Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 12 nº 25 (agosto/2012 - dezembro/2012) - pág. 65-71
Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática
ISSN 1519-955X

SOBRE UMA GENERALIZAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA: TRADUÇÃO DO PRIMEIRO TRABALHO DE HENRI LEBESGUE SOBRE SUA NOVA INTEGRAL

Sílvio César Otero-Garcia
Universidade Estadual Paulista – UNESP – Brasil

(aceito para publicação em julho de 2012)

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma tradução comentada do artigo de Lebesgue *Sur une Généralisation de l'Intégrale Définie*, no qual o matemático francês expôs pela primeira vez a teoria da sua nova integral. A tradução, que pretende ser o mais fiel possível ao original, foi feita seguindo a metodologia de Vinay e Darbelnet (1958, 2004).

Palavras-chave: História da Análise Matemática, Teoria da Medida, Integração.

[ON A GENERALIZATION OF THE DEFINITE INTEGRAL: TRANSLATION OF THE FIRST WORK OF HENRI LEBESGUE ON HIS NEW INTEGRAL]

Abstract

In this paper, a commented Portuguese translation of the Lebesgue's article: *Sur une Généralisation de l'Intégrale Définie* is offered, which the French mathematician shows us for the first time his theory about his new integral. The translation, that intends to be as faithful as possible to the original, it´s been done following the methodology of Vinay e Darbelnet (1958, 2004).

Keywords: History of Mathematical Analysis, Measure Theory, Integration.

Introdução

O matemático francês Henri Lebesgue propôs, no começo do século XX, novos conceitos de integral e de medida. O primeiro deles generalizava as integrais propostas por Riemann e Cauchy, sanando diversas deficiências dessas; o segundo, as medidas de Jordan e Borel (HOCHKIRCHEN, 2003; CAJORI, 2007). Não por acaso, essas generalizações levaram o seu nome: integral de Lebesgue e medida de Lebesgue.

A integral de Riemann é aplicável tanto a funções contínuas como a funções que admitem um número finito de descontinuidades, entretanto, há severas restrições no caso do número de descontinuidades ser infinito. Um exemplo emblemático é a da função Dirichlet, $D: [0,1] \rightarrow R$ dada por:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in Q \\ 0, & se\ x \in I \end{cases}.$$

Essa função, que é descontínua em todos os pontos do domínio, não é integrável segundo a definição de Riemann. Exatamente aí residia um ponto de partida de Lebesgue: essa impossibilidade de encontrar uma primitiva de certas funções (HOCHKIRCHEN, 2003).

Entretanto, exemplos como o que citamos eram vistos com certa desconfiança ainda no início do século XX. Muitos matemáticos da época diziam que o estudo de tais casos particulares desviaria os jovens estudantes de problemas mais importantes que ainda estavam em aberto. Henri Poincaré partilhava dessa desconfiança:

> *"Autrefois quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères [...][1]". (POINCARÉ apud SAKS, 1937, p. IV)*

Do mesmo modo também não foram bem recebidos naquela época os trabalhos de Lebesgue que tratavam de seus novos conceitos de medida e de integral, dentre eles a sua tese de doutorado, *Intégrale*, *Longueur*, *Aire*, defendida 1902 pela Universidade de Nancy (LEBESGUE, 1902; HOARE; LORD, 2002).

Após seu doutoramento, Lebesgue iniciou carreira acadêmica, durante a qual direcionou esforços não só para matemática, mas também para questões pedagógicas e relacionadas com a história da matemática. Trabalhou no Tennes et Poitiers e ministrou cursos no Collège de France que resultaram nos livros *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, de 1904, e *Leçons sur les séries trigonométriques*, de 1906 (LEBESGUE, 1904, 1906). Em 1910 foi nomeado para a Sorbonne, onde obteve a cátedra em 1918. Em 1921 ingressou no Collège de France, onde permaneceu até sua morte, que ocorreu em 26 de Julho de 1941. Foi eleito para a Academia de Ciências de Paris e para as Sociedade Matemática e Sociedade Real de Londres, entre outras (HOCHKIRCHEN, 2003).

