (ed.) *Racionalidad, ensayos sobre la racionalidad en ética y política, ciencia y tecnología*. México, Siglo XXI. /ponencia en Simposio Internacional sobre Racionalidad, Instituto de Investigaciones Filosóficas, l986/.
_________ (1999) Presentación del texto de *Moritz Pasch "Acerca del valor formativo de las matemáticas (1894)*". *Llull*, 44.
_________ (2001) "La lógica en el siglo XIX y su reconstrucción historiográfica". En: J.L. Villacañas (ed.) *La filosofía del siglo XIX*. Madrid, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Consejo Superior de Investigaciones Científicas-Trotta.
_________ (2003) "Una filosofía histórica de las matemáticas en Randall Collins 1998". *Galileo*, 26.
_________ (2006) "Un texto historiográfico clásico: el artículo 'Matemáticas' en la Enciclopedia Soviética de 1936". *Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas, 9(1).*
_________ (2008) "Mesas, sillas y jarras de cerveza; o del uso prehilbertiano de los conceptos primitivos de los *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert"[9]. En: M. Á. Velamazán et al. (2008) *La historia de las ciencias y de las técnicas: un arma cargada de futuro*. Volumen colectivo de homenaje a Mariano Hormigón.
PASCH, M. (1882) *Vorlesungen ueber neuere Geometrie*. Leipzig.
_________ (1913) *Lecciones de geometría moderna*. Madrid, Arias /traducción de J. Alvarez Ude y Julio Rey Pastor/.
POLLARD, S. (2010) *Essays on the foundation of mathematics* by Moritz Pasch. Dordrecht, Springer.
PIERI, M. (1980) *Opere sui fondamenti de la matematica.* Roma, Cremonese.
RUSSELL, B. (1948) *Los principios de la matemática*. Buenos Aires, Espasa-Calpe [Edición original de 1919].
SCHLIMM, D. (2003) "Axiomatic and progress in the light of 20th century philosophy of science and mathematics". En: B. Lowell et al. (2003) *Foundations of the formal sciences IV: the history of the concept of formal sciences*, papers of the conference held in Bonn, February 14-17.
_________ (2010) "Pasch's philosophy of mathematics". *The Review os Symbolic Logic*, 3, (1).

[9] El texto fue presentado originalmente en 1999 en ocasión del Simposio dedicado a la obra de David Hilbert, organizado por Mariano Hormigón.

SCHUBRING, G. (1996) *Hermann Günther Grassman: visionary mathematician, scientist, and neohumanistic scholar*. Dordrecht, Kluwer.
STAUDT, C.V. (1889) *Geometría di posizione*. Torino, Bocca, /Introducción de C. Segre y traducción de M. Pieri/.
TORRETTI, R. (1978) *Philosophy of mathematics from Riemann to Poincaré*. Dordrecht, Reidel.

Mario H. Otero

Faculdad de Humanidades y Ciencias de la Educación Universidad de la República Montevideo – Uruguay

E-mail: mhotero@adinet.com.uy