A brilhante trajetória acadêmica de Lebesgue, bem como a importância de seus novos conceitos de medida e de integral tanto dentro da própria matemática[2] como em aplicações, especialmente para a análise dos fenômenos descontínuos e de natureza estatística e probabilística, permitiram que a sua teoria da medida e integração finalmente

---

[1] Antigamente quando se inventava uma função nova, era com vistas a algum objetivo prático; hoje em dia inventa-se expressamente para colocar defeito nos raciocínios de nossos pais.

[2] Segundo Lintz (2007), a análise funcional como um todo não teria surgido caso tais conceitos não fossem desenvolvidos; conseqüentemente, áreas da física, como a mecânica quântica, que dependem desse ramo da matemática, também não.

fosse aceita (LINTZ, 2007; HOCHKIRCHEN, 2003). Mas, de que trata a Integral de Lebesgue?

O principal problema da definição de Riemann, apontada por Lebesgue, é que, ao subdividir o domínio da variável independente, se uma função $y = f(x)$ tem muitos pontos de descontinuidade, então à medida que o intervalo $x_{i+1} - x_i$ torna-se menor, os valores $f(x_{i+1})$ e $f(x_i)$ não ficam necessariamente próximos. Lebesgue, ao contrário, pensou a teoria da integração com base na análise da variação da função. Utilizando essa idéia, Lebesgue propõe que seja feita a partição do intervalo $(\overline{f}, \underline{f})$ – em que $\overline{f}$ e $\underline{f}$ são, respectivamente, os limites superior e inferior da função dentro do intervalo considerado –, em $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$, com $\overline{f} = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \underline{f}$. Em cada um desses subintervalos deve ser escolhido um y_i^*. Define-se então o conjunto E_i, formado pelos pontos do eixo x de sorte que $y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}$. Isso posto, chegamos à seguinte soma, em que $m(E_i)$ é a medida (de Lebesgue) do conjunto E_i:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \, m(E_i),$$

Quando n tende a infinito, as diferenças $(y_{i+1} - y_i)$ tendem a zero, e a soma transforma-se na integral de Lebesgue.

Podemos retomar o exemplo da função de Dirichlet para ilustrar como aquela função seria Lebesgue-integrável. Assumamos que a medida de Lebesgue do conjunto dos números racionais do intervalo $[0,1]$ seja zero e que essa medida, no caso dos irracionais, seja um. Como a função de Dirichlet só não é nula num conjunto de medida zero, então sua integral será nula. Conforme já dissemos, a integral de Riemann no mesmo intervalo não existe.

Nesse contexto, apresentamos aqui uma tradução comentada do artigo de Lebesgue de 1901 no qual os conceitos fundamentais da sua nova integral foram pela primeira vez apresentados. Para isso, fizemos uso do artigo original em francês (LEBESGUE, 1901), entretanto, os comentários de tradução – apresentados como notas de fim; as notas de rodapé apresentadas no decurso do texto da tradução são do próprio Lebesgue – estão baseados na tradução inglesa de Loya (2012). Cabe destacar, ainda, que seguimos uma metodologia específica para a tradução, apresentada no item a seguir.

Metodologia

Dentro da área que hoje é chamada tradutologia, existem duas grandes modalidades de tradução, a literária e a técnica, embora pareça haver um movimento direcionado à sua unificação (POLCHLOPEK; AIO, 2009). Na tradução técnica, também muitas vezes denominada “técnico-científica” (DURÃO, 2007), incluem-se os manuais, bulas, artigos científicos, dissertações, teses etc. Claramente é nessa modalidade que se enquadra o artigo de Lebesgue. Isso posto, seguiremos a metodologia de tradução descrita em Vinay e

Darbelnet (1958, 2004), aplicável tanto a traduções literárias como técnicas. Segundo esses autores, existem dois grupos de métodos e procedimentos básicos de tradução, a *tradução direta* e a *tradução oblíqua*.

A tradução direta divide-se em: *empréstimo*, *decalque* e a *tradução literal*. A *tradução literal* baseia-se na tradução palavra por palavra, isso é, é um método de transferência direta da língua original para a língua desejada com a apropriação da gramática e do idioma. Já o *decalque* mantém a expressão da língua de partida, traduzindo literalmente cada um dos elementos. Finalmente no *empréstimo*, recupera-se os termos estrangeiros com a finalidade de introduzir a cultura da língua original na tradução. Para a *tradução oblíqua* há quatro métodos: *transposição*, que troca a classe de uma palavra por outra sem mudar o significado da mensagem; *modulação*, em que há a variação na forma da mensagem por meio de uma mudança de ponto de vista; *equivalência*, as mensagens são equivalentes, mas não mantém a mesma natureza sintagmática; *adaptação*, uma nova situação é criada por inexistência de correspondência entre os dois idiomas.

Uma vez que nosso objetivo é disponibilizar em língua portuguesa um texto preciso e o mais fiel possível ao original de Lebesgue, valemo-nos, mormente, da tradução direta, isso é, da tradução literal, do decalque e do empréstimo, nessa ordem; e, somente na impossibilidade de tradução com esses, dos métodos da tradução oblíqua, ordenadamente: transposição, modulação, equivalência e adaptação. Isso é o mesmo que dizer, de um modo grosseiro, que fizemos uma tradução à alemã, isso é, procuraremos fazer uma tradução linha por linha, palavra por palavra (BICUDO, 2010). Uma vez que o francês é uma língua românica e, portanto, guarda fortes semelhanças tanto léxicas quanto estruturais com o português, não encontramos maiores dificuldades em tal empreitada.

Tradução

ANÁLISE MATEMÁTICA. - *Sobre uma Generalização da Integral Definida.*
Pelo Sr. **H. Lebesgue**, apresentado pelo Sr. Picard.

No caso das funções contínuas, há uma identidade entre as noções de integral e de função primitiva. Riemann definiu a integral de certas funções descontínuas, mas nem todas as funções derivadas são integráveis no sentido de Riemann. O problema da procura de funções primitivas não é, portanto, resolvido pela integração, e podemos desejar uma definição da integral compreendendo como caso particular a de Riemann e permitindo resolver o problema das funções primitivas[3].

Para definir a integral de uma função contínua crescente:

$$y(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

dividimos o intervalo (a, b) em subintervalos e faz-se a soma das quantidades obtidas ao multiplicar o comprimento de cada subintervalo por um dos valores de y quando x está

[3] Essas duas condições impostas *a priori* a qualquer generalização da integral são evidentemente compatíveis, porque qualquer função derivada integrável, no sentido de Riemann, tem por integral uma de suas funções primitivas.

dentro desse subintervalo. Se x está dentro do intervalo (a_i, a_{i+1}), y varia entre certos limites m_i, m_{i+1}, e reciprocamente, se y está entre m_i e m_{i+1}, x está entre a_i e a_{i+1}. De sorte que no lugar de se dar a divisão da variação de x, ou seja, de se dar os números a_i, teríamos podido dar a divisão da variação de y, ou seja, os números m_i. Disso, duas maneiras de generalizar a noção de integral. Sabemos que a primeira (de se dar os a_i) conduz à definição dada por Riemann e às definições de integrais por excesso e por falta dadas pelo Sr. Darboux. Vejamos a segunda.

Seja a função y compreendida entre m e M. Dados:

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{p-1} < M = m_p \;;$$

$y = m$ quando x faz parte de um conjunto E_0; $m_{i-1} < y \leq m_i$, quando x faz parte de um conjunto E_i[i].

Nós definiremos mais adiante as medidas λ_0, λ_i desses conjuntos. Consideremos uma ou outra destas duas somas:

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i; \quad m_o\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i;$$

se, quando a distância máxima entre dois m_i consecutivos tende rumo a zero, essas somas tendem rumo um mesmo limite, independentemente dos m_i escolhidos, esse limite será por definição a integral de y, que será dita integrável.

Consideremos um conjunto de pontos de (a, b); pode-se, de uma infinidade de maneiras, enclausurar esses pontos dentro de uma infinidade enumerável de intervalos; o limite inferior da soma dos comprimentos desses intervalos é a medida do conjunto[ii]. Um conjunto E é dito *mensurável* se[iii] sua medida acrescida daquela do conjunto de pontos que não fazem parte de E, dá a medida de (a, b)[4]. Eis duas propriedades desses conjuntos: uma infinidade de conjuntos mensuráveis E_i sendo dada, o conjunto dos pontos que fazem parte de pelo menos um dentre eles é mensurável; se os E_i não têm dois a dois algum ponto em comum, a medida do conjunto obtido é a soma das medidas E_i. O conjunto dos pontos comuns a todos os E_i é mensurável[iv].

É natural considerar primeiramente as funções tais que os conjuntos que figuram na definição da integral sejam mensuráveis. Encontramos que: *se uma função limitada superiormente em valor absoluto é tal que, quaisquer que sejam A e B, o conjunto dos valores de x para os quais se tem $A < y \leq B$ é mensurável, ela é integrável* pelo procedimento indicado. Uma tal função será dita *somável*. A integral de uma função somável está compreendida entre a integral por falta e a integral por excesso[v]. De sorte que, *se uma função integrável no sentido de Riemann é somável, a integral é a mesma com as duas definições*. Ou, *toda função integrável no sentido de Riemann é somável*, pois o conjunto de seus pontos de descontinuidade é de medida nula, e podemos demonstrar que se, fazendo abstração de um conjunto de valores de x de medida nula, resta um conjunto em cada ponto do qual uma função é contínua, essa função é somável. Essa propriedade permite construir imediatamente funções não integráveis no sentido de Riemann e ao mesmo tempo somáveis. Sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções contínuas, $\varphi(x)$ não sendo sempre nula; uma função que difere de $f(x)$ não mais que nos pontos de um conjunto de

[4] Se ajuntarmos a esses conjuntos, conjuntos de medidas nulas convenientemente escolhidos, teremos conjuntos mensuráveis no sentido do Sr. Borel (*Lições sobre a teoria de funções*).

medida nula sempre denso e que nesses pontos é igual a $f(x) + \varphi(x)$, é somável sem ser integrável no sentido de Riemann. Exemplo: a função igual a 0 se x irracional, igual a 1 se x racional. O processo de formação que precede mostra que o conjunto de funções somáveis tem uma força superior ao contínuo. Eis duas propriedades desse conjunto:

1. Se f e φ são somáveis, $f + \varphi$ e $f\varphi$ o são e a integral de $f + \varphi$ é a soma das integrais de f e de φ.

2. Se uma seqüência de funções somáveis tem um limite, é uma função somável.

O conjunto de funções somáveis contém evidentemente $y = k$ e $y = x$; portanto, de acordo com (1), ele contém todos os polinômios e como, de acordo com (2), ele contém todos seus limites, ele contém portanto todas as funções contínuas, todos os limites de funções contínuas, isso quer dizer, as funções de primeira classe (ver Baire, *Annali di Matematica*, 1899), ele contém todas essas de segunda classe etc.

Em particular, *toda função derivada, limitada superiormente em valor absoluto*, sendo de primeira classe, *é somável* e podemos demonstrar que sua integral, *considerada como função de seu limite superior, é uma de suas funções primitivas.*

Eis agora uma aplicação geométrica: se $|f'|$, $|\varphi'|$, $|\psi'|$ são limitadas superiormente, a curva

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

tem por comprimento a integral de $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$. Se $\varphi = \psi = 0$, temos a variação total da função f de variação limitada. No caso em que f', φ', ψ' não existem, podemos obter um teorema quase idêntico substituindo as derivadas pelos números derivados de Dini[vi].

Bibliografia

BICUDO, I. Introdução. In: EUCLIDES. **Os Elementos;** Tradução: Irineu Bicudo**.** São Paulo: Editora Unesp, 2009. p. 19-20.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007. 644p.

DURÃO, M. R. F. **Tradução Científica e Técnica:** Proposta para Formação de Tradutores Pluricompetentes Especializados na Produção de Documentação Científica e Técnica do Inglês para o Português. 2007. 586 f. Tese (Doutorado) - Universidade Aberta, Lisboa, 2007.

HOARE, G.T.Q.; LORD, N.J. 'Integrale, longueur, aire' the centenary of the Lebesgue integral. **The Mathematical Gazette**, Leicester, v. 86, n. 505, p.3-27, mar. 2002. Quadrimestral.

HOCHKIRCHEN, T. Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue. In: JAHNKE, H. N. (Comp.). **A History of Analysis**. Providence: AMS, 2003. p. 261-290.

LEBESGUE, H. L. Sur une Généralisation de l'Intégrale Définie. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie Des Sciences**, Paris, n. 132 , p.1025-1028, jan/jun. 1901.

LEBESGUE, H. L. **Intégrale, Longueur, Aire**. 1902. 129f. Tese (Doutorado) – Universidade de Nancy, Nancy, 1902.

LEBESGUE, H. L. **Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives**. Paris: Gauthier-Villars, 1904.

LEBESGUE, H. L. **Leçons sur les Séries Trigonométriques**. Paris: Gauthier-Villars, 1906.

LOYA, P. **ON A GENERALIZATION OF THE DEFINITE INTEGRAL BY MR. H. LEBESGUE.** Disponível em: <http://www.math.binghamton.edu/loya/505-F11/505-1.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2012.

LINTZ, R. **História da Matemática.** Campinas: Editora Unicamp, 2007. 500 p.

POLCHLOPEK, S.; AIO, M. A. Tradução Técnica: armadilhas e desafios. **Revista Brasileira de Tradutores**: Tradução & Comunicação, Valinhos, n. 19, p.101-113, 27 abr. 2010.

SAKS, S. **Theory of the Integral;** Tradução de: Stefan Banach. New York: Ge Stechert & Co., 1937. 354p.

VINAY, F.; DARBELNET, J. A. **Stylistique Comparée du Français et de l'Anglais**, Paris: Didier, 1958.

VINAY, F.; DARBELNET, J. A. Methodology of Translation. In: VENUTI, L. **The Translation Studies Reader.** Abingdon: Routhedge Taylor & Francis Group, 2004. p. 128-137.

Sílvio César Otero-Garcia
Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM – campus de Rio Claro - Brasil

E-mail: silvioce@gmail.com

---

[i] Lebesgue define $E_0 = y^{-1}(m) = \{x \in [a,b];\ y(x) = m\}$ e $E_i = y^{-1}(m_{i-1}, m_i] = \{x \in [a,b]; m_{i-1} < y(x) \leq mi$

[ii] Denotando por $m^*(E)$ a medida do conjunto $E \subseteq (a,b)$, Lebesgue define $m^*(E) \coloneqq \inf\{\sum_i \ell(I_i); E \subseteq \bigcup_i I_i\}$, onde $I_i = (a_i, b_i]$ e $\ell(I_i) = b_i - a_i$. Lebesgue não especifica os tipos de intervalo, mas não importa quais intervalos se escolhe para cobrir E.

[iii] Lebesgue define E como mensurável se $m^*(a,b) = m^*(E) + m^*((a,b) \cap E^c)$.

[iv] Lebesgue diz que se E_i é mensurável, $\bigcup_i E_i$ também é; se os conjuntos E_i são disjuntos, então $m^*(\bigcup_i E_i) = \sum_i m^*(E_i)$, e, finalmente, $\bigcap_i E_i$ é mensurável. O complemento de um conjunto mensurável é, pela definição, mensurável, donde Lebesgue está dizendo que a coleção de todos os conjuntos mensuráveis forma uma σ-álgebra.

[v] Integral por excesso e por falta no sentido de Darboux.

[vi] Números derivados de Dini ou as derivadas de Dini são quatro números introduzidos pelo matemático Ulisse Dini para generalizar a noção de derivada